DOI:10.11721/cqnuj20170412

平面 Wiener Sausage 的中偏差*

王艳清，刘泽晨

(中南财经政法大学 统计与数学学院，武汉 430073)

摘要:【目的】研究平面 Wiener sausage 的中偏差。【方法】采用了高阶矩方法、Wiener sausage 的三角分解以及一些矩估计。【结果】发现平面 Wiener sausage 具有非对称的尾行为。【结论】Wiener sausage 的极限行为与其所处的空间有极大的联系。

关键词:Wiener sausage;中偏差;高阶矩方法

中图分类号:O211.64　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2017)05-0060-05

设 $\beta(s)$ 为 $\mathbf{R}^d$ 中从原点出发的布朗运动。由 $\beta(s)$ 产生以 r 为半径观察到时刻 t 的 Wiener sausage 定义为:

$$W_r(t)=\bigcup_{0\leqslant s\leqslant t}B_r(\beta(s)),t\geqslant 0,$$

这里 $B_r(x)$ 是以 x 为中心，$r\geqslant 0$ 为半径的开球。用 $|A|$ 表示集合 A 的勒贝格测度。Wiener sausage 的体积 $|W_r(t)|$ 是一个非常丰富的研究课题[1-7]，本文则主要关注平面情形。

1 主要结果

在前期的研究工作中[8]，有如下中偏差估计。

命题 1　设 $b(t)$ 是一个正函数且满足:$b(t)\to+\infty,\ln b(t)=o((\ln t)^{1/2})$，当 $t\to+\infty$，则存在正常数 C_1 和 C_2 使得:

$$-C_1\leqslant\liminf_{t\to+\infty}\frac{1}{b(t)^{\lambda}}\ln P\left(|W_r(t)|-E|W_r(t)|\geqslant\frac{2\pi\lambda t}{(\ln t)^2}\ln b(t)\right)\leqslant$$

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{1}{b(t)^{\lambda}}\ln P\left(|W_r(t)|-E|W_r(t)|\geqslant\frac{2\pi\lambda t}{(\ln t)^2}\ln b(t)\right)\leqslant -C_2。$$

本文进一步研究了 $E|W_r(t)|-|W_r(t)|$ 的尾概率行为，得到了如下的主要结果。

定理 1　设 $b(t)$ 是一个正函数且满足当 $t\to+\infty$ 时，有:

$$b(t)\to+\infty,b(t)=o((\ln t)^{\frac{1}{5}})。\tag{1}$$

则对任意的 $\lambda>0$，$\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{b(t)}\ln P\left(E|W_r(t)|-|W_r(t)|\geqslant\lambda\frac{tb(t)}{(\ln t)^2}\right)=-(2\pi)^{-2}\kappa(2,2)^{-4}\lambda$，这里 $\kappa(d,p)$ 是满足 Gagliardo-Nirenberg 不等式中常数 C 的最优值:

$$\|f\|_{2p}\leqslant C\|\nabla f\|_2^{\frac{d(p-1)}{2p}}\|f\|_2^{1-\frac{d(p-1)}{2p}},f\in W^{1,2}(\mathbf{R}^d),$$

其中 $W^{1,2}(\mathbf{R}^d)=\{f\in L^2(\mathbf{R}^d);\nabla f\in L^2(\mathbf{R}^d)\}$。

注　比较定理 1 和命题 1 的结论，可以看出 $|W_r(t)|-E|W_r(t)|$ 具有非对称的尾行为，这与布朗运动的自相交局部时的性质是相似的。Gall 在文献[2]中指出，$|W_r(t)|-E|W_r(t)|$ 弱收敛到布朗运动的自相交局部时，因此该结果的出现是合理的。

定理 1 的证明主要借鉴了文献[9]的思想。本文将在第 2 部分给出一些准备引理，在第 3 部分给出定理 1 的证明过程。

* **收稿日期**:2016-06-24　**修回日期**:2017-04-24　**网络出版时间**:2017-05-16 11:27

资助项目:国家自然科学基金(No.11401590)

第一作者简介:王艳清，女，副教授，研究方向为随机过程与大偏差，E-mail:yanqingwang102@163.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20170516.1127.080.html

2 准备引理

首先给出一些关于平面 Wiener sausage 的指数矩估计。

令 $V_r(t)=|W_r^1(t)\cap W_r^2(t)\cap\cdots\cap W_r^p(t)|$ 表示 p 个独立 Wiener sausages 相交部分的体积。$P^{(y_1,y_2,\cdots,y_p)}$ 表示分别从 $y_1,y_2,\cdots,y_p$ 出发的 $\{\beta_1(s),\beta_2(s),\cdots,\beta_p(s)\}$ 所诱导的概率测度,$E^{(y_1,y_2,\cdots,y_p)}$ 表示关于 $P^{(y_1,y_2,\cdots,y_p)}$ 的数学期望,若 $y_1,y_2,\cdots,y_p$ 都是原点,则予以省略。

引理 1[6]　存在 $\theta>0$ 使得 $\sup\limits_{t\geqslant 27} E\exp\left\{\theta\dfrac{(\ln t)^2}{t}\,\|W_r(t)|-E|W_r(t)\|\right\}<\infty$,进一步地,对任意的 $\lambda>0$,有:

$$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{b(t)}\ln P\left\{\|W_r(t)|-E|W_r(t)\|\geqslant\lambda\frac{tb(t)}{(\ln t)^2}\right\}\leqslant-\theta\lambda。$$

引理 2[6]　对任意 $p\geqslant 2$,存在 $\theta>0$ 使得:

$$\sup_{t\geqslant 3}\sup_{y_1,y_2,\cdots,y_p}E^{(y_1,y_2,\cdots,y_p)}\exp\left\{\theta\left(\frac{(\ln t)^p}{t}\right)^{\frac{1}{p-1}}(V_r(t))^{\frac{1}{p-1}}\right\}<\infty。$$

引理 3[6]　设 $b(t)$ 满足:$b(t)\to+\infty$,$b(t)=o(\ln t)$,当 $t\to+\infty$。则对任意的 $\lambda>0$,有:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{b(t)}\ln P\left(V_r(t)\geqslant\frac{\lambda t}{(\ln t)^p}b(t)^{p-1}\right)=-\frac{p}{2}(2\pi)^{-\frac{p}{p-1}}\kappa(2,p)^{-\frac{2p}{p-1}}\lambda^{\frac{1}{p-1}}。$$

下面几个引理主要借鉴了文献[9]中的一些技巧,由于证明过程类似且十分冗长,在此仅给出主要结果。

引理 4　设 $h(x)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上具有紧支持的光滑对称概率密度函数,$\varepsilon>0$,记 $h_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-2}h(\varepsilon^{-1}x)$,

$$A_t(\varepsilon):=\left(\frac{t}{b(t)}\right)^{-2}\int_{\mathbf{R}^2}\left[\int_{\mathbf{R}^2}h_\varepsilon\left(\sqrt{\frac{b(t)}{t}}(x-y)\right)I_{\{y\in W_r(t)\}}\,\mathrm{d}y\right]^2\mathrm{d}x,$$

则对任意的 $\theta>0$,有:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{b(t)}\ln E\exp\left\{\theta\sqrt{\frac{b(t)}{t}}(\ln t)\,|A_t(\varepsilon)|^{\frac{1}{2}}\right\}=$$

$$\sup_{g\in\mathcal{F}}\left\{2\pi\theta\left(\int_{\mathbf{R}^2}|(g^2*h_\varepsilon)(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^2}\langle\nabla g(x),\nabla g(x)\rangle^2\mathrm{d}x\right\}。$$

这里 $\mathcal{F}=\{g\in W^{1,2}(\mathbf{R}^2);\|g\|_2=1\}$。

进一步地,对任意的 $N=0,1,\cdots$,以及 $\varepsilon>0$,有:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{b(t)}\ln E\exp\left\{\theta\sqrt{\frac{b(t)}{t}}(\ln t)\times\left(\left(\frac{t}{b(t)}\right)^{-2}\int_{\mathbf{R}^2}\left[\int_{\mathbf{R}^2}h_\varepsilon\left(\sqrt{\frac{b(t)}{t}}(x-y)\right)I_{\{y\in W_r(2^{-N}t)\}}\mathrm{d}y\right]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\leqslant$$

$$2^{-N+2}\pi^2\theta^2\kappa(2,2)^4。$$

该引理的证明类似于文献[9]中的引理 7.7。

引理 5　设 $b(t)$ 满足(1)式。记:

$$B_t^{(j)}(\varepsilon)\equiv\left(\frac{t}{b(t)}\right)^{-2}\times$$

$$\int_{\mathbf{R}^2}\left[\int_{\mathbf{R}^2}h_\varepsilon\left(\sqrt{\frac{b(t)}{t}}(x-y)\right)I_{\{y\in W_r(2^{-j}t)\}}dy\right]\times\left[\int_{\mathbf{R}^2}h_\varepsilon\left(\sqrt{\frac{b(t)}{t}}(x-y')\right)I_{\{y'\in W_r'(2^{-j}t)\}}\mathrm{d}y'\right]\mathrm{d}x。$$

则对任意的 $\theta>0$ 以及 $j=0,1,\cdots$,有:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup\lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{b(t)}\ln E\exp\left\{\theta\sqrt{\frac{b(t)}{t}}(\ln t)\,\big|\,|W_r(2^{-j}t)\cap W_r'(2^{-j}t)|-B_t^{(j)}(\varepsilon)\big|^{\frac{1}{2}}\right\}=0。$$

此引理的证明类似于文献[9]中的引理 7.8。

3 定理 1 的证明

为了简便,记 $\overline{W}_r(t)=|W_r(t)|-E|W_r(t)|$。对任意的随机变量 Y,记 $\overline{Y}=Y-EY$。注意到 $b(t)=o\left((\ln t)^{\frac{1}{5}}\right)$,由命题 1 可以看出,$\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{b(t)}\ln P\left(\overline{W}_r(t)\geqslant\lambda\dfrac{tb(t)}{(\ln t)^2}\right)=-\infty$。故若能够证明对任意的 $\lambda>0$,有:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{b(t)}\ln P\left(|\overline{W}_r(t)|\geqslant\lambda\frac{tb(t)}{(\ln t)^2}\right)=-(2\pi)^{-2}\kappa(2,2)^{-4}\lambda, \tag{2}$$

则定理1得证。

由于$|\overline{W}_r(t)|$是非负随机变量,利用文献[10]中定理4给出的高阶矩方法,若要得到(2)式,只需要证明对任意的$\theta>0$,有:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{b(t)}\ln E\exp\left\{\theta\sqrt{\frac{b(t)}{t}}\ln t\ \ |EW_r(t)-W_r(t)|^{\frac{1}{2}}\right\}=\sup_{\lambda>0}\{\theta\lambda^{\frac{1}{2}}-(2\pi)^{-2}\kappa(2,2)^{-4}\lambda\}=(\theta\pi)^2\kappa(2,2)^4。\tag{3}$$

下面将分上、下界来证明(3)式。

先证明上界。通过对时间$[0,t]$进行分割,有:

$$|W_r(t)|=\sum_{k=1}^{2^N}\left|W_r\left(\left[\frac{k-1}{2^N}t,\frac{k}{2^N}t\right]\right)\right|-\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{2^{j-1}}\left|W_r\left(\left[\frac{2k-2}{2^j}t,\frac{2k-1}{2^j}t\right]\right)\cap W_r\left(\left[\frac{2k-1}{2^j}t,\frac{2k}{2^j}t\right]\right)\right|:=I_t-J_t。$$

设$\varepsilon>0$,由于$E|W_r(t)|-|W_r(t)|=(EI_t-I_t)+J_t-EJ_t\leqslant(EI_t-I_t)+J_t$,因此,

$$P\left\{\left|E|W_r(t)|-|W_r(t)|\right|\geqslant\lambda t\frac{b(t)}{(\ln t)^2}\right\}\leqslant P\left\{|EI_t-I_t|\geqslant\varepsilon t\frac{b(t)}{(\ln t)^2}\right\}+P\left\{J_t\geqslant(\lambda-\varepsilon)t\frac{b(t)}{(\ln t)^2}\right\}。\tag{4}$$

注意到$|EI_t-I_t|\leqslant\sum_{k=1}^{2^N}\left|E\left|W_r\left(\left[\frac{k-1}{2^N}t,\frac{k}{2^N}t\right]\right)\right|-\left|W_r\left(\left[\frac{k-1}{2^N}t,\frac{k}{2^N}t\right]\right)\right|\right|$。若把(2)式中$t$换为$2^{-N}t$,$\lambda$换为$2^N\lambda$且$b(t)$换为$\widetilde{b}(t):=b(2^Nt)$,可以得到:

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{b(t)}\ln P\left\{\left|E|W_r([0,2^{-N}t]))-|W_r([0,2^{-N}t])|\right|\geqslant\lambda\frac{tb(t)}{(\ln t)^2}\right\}\leqslant-2^NC\lambda。\tag{5}$$

因此由文献[9]中的引理7.9,有$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{b(t)}\ln P\left\{|EI_t-I_t|\geqslant\varepsilon\frac{tb(t)}{(\ln t)^2}\right\}\leqslant-2^NC\varepsilon$。

利用三角不等式

$$P\left\{J_t\geqslant\frac{(\lambda-\varepsilon)tb(t)}{(\ln t)^2}\right\}\leqslant\sum_{j=1}^{N}P\left\{\sum_{k=1}^{2^{j-1}}\xi_{j,k}\geqslant2^{-j}\frac{(\lambda-\varepsilon)tb(t)}{(\ln t)^2}\right\}, \tag{6}$$

这里对每一个$1\leqslant j\leqslant N$,

$$\xi_{j,k}(t)=\left|W_r\left(\left[\frac{2k-2}{2^j}t,\frac{2k-1}{2^j}t\right]\right)\cap W_r\left(\left[\frac{2k-1}{2^j}t,\frac{2k}{2^j}t\right]\right)\right|,k=1,\cdots,2^{j-1},$$

形成一个独立的序列且与$|W_r([0,2^{-j}t])\cap W_r'([0,2^{-j}t])|$同分布。

由引理3,对任意的$\lambda>0$,有:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{b(t)}\ln P\left\{|W_r([0,2^{-j}t])\cap W_r'([0,2^{-j}t])|\geqslant\frac{\lambda tb(t)}{(\ln t)^2}\right\}=-2^j(2\pi)^{-2}\kappa(2,2)^{-4}\lambda。$$

故由(6)式和文献[9]中的引理7.9得:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{b(t)}\ln P\left\{J_t\geqslant\frac{(\lambda-\varepsilon)tb(t)}{(\ln t)^2}\right\}=-(2\pi)^{-2}\kappa(2,2)^{-4}(\lambda-\varepsilon)。\tag{7}$$

综合(4),(5)式和(7)式,令$\varepsilon\to0$,得到:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{b(t)}\ln P\left\{\left||W_r(t)|-|W_r(t)|\right|\geqslant\frac{\lambda tb(t)}{(\ln t)^2}\right\}\leqslant-(2\pi)^{-2}\kappa(2,2)^{-4}\lambda。$$

利用引理1和文献[10]中的定理5,有:

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{b(t)}\ln E\exp\left\{\theta\sqrt{\frac{b(t)}{t}}(\ln t)\left|E|W_r(t)|-|W_r(t)|\right|^{\frac{1}{2}}\right\}\leqslant$$

$$\sup_{\lambda>0}\{\theta\lambda^{\frac{1}{2}}-(2\pi)^{-2}\kappa(2,2)^{-4}\lambda\}=(\theta\pi)^2\kappa(2,2)^4。\tag{8}$$

再证下界。对N利用归纳法,可以得到:

$$A_t(\varepsilon):=\left(\frac{t}{b(t)}^{-2}\right)\int_{\mathbf{R}^2}\left[\int_{\mathbf{R}^2}h_\varepsilon\left(\sqrt{\frac{b(t)}{t}}(x-y)\right)I_{\{y\in W_r(t)\}}\,\mathrm{d}y\right]^2\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\left(\frac{t}{b(t)}\right)^{-2}\sum_{k=1}^{2^N}\int_{\mathbf{R}^2}\left[\int_{\mathbf{R}^2}h_\varepsilon\left(\sqrt{\frac{b(t)}{t}}(x-y)\right)I_{\left\{y\in W_r\left(\left[\frac{k-1}{2^N}t,\frac{k}{2^N}t\right]\right)\right\}}\mathrm{d}y\right]^2\mathrm{d}x+$$
$$2\left(\frac{t}{b(t)}\right)^{-2}\sum_{j=1}^{2^N}\sum_{k=1}^{2^{j-1}}\int_{\mathbf{R}^2}\left[\int_{\mathbf{R}^2}h_\varepsilon\left(\sqrt{\frac{b(t)}{t}}(x-y)\right)I_{\left\{y\in W_r\left(\left[\frac{2k-2}{2^j}t,\frac{2k-1}{2^j}t\right]\right)\right\}}\mathrm{d}y\right]\times$$
$$\left[\int_{R^2}h_\varepsilon\left(\sqrt{\frac{b(t)}{t}}(x-y')\right)I_{\left\{y'\in W_r\left(\left[\frac{2k-1}{2^j}t,\frac{2k}{2^j}t\right]\right)\right\}}\mathrm{d}y'\right]\mathrm{d}x:=I_t(\varepsilon)+2J_t(\varepsilon)。$$

从而有：

$$E|W_r(t)|-|W_r(t)|=(EI_t-I_t)+J_t-EJ_t\geqslant(EI_t-I_t)+J_t(\varepsilon)-|J_t-J_t(\varepsilon)|-EJ_t\geqslant$$
$$(EI_t-I_t)-\frac{1}{2}I_t(\varepsilon)-|J_t-J_t(\varepsilon)|-EJ_t+\frac{1}{2}A_t(\varepsilon)。$$

将看到在下界控制中起主要作用的项是$\frac{1}{2}A_t(\varepsilon)$。

由引理 2 可以看出，存在一个常数 C_N 使得 $EJ_t\leqslant C_N\frac{t}{(\ln t)^2}$。记 $f=\theta\sqrt{\frac{b(t)}{t}}\ln t$，则由 Hölder 不等式有：

$$E\exp\left\{\theta\sqrt{\frac{b(t)}{t}}(\ln t)\left|E|W_r(t)|-W_r(t)\right|^{\frac{1}{2}}\right\}\geqslant e^{-C_Np\sqrt{b(t)}}\left[E\exp\left\{\frac{3\theta}{p-1}\sqrt{\frac{b(t)}{t}}(\ln t)\,|EI_t-I_t|^{\frac{1}{2}}\right\}\right]^{-\frac{p-1}{3}}\cdot$$
$$\left[E\exp\left\{\frac{3\theta}{p-1}\sqrt{\frac{b(t)}{t}}(\ln t)I_t(\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\right\}\right]^{-\frac{p-1}{3}}\cdot\left[E\exp\left\{\frac{3\theta}{p-1}\sqrt{\frac{b(t)}{t}}(\ln t)\,|J_t-J_t(\varepsilon)|^{\frac{1}{2}}\right\}\right]^{-\frac{p-1}{3}}\cdot$$
$$\left[E\exp\left\{\frac{\theta}{2p}\sqrt{\frac{b(t)}{t}}(\ln t)\,|A_t(\varepsilon)|^{1/2}\right\}\right]^p。\tag{9}$$

由引理 4 可知：

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{b(t)}\ln E\exp\left\{\frac{\theta}{2p}\sqrt{\frac{b(t)}{t}}(\ln t)\,|A_t(\varepsilon)|^{\frac{1}{2}}\right\}=\sup_{g\in\mathcal{F}}\left\{\frac{\pi\theta}{p}\left(\int_{\mathbf{R}^2}|(g^2*h_\varepsilon)(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^2}\langle\nabla g(x),\nabla g(x)\rangle\mathrm{d}x\right\}。$$

接下来控制(9)式中的其他项。

在(8)式中将 t 换为 $2^{-N}t$，θ 换为 $2^{-\frac{N}{2}}\theta$，$b(t)$换为 $\widetilde{b}(t):=b(2^Nt)$)，结合文献[9]中的引理 7.9，可以证明对任意的 $\theta>0$，$\limsup\limits_{t\to\infty}\frac{1}{b(t)}\ln E\exp\left\{\theta\sqrt{\frac{b(t)}{t}}(\ln t)\,|EI_t-I_t|^{\frac{1}{2}}\right\}\leqslant 2^{-N}C\theta^2$。

由引理 4 和文献[9]中的引理 7.9，可以得到$\limsup\limits_{t\to\infty}\frac{1}{b(t)}\ln E\exp\left\{\theta\sqrt{\frac{b(t)}{t}}(\ln t)I_t(\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\right\}\leqslant 2^{-N}C\theta^2$，这里 $C>0$ 是不依赖于 ε 的常数。

注意到，$|J_t-J_t(\varepsilon)|\leqslant\sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{k=1}^{2^{j-1}}\left|W_r\left(\left[\frac{2k-2}{2^j}t,\frac{2k-1}{2^j}t\right]\right)\cap W_r\left(\left[\frac{2k-1}{2^j}t,\frac{2k}{2^j}t\right]\right)\right|-|K_{j,k}(\varepsilon)|$，

其中：

$$K_{j,k}(\varepsilon)=\left(\frac{t}{b(t)}\right)^{-2}\int_{\mathbf{R}^2}\left[\int_{\mathbf{R}^2}h_\varepsilon\left(\frac{b(t)}{t}(x-y)\right)I_{\left\{y\in W_r\left(\left[\frac{2k-2}{2^j}t,\frac{2k}{2^j}t\right]\right)\right\}}\mathrm{d}y\right]\cdot$$
$$\left[\int_{\mathbf{R}^2}h_\varepsilon\left(\frac{b(t)}{t}(x-y')\right)I_{\left\{y'\in W_r\left(\left[\frac{2k-2}{2^j}t,\frac{2k}{2^j}t\right]\right)\right\}}\mathrm{d}y'\right]\mathrm{d}x。$$

对每一个 $1\leqslant j\leqslant N$，$K_{j,1}(\varepsilon),\cdots,K_{j,2^{N-1}}(\varepsilon)$是一个独立序列且与 $B_t^{(j)}(\varepsilon)$同分布。由引理 5 和 Hölder 不等式，有$\lim\limits_{\varepsilon\to0}\sup\limits\lim\limits_{t\to\infty}\sup\frac{1}{b(t)}\ln E\exp\left\{\theta\sqrt{\frac{b(t)}{t}}(\ln t)\,|J_t-J_t(\varepsilon)|^{\frac{1}{2}}\right\}=0$。

故先令 $\varepsilon\to0^+$，再令 $N\to\infty$，最后令 $p\to1^+$，可以得到：

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{b(t)}\ln E\exp\left\{\theta\sqrt{\frac{b(t)}{t}}(\ln t)\left|E|W_r(t)|-|W_r(t)|\right|^{\frac{1}{2}}\right\}\geqslant$$
$$\sup_{g\in\mathcal{F}}\left\{\pi\theta\left(\int_{\mathbf{R}^2}|g(x)|^4\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^2}\langle\nabla g(x),\nabla g(x)\rangle\mathrm{d}x\right\}=$$

$$(\pi\theta)^2 \sup_{f\in\mathcal{F}}\left\{\left(\int_{\mathbf{R}^2}|f(x)|^4\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^2}|\nabla f(x)|^2\mathrm{d}x\right\}=(\pi\theta)^2\kappa(2,2)^4,$$

这里的第二步用到了替换 $g(x)=f(\boldsymbol{A}x)$，$\boldsymbol{A}$ 是 2×2 矩阵且满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=(\pi\theta)^2\boldsymbol{I}_{2\times 2}$，$\boldsymbol{I}_{2\times 2}$ 是 2×2 单位矩阵，最后一步则是利用了文献[11]中的引理 A.2。 证毕

参考文献：

[1] SPITZER F.Electrostatic capacity，heat flow and Brpwnian motion[J].Z Wahr Verw Geb，1964，3(2)：110-121.

[2] LE GALL J F.Fluctuation results for the Wiener sausage [J].Ann Probab，1988，16(3)：991-1018.

[3] van den BERG M，BOLTHAUSEN E，den HOLLANDER F.Moderate deviations for the volume of the Wiener sausage[J].Ann Math，2001，153(2)：355-406.

[4] van den BERG M，BOLTHAUSEN E，den HOLLANDER F.On the volume of the intersection of two Wiener sausages [J].Ann Math，2004，159(2)：741-782.

[5] DONSKER M D，VARADHAN S R S.Asymptotics for the Wiener sausage[J].Comm Pure App Math，1975，28(4)：525-565.

[6] GAO F Q，WANG Y Q.Moderate deviations and laws of the iterated logarithm for the volume of the intersectionof high dimensional Wiener sausages[J].Electron J Probab，2009，14(20)：1900-1935.

[7] 王艳清.下临界维数 Wiener sausage 相交时间的中偏差[J].中国科学：数学，2013，43(7)：663-674.
WANG Y Q.Moderate deviations for the mutual intersection time of Wienersausages in subcritical dimensions[J].Scientia Sinica (Mathematica)，2013，43(7)：663-674.

[8] 王艳清.平面 Wiener Sausage 的一个中偏差估计[J].应用数学，2016(3)：614-618.
WANG Y Q. A Moderate Deviation Estimate for Planar Wiener Sausage[J].Mathematica Applicata，2016(3)：614-618.

[9] BASS R，CHEN X，ROSEN J.Moderate deviations for the range of planar random walks[J].Memo AMS，2009，198 (929)：82.

[10] CHEN X.Moderate deviations and law of the iterated logarithm for intersections of the ranges of random walks[J].Ann Probab，2005，33(2)：1014-1059.

[11] CHEN X.Exponential asymptotics and law of the iterated logarithm for intersection local times of random walks[J].Ann Probab，2004，32(4)：3248-3300.

Moderate Deviations for Planar Wiener Sausage

WANG Yanqing, LIU Zechen

(School of Statistics and Mathematics, Zhongnan University of Economics and Law, Wuhan 430073, China)

Abstract: [**Purposes**]Here it studys the moderate deviations for planar Wiener sausage. [**Methods**] The triangle decomposition of Wiener sausage and some moment estimations are used in the proof. [**Findings**]The result shows that the planar Wiener sausage has asymmetric tail behavior. [**Conclusions**]The limit behavior of Wiener sausage are greatly related to the dimension.

Keywords: Wiener sausage; moderate deviations; high moment method

(责任编辑 许 甲)