

含根网络的可靠性与稳定性研究^{*}

唐晓清¹, 刘莹², 刘念祖³

(1. 上海立信会计金融学院 统计与数学学院, 上海 201620; 2. 邵阳学院 理学与信息科学系, 湖南 邵阳 422000;
3. 上海立信会计金融学院 信息管理学院, 上海 201620)

摘要:【目的】含功能中心根顶点的网络的稳定性及可靠性有着很强的理论意义和现实意义。对可靠性和稳定性进行简化运算,得出其减-缩边公式。【方法】先利用条件概率推导出二阶平方期望的减-缩边公式,再利用已有的一阶期望减-缩边公式。【结果】得到方差的一个二阶分解递归计算方法,从而简化了运算。进一步,推导了一些特殊根图的具体的方差分解计算公式。【结论】较好地解决了网络方差计算的减-缩边公式问题,研究了根顶点不同位置时候的网络稳定性及优化问题,讨论了有均匀分布先验和 Beta 分布先验时,后验方差的计算公式问题。最后,结合期望和方差讨论了含根网络的整体优化布局问题。

关键词:含根网络;可靠性;稳定性;减-缩边公式;期望-方差优化

中图分类号:O157.5

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2017)05-0065-07

生活中网络无处不在,比如,因特网、有线电视网、供水网、供电网和局域网等。这些网络有一个共同的特点,就是网络中有一个功能中心(根),其他的用户(顶点)通过连线(边)与功能中心连接。而且,只有当这些顶点与根连通的时候,才能正常工作,这样的网络被称为含根网络。

Colbourn 最早引入含根网络的恢复力^[1]概念,即设每个顶点总是不失效,而每条边在灾难发生时,独立以概率 p 幸存,则灾后与根正常连通的边数的概率,这是 p 的多项式。此后,关于此类问题的研究有很多,比如,网络可靠性^[2]、渐近可靠性^[3]、双概率可靠性^[4]、成对可靠性^[5-6]、持续力^[7]和可到达性^[8]等。后来,Aivaliotis 等人^[9]进一步研究了根树的边数期望值。在此基础上,Bailey 等人^[10]设每个顶点总是不失效,而每条边在灾难发生时,独立以概率 p 幸存,则灾后与根正常连通的子图的顶点数,是一个随机变量,进而研究了很多有关性质。再后来,Eisenstat 等人^[11]研究了顶点以概率 p 幸存时候的顶点数期望值问题。Tang^[12]研究了顶点以概率 p 幸存时候的边数期望值问题。

从已有文献看,关于含根网络的方差问题研究较少。众所周知,方差表示随机变量的波动性大小,能反映含根网络的稳定性。本研究以方差作为含根网络的稳定性指标进行研究。

1 平方期望与减-缩边公式

1.1 期望值

设含根网络 $G=(V, E)$, 其中, E 是边集, V 是顶点集, $*$ 表示根顶点。子集 $A \subseteq V$, $r(A)$ 表示包含根的子图 A 中和根连通的边的数目。设图的每一个顶点(根顶点除外)在灾后的幸存概率是 p , 并且任何两个顶点是否幸存独立的, 设边总是不失效。但是, 在一个连接根的通路中, 如果前面的顶点失效, 则后面的边是不再考虑计数的, 即认为此边不再连通。所以边数是一个随机变量, 即原问题转化为在概率环境中研究和根连通的边的期望值。

定义 1 设 G 是一个简单连通含根网络(即没有环和重边)。那么, 它的边数期望值^[12]是:

$$Eve(G; p) = \sum_{A \subseteq V} r(A) p^{|A|} (1-p)^{|V-A|}, \quad (1)$$

其中, $|A|$ 表示集合 A 的阶。

^{*} 收稿日期:2016-06-15 修回日期:2017-08-22 网络出版时间:2017-06-15 11:23

资助项目:湖南省教育厅项目(No.16C1434);立信校级教研项目(No.AW-12-2203-225006);立信短学段课程建设项目(No.AW-12-2203-007160)

第一作者简介:唐晓清,男,讲师,博士,研究方向为随机图论和经济概率统计模型, E-mail: tangxiaqing5168@163.com; 通信作者:刘莹,讲师, E-mail: liuying4515@163.com

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20170615.1123.002.html>

由此定义可以计算一切含根网络的期望值,而且,此期望值与人们的一般概率意义的期望是一致的。期望值可以作为网络的可靠性的指标。

定理 1 设 G 是一个简单连通含根网络^[12],边 e 连接根 $*$, 它的另一端顶点是 v 。那么:

$$Eve(G; p) = p + p \cdot Eve(G_{I_e}; p) + (1 - p) \cdot Eve(G - \{v\}; p)。 \quad (2)$$

其中,简单含根网络在缩边后,可能出现环,或者重边。把没有环、不与任何边相连的根,表示为 φ_* ; 仅有一个环的根,表示为 I_* ; 令 $Eve(I_*; p) = 1, Eve(\varphi_*; p) = 0$ 。

正如色多项式问题,减-缩边公式^[13-16]在分解递归迭代计算有着很大的方便。这里,由(2)式可以很方便地推导出一些特殊含根网络的期望值。

推论 1 有 n 个顶点(不包括根顶点)的路根图(表示为 P_n)的期望值是:

$$Eve(P_n; p) = p + p \cdot Eve(P_{n-1}; p) + (1 - p) \cdot 0 = \sum_{i=1}^n p^i。$$

推论 2 有 n 个顶点(不包括根顶点)的圈根图(表示为 C_n)的期望值是:

$$Eve(C_n; p) = p + p \cdot Eve(C_{n-1}; p) + (1 - p) \cdot Eve(P_{n-1}; p)。$$

推论 3 有 n 个顶点(不包括根顶点)的扇根图(表示为 F_n)的期望值是 $Eve(F_n; p) = np + (n-1)p^2$ 。

推论 4 有 n 个顶点(不包括根顶点)的轮根图(表示为 W_n)的期望值是 $Eve(W_n; p) = np + np^2$ 。

推论 5 有 n 个顶点(不包括根顶点)的完全根图(表示为 K_n)的期望值是 $Eve(K_n; p) = np + (C_{n+1}^2 - n)p^2$ 。

推论 6 直和,即不相交的并 $Eve(G_1 \oplus G_2; p) = Eve(G_1; p) + Eve(G_2; p)$ 。

1.2 平方期望

定义 2 设 G 是含根网络,则平方期望值是:

$$E2V(G; p) = \sum_{A \subseteq V} [r(A)]^2 p^{|A|} (1 - p)^{|V-A|}。 \quad (3)$$

由(3)式可以算出一切含根网络图的平方期望。比如,对含根三角形(图 1),有 $A = \{v_1\}, E = \{a\}, r(A) = 1; A = \{v_2\}, E = \{b\}, r(A) = 1; A = \{v_1, v_2\}, E = \{a, b, c\}, r(A) = 3$ 。从而算得 $E2V(G; p) = 2p + 7p^2$,故而当 $p = 1, E2V(G; p) = 9$ 。而 $p = 1$,即 3 条边全部幸存,边的平方数当然是 9,这与事实吻合。

定理 2 设 G 是一个简单连通含根网络,边 e (非环)邻接于根 $*$, 另一端顶点是 v 。那么:

$$E2V(G; p) = (1 - p) \cdot E2V(G - \{v\}; p) + p \cdot E2V(G_{I_e}; p) + 2p \cdot Eve(G_{I_e}; p) + p。 \quad (4)$$

证明 使用条件概率方法^[17-18],令 Y_G 是含根连通子图的边数,则 $E(Y_G) = p \cdot (Y_G | e \rightarrow \text{幸存}) + (1 - p) \cdot (Y_G | e \rightarrow \text{失效})$ 。而当边 e 幸存时, $Y_G = Y_{G_{I_e}} + 1$; 当 e 失效时, $Y_G = Y_{G - \{v\}}$,故:

$$E2V(G; p) = (1 - p) \cdot \left\{ \sum_{A \subseteq V} [Y_{A - \{v\}}]^2 p^{|A|} (1 - p)^{|V-A|} \right\} + p \cdot \left\{ \sum_{A \subseteq V} [Y_{A_{I_e}} + 1]^2 p^{|A|} (1 - p)^{|V-A|} \right\} = (1 - p) \cdot E2V(G - \{v\}; p) + p \cdot E2V(G_{I_e}; p) + 2p \cdot Eve(G_{I_e}; p) + p。 \quad \text{证毕}$$

定理 3 设 G 是有 n 条边的含根网络,则平方期望值的系数之和是 n^2 ,即 $E2V(G; p) = \sum_i a_i p^i$,那么:

$$\sum_i a_i = n^2。 \quad (5)$$

证明 令 $p = 1$,则 $E2V(G; p) = E2V(G; 1) = \sum_i a_i$; 而 $p = 1$,意味着所有的边全幸存,故而此时边数的平方为 n^2 。 证毕

性质 1 1) 设含根网络 G 有 n 条边,则 $E2V(G; p)$ 能在 $O(n)$ 时间内计算; 2) 对含根网络 G , 计算 $E2V(G; p)$ 是 #P-完全。

(1)和(2)式相同于文献[12],证明略。

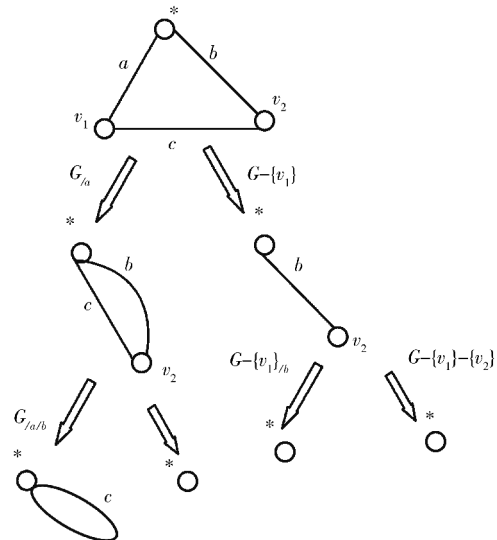


图 1 对含根网络递归使用减-缩边公式

Fig. 1 Recursive deletion-contraction edge of rooted triangle

性质 2 设 G 是有 n 条边的简单含根网络, 根顶点的度数是 m , 那么: 1) $E2V(G; p) = mp + p^2 g(p)$, $g(p)$ 是整系数的 p 的多项式; 2) $E2V(G; 0) = 0$ 。

证明 1) 当用(4)式分解含根网络 G 成更小根图时, 每次用掉根顶点的一条边, 产生一个项 p , 而其余部分是比 p 高阶的多项式, 从而得到上面结果。

2) 当 $p=0$, 意味着所有的边失效, 故而幸存的边数为 0。

证毕

减-缩边公式(4)是非常重要的简化计算公式, 下面是它的递归迭代应用。

例 1 现在计算含根三角形网络(图 1)的平方期望值。

$$\begin{aligned} E2V(G; p) &= p + p \cdot E2V(G_{/a}; p) + 2p \cdot Eve(G_{/a}; p) + (1-p) \cdot E2V(G - \{v_1\}; p) = \\ &= p + p \cdot [p + p \cdot E2V(G_{/a/b}; p) + 2p \cdot Eve(G_{/a/b}; p) + (1-p) \cdot E2V(G_{/a} - \{v_2\}; p)] + \\ &+ 2p \cdot [p + p \cdot Eve(G_{/a/b}; p) + (1-p) \cdot Eve(G_{/a} - \{v_2\}; p)] + (1-p) \cdot [p + p \cdot E2V(G - \{v_1\}_{/b}; p) + \\ &+ 2p \cdot Eve(G - \{v_1\}_{/b}) + (1-p) \cdot E2V(G - \{v_1\} - \{v_2\}; p)] = \\ &= p + p \cdot [p + p \cdot 1 + 2p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0] + 2p \cdot [p + p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0] + \\ &+ (1-p) \cdot [p + p \cdot 0 + 2p \cdot 0 + (1-p) \cdot 0] = p + p \cdot [p + p + 2p] + \\ &+ 2p \cdot [2p] + (1-p) \cdot [p] = p + p \cdot 4p + 4p^2 + (1-p) \cdot p = 2p + 7p^2. \end{aligned}$$

减-缩边公式在推导一些特殊图的平方期望计算是很有用的。

推论 7 设 P_n 是有 n 个顶点的路根图, 则它的平方期望是:

$$E2V(P_n; p) = (1-p) \cdot 0 + p \cdot E2V(P_{n-1}; p) + 2p \cdot Eve(P_{n-1}; p) + p = \sum_{i=1}^n (2i-1)p^i.$$

推论 8 设 C_n 是有 n 个顶点的圈根图, 则它的平方期望是:

$$E2V(C_n; p) = (1-p) \cdot E2V(P_{n-1}; p) + p \cdot E2V(C_{n-1}; p) + 2p \cdot Eve(C_{n-1}; p) + p.$$

推论 9 设 S_n 是有 n 个顶点的星根图, 则它的平方期望是:

$$\begin{aligned} E2V(S_n; p) &= (1-p) \cdot E2V(S_{n-1}; p) + p \cdot E2V(S_{n-1}; p) + 2p \cdot Eve(S_{n-1}; p) + p = \\ &= E2V(S_{n-1}; p) + 2p \cdot Eve(S_{n-1}; p) + p = np + (n^2 - n)p^2. \end{aligned}$$

2 含根网络的方差

定义 3 设 G 含根网络, 则方差是:

$$\text{Var}(G; p) = E2V(G; p) - [Eve(G; p)]^2. \quad (6)$$

由(6)式, 可以算出任何含根网络的方差。容易看出, 这是根据概率意义 $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ 定义的。而方差反映的是随机变量的波动大小。所以, 本研究以方差作为衡量含根网络的稳定性。

例 2 含根三角形网络(图 1)的方差:

$$\text{Var}(G; p) = E2V(G; p) - [Eve(G; p)]^2 = (2p + 7p^2) - (2p + p^2)^2 = 2p + 3p^2 - 4p^3 - p^4.$$

同样易知, 方差也是 p 的多项式, 并且按定义计算也非常麻烦。所以, 减-缩边公式很重要。利用(4)式, 可以顺利推导出一些特殊含根网络的方差。

2.1 一些特殊含根网络的方差

1) 设 P_n 是有 n 个顶点的路根图, 则它的方差是:

$$\text{Var}(P_n; p) = E2V(P_n; p) - [Eve(P_n; p)]^2 = \sum_{i=1}^n (2i-1)p^i - \left[\sum_{i=1}^n p^i \right]^2 = \sum_{i=1}^n [ip^i - (n+1-i)p^{n+i}].$$

2) 设 C_n 是有 n 个顶点的圈根图, 则它的方差是:

$$\begin{aligned} \text{Var}(C_n; p) &= E2V(C_n; p) - [Eve(C_n; p)]^2 = (1-p) \cdot E2V(P_{n-1}; p) + p \cdot E2V(C_{n-1}; p) + \\ &+ 2p \cdot Eve(C_{n-1}; p) + p - [(1-p) \cdot Eve(P_{n-1}; p) + p \cdot Eve(C_{n-1}; p) + p]^2. \end{aligned}$$

3) 设 S_n 是有 n 个顶点的星根图, 则它的方差是:

$$\text{Var}(S_n; p) = E2V(S_n; p) - [Eve(S_n; p)]^2 = np - np^2.$$

2.2 含根网络根顶点的优化

容易知道,含根网络的方差,不仅与幸存概率 p 有关,而且与根顶点在网络中的位置有关。

例 3 设当根顶点在顶点 v , 此时含根网络记为 G_v , 如图 2 所示, 则容易算得, 当根顶点在顶点 1 位置时, 它的期望平方值和期望值, 进而算得它的方差。

$$E2V(G_1; p) = p + 9p^2 + 16p^3 + 19p^4 + 4p^5,$$

$$Eve(G_1; p) = p + 3p^2 + 2p^3 + p^4.$$

所以, $\text{Var}(G_1; p) = p + 8p^2 + 10p^3 + 6p^4 - 10p^5 - 10p^6 - 4p^7 - p^8$ 。

再由对称性, 可知当根顶点在顶点 2 和 3 时, 它的期望和方差, 与根顶点在顶点 1 时相同, 即:

$$Eve(G_1; p) = Eve(G_2; p) = Eve(G_3; p), \text{Var}(G_1; p) = \text{Var}(G_2; p) = \text{Var}(G_3; p).$$

同理, 可以算得当根顶点在顶点 4, 5 和 6 时它的期望值和方差值。

$$E2V(G_4; p) = 4p + 18p^2 + 21p^3 + 6p^4, Eve(G_4; p) = 4p + 2p^2 + p^3.$$

有: $\text{Var}(G_4; p) = 4p + 2p^2 + 5p^3 - 6p^4 - 4p^5 - p^6$, $E2V(G_5; p) = 3p + 20p^2 + 20p^3 + 6p^4$, $Eve(G_5; p) = 3p + 4p^2$; $\text{Var}(G_5; p) = 3p + 11p^2 - 4p^3 - 10p^4$, $E2V(G_6; p) = 2p + 8p^2 + 21p^3 + 18p^4$, $Eve(G_6; p) = 2p + 2p^2 + 3p^3$ 。

同样, 由于对称性, 当根顶点在 6 和 7 时, 它的期望值和方差也一样:

$$Eve(G_7; p) = Eve(G_6; p), \text{Var}(G_7; p) = \text{Var}(G_6; p), \text{Var}(G_6; p) = 2p + 4p^2 + 13p^3 + 2p^4 - 12p^5 - 9p^6.$$

图 3 显示了当概率 p 取 $(0, 1)$ 之间不同数值时, 不同根顶点位置的含根网络的方差值变化曲线。明显可以看到, 随着 p 取值从 0 到 1 增大, 这些含根网络的方差值先增加, 到达最大值后, 比较快速地下降。不同根顶点位置的含根网络的方差, 在 p 不同的时期, 方差值最小的含根网络不一样。

从图 3 容易看到, 当概率 $p \in (0, 0.2856)$ 时, 根顶点位于顶点 1 (或者 2, 3) 的含根网络, 它的方差是所有含根网络中方差最小的; 而当概率 $p \in (0.2856, 0.3660)$ 时, 根顶点位于顶点 6 (或者 7) 的含根网络, 它的方差是所有含根网络中方差最小的; 最后, 当概率 $p \in (0.3660, 1)$ 时, 根顶点位于顶点 4 的含根网络, 它的方差是所有含根网络中方差最小的。以上结果, 由软件 Matlab 7.0 计算所得。所以, 当知道幸存概率 p 的值时, 恰当地选择根顶点的位置, 可以得到方差最小的含根网络, 也就是稳定性最好的含根网络。

2.3 概率 p 有先验分布时的优化

当幸存概率 p 有着先验分布时, 可以利用 Bayesian 方法求得更准确的后验分布^[19]。如果对其先验分布没有信息, 那么, 设它的先验服从 $(0, 1)$ 均匀分布, 就是合理的。下面讨论一些特殊含根网络在 p 服从 $(0, 1)$ 的均匀分布先验时的方差。

定义 4 设 G 是一个简单连通含根网络, 概率 p 先验服从 $(0, 1)$ 的均匀分布, 则它的均匀方差矩 (Variance uniform rank) 为:

$$V_{ur}(G) = \int_0^1 \text{Var}(G; p) dp. \quad (7)$$

性质 3 设 P_n 是有 n 个顶点的路根图, 则它的均匀方差矩是:

$$V_{ur}(P_n) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n ip^i - \sum_{i=1}^n (n-i+1)p^{i+n} dp = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{i+1} - \frac{n+1-i}{n+1+i} \right).$$

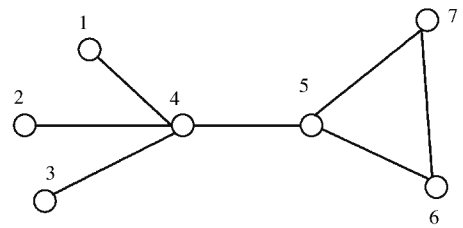


图 2 根不同位置的图

Fig. 2 Different location of root

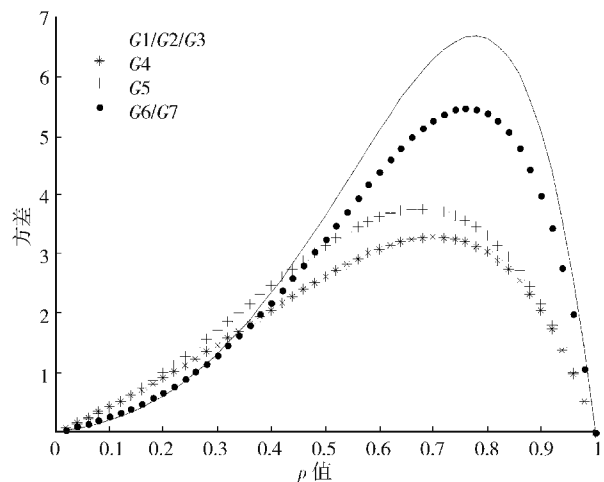


图 3 根不同位置的方差

Fig. 3 Variance of different root location

性质4 设 S_n 是有 n 个顶点的星根图,则它的均匀方差矩是 $V_{ur}(S_n) = \int_0^1 np(1-p)dp = \frac{n}{6}$ 。同样,还可以对图2所示的根图,求得它的根顶点在不同位置时的均匀方差矩。

例4 $V_{ur}(G_1) = V_{ur}(G_2) = V_{ur}(G_3) = \frac{1\ 991}{630} \approx 3.160$, $V_{ur}(G_4) = \frac{267}{140} \approx 1.907\ 1$, $V_{ur}(G_5) = \frac{13}{6} \approx 2.166\ 7$, $V_{ur}(G_6) = V_{ur}(G_7) = \frac{1\ 133}{420} \approx 2.698$ 。

从以上均匀方差矩计算结果来看,当根顶点位于顶点4的时候,它的均匀方差矩最小,即这时稳定性最好;而当根顶点位于顶点1(或者2,3)时,它的均匀方差矩最大,即这时稳定性最差。

定义5 设 G 是一个简单连通含根网络,概率 p 先验服从 $(0,1)$ 的 Beta 分布,则它的 Beta 方差矩(Variance beta rank)为:

$$V_{br}(G) = \int_0^1 \text{Var}(G; p) f(p; a, b) dp. \quad (8)$$

其中,概率 p 有先验概率分布密度函数(a, b 是参数)为 $f(p; a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} p^{a-1} (1-p)^{b-1}$ 。

性质5 设 P_n 是有 n 个顶点的路根图,则它的 Beta 方差矩是:

$$V_{br}(P_n) = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n i p^i - \sum_{i=1}^n (n-i+1) p^{i+n} \right) \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} p^{a-1} (1-p)^{b-1} dp = \sum_{i=1}^n \left[\frac{i(a+i)}{a+b+i} \prod_{j=1}^i \left(\frac{a+i-j}{a+b+i-j} \right) - \frac{(n+1-i)(a+n+i)}{a+b+n+i} \prod_{j=1}^{n+i} \left(\frac{a+n+i-j}{a+b+n+i-j} \right) \right]。$$

性质6 设 S_n 是有 n 个顶点的星根图,则它的 Beta 方差矩是:

$$V_{br}(S_n) = \int_0^1 np(1-p) \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} p^{a-1} (1-p)^{b-1} dp = \frac{nab(a+1)}{(a+b+2)(a+b+1)(a+b)}。$$

同样,还可以对图2所示的根图求得根顶点在不同位置时的 Beta 方差矩。

例5 比如,在参数 $a=2, b=1$ 时,根顶点在不同位置时的 Beta 方差矩为:

$$V_{br}(G_1) = V_{br}(G_2) = V_{br}(G_3) = \frac{2\ 659}{630} \approx 4.220\ 6, V_{br}(G_4) = \frac{191}{84} \approx 2.273\ 8, \\ V_{br}(G_5) = \frac{77}{30} \approx 2.566\ 7, V_{br}(G_6) = V_{br}(G_7) = \frac{493}{140} \approx 3.521\ 4。$$

从例5的 Beta 方差矩计算结果来看,在参数 $a=2, b=1$ 时,当根顶点位于顶点4时,它的 Beta 方差矩最小,即这时稳定性最好;而当根顶点位于顶点1(或者2,3)时,它的 Beta 方差矩最大,即这时稳定性最差。这个结果与均匀分布时的结果是一致的。

3 期望-方差优化

对于含根网络,一般是要求可靠性越大越好,即要求期望值要大。同时,又希望其稳定性要好,即要求方差要小。一般很难同时达到这两个要求。这时的解决办法,就是给期望和方差以合理的权。

定义6 设 G 是一个简单连通含根网络,权 $\gamma \in (0,1)$,则优化函数为:

$$u(G) = \max_{\gamma, p} \left[\gamma \cdot \text{Eve}(G; p) + (1-\gamma) \cdot \frac{1}{\text{Var}(G; p)} \right]. \quad (9)$$

容易知道,该函数是关于 p, γ 的函数。

例6 含根网络的根顶点分别在不同位置时候的优化函数值与参数 p, γ 的关系。当确定了参数 p, γ 的值以后,就可以算得各种情况下的优化函数值,进而比较大小,得到最大优化函数值。容易知道,在参数 p, γ 都比较小时,优化函数值都比较大。

4 结语

本研究讨论了含根网络各顶点在独立幸存概率下的可靠性和稳定性^[20-21],得到了方差计算的减-缩边

公式,使计算得到简化。讨论了两种先验概率下的稳定性优化,最后讨论了综合考虑期望与方差下的优化函数。

参考文献:

- [1] COLBOURN C. Network resilience[J]. Siam J Algebraic Discrete Methods, 1987, 8(3): 404-409.
- [2] ROBERTS F, HWANG F, MONMA C. Reliability of computer and communication networks[J]. DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 1991, 5: 20-35.
- [3] HANSEN P, JAUMARD B, NGUETSE G B. Best second order bounds for two-terminal network reliability with dependent edge failures: the satisfiability problem, Boolean functions[J]. Discrete Appl Math, 1999, 96/97: 375-393.
- [4] 刘念祖, 唐晓清, 王汉兴. 正则 q -树的双概率可靠性研究[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2013, 38(12): 24-27.
LIU N Z, TANG X Q, WANG H X. On reliability of two probability in regular q -tree rooted graph[J]. Journal of Southwest China Normal University(Natural Science Edition), 2013, 38(12): 24-27.
- [5] AMIN A, SIEGRIST K, SLATER P. Pair-connected reliability of a tree and its distance degree sequences[J]. Canadian Journal of Botany Revue Canadienne De Botanique, 1987, 73(1): 1301-1309.
- [6] 王冰杰, 唐晓清. 根图的稳定性及其优化[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2017, 42(4): 14-19.
WANG B J, TANG X Q. On stability of rooted graph and its optimality[J]. Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition), 2017, 42(4): 14-19.
- [7] BOESCH F, HARARY F, KABELL J. Graphs as models of communication network vulnerability: connectivity and persistence[J]. Networks, 1981, 11(1): 57-63.
- [8] BALL M, PROVAN S. Calculating bounds on reachability and connectedness in stochastic networks[J]. Networks, 1983, 13: 253-278.
- [9] AIVALIOTIS M, GORDON G, GRAVEMAN W. When bad things happen to good trees[J]. Journal of Graph Theory, 2001, 37: 79-99.
- [10] BAILEY A, GORDON G, PATTON M. Expected value expansions in rooted graphs[J]. Discrete Appl Math, 2003, 128(2-3): 555-571.
- [11] EISENSTAT D, FEDER J, FRANCOS G, et al. Expected rank and randomness in rooted graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 2008, 156(5): 746-756.
- [12] TANGXQ. New expected value expansions of rooted graphs[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica(English Series), 2015, 31(1): 81-88.
- [13] 唐晓清, 刘念祖, 王汉兴, 等. 图的一类新双变量色多项式[J]. 兰州大学学报(自然科学版), 2012, 48(2): 106-112.
TANG X Q, LIU N Z, WANG H X, et al. A class of new two-variable chromatic polynomial[J]. Journal of Lanzhou University (Natural Sciences), 2012, 48(2): 106-112.
- [14] 唐晓清, 刘念祖, 王汉兴, 等. 正则树的双变量色多项式研究[J]. 应用数学学报, 2013, 36(4): 761-768.
TANG X Q, LIU N Z, WANG H X, et al. The two-variable chromatic polynomial of regular tree study[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2013, 36(4): 761-768.
- [15] 刘莹, 唐晓清. 图的双变量色多项式比较研究[J]. 湖南师范大学自然科学学报, 2014, 37(6): 67-72.
LIU Y, TANG X Q. Comparison of some classes of two-variable chromatic polynomial[J]. Journal of Natural Science of Hunan Normal University, 2014, 37(6): 67-72.
- [16] 刘莹, 唐晓清. 正则 q -树根图的可靠性研究[J]. 东北师大学报(自然科学版), 2015, 47(1): 17-21.
LIU Y, TANG X Q. Reliability of regular q -tree rooted graphs study[J]. Journal of Northeast Normal University (Natural Sciences), 2015, 47(1): 17-21.
- [17] TANG X Q, TAN M C. Estimation of simple constrained parameters with EM method[J]. Journal of Hunan Institute of Engineering, 2010, 20: 61-64.
- [18] 唐晓清, 白延琴, 刘念祖, 等. 基于随机矩阵理论的 Markowitz 组合投资模型[J]. 上海大学学报(自然科学版), 2013, 19(3): 293-297.
TANG X Q, BAI Y Q, LIU N Z, et al. Markowitz portfolio model based on random matrix theory[J]. Journal of Shanghai University (Natural Science), 2013, 19(3): 293-297.
- [19] TANG X Q, QIN Y F, LU Y B. Detection methods for expressway traffic events based on dynamic Bayesian networks[J]. Journal of Shaoyang University (Natural Science Edition), 2009, 8(6): 8-10.
- [20] 张宏宇, 叶志勇. 具有饱和接触率的 SIQRS 模型的稳定性研究[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2015, 29(3): 141-145.
ZHANG H Y, YE Z Y. Analysis of SIQRS epidemic model with saturated contact rate[J]. Journal of Chongqing University of Technology (Natural Science), 2015, 29(3): 141-145.
- [21] 王娅, 杨志春. 一类带时滞具有非线性传染率的 SIR 模型的稳定性分析[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2015, 32(2): 53-56.

WANG Y, YANG Z C. Stability analysis of a class of delay SIR model with nonlinear incidence rate[J]. Journal of

Chongqing Normal University (Natural Science), 2015, 32(2): 53-56.

Reliability and Stability Study of Rooted Net

TANG Xiaoqing¹, LIU Ying², LIU Nianzu³

(1. School of Statistics & Mathematics, Shanghai Lixin University of Accounting and Finance, Shanghai 201620;

2. Department of Science & Information Science, Shaoyang University, Shaoyang Hunan 422000;

3. School of Information Management, Shanghai Lixin University of Accounting and Finance, Shanghai 201620, China)

Abstract: [Purposes] It has strong theoretical and practical significance of stability and reliability study of rooted network which contain a function center root. And the simplification of computation is very important to expect and variance, so it wants to deduce the deletion-contraction edge formula of variance. [Methods] So it affords the definition of expected square value $E2V(G;P)$, which is expect of edges number square, then the variance $\text{Var}(G;P)$ is got, and $\text{Var}(G;P)$ is a proper stability index to a rooted network. Then, the deletion-contraction edge formula of $E2V(G;P)$ based on condition probability is got. Also it has deletion-contraction edge formula of expect. [Findings] So a second order decomposition recursive computing variance method is obtained, which decompose the graph into some smaller subgraphs. [Conclusions] Get its deletion-contraction edge formula of variance, get the simplification computation. By using this formula, some computational formulas of expected value for some specific rooted graphs are got. The stability of network is also studied when the root at different vertex location, and its optimality. Later, the posteriori variance calculation is discussed when the parameter p has prior uniform distribution and Beta distribution. Finally, expect-variance global optimality of rooted network combined expects and variance is proposed.

Keywords: rooted net; reliability; stability; deletion-contraction edge formula; expect-variance optimality

(责任编辑 游中胜)