DOI:10.11721/cqnuj20170457

分数阶 Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov 方程新的精确解*

张　雪，孙峪怀，洪　韵，江　林
(四川师范大学 数学与软件科学学院，成都 610066)

摘要:【目的】构建分数阶 Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov 方程新的精确解。【方法】结合修正的 Riemann-Liouville 导数,运用扩展的(G'/G)-展开法,引入了新的辅助方程。【结果】这些新的精确解包括了双曲函数解、三角函数解以及有理函数解。【结论】得到方程更多的精确解。

关键词:扩展的(G'/G)-展开法;分数阶 Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov 方程;精确解

中图分类号:O175.29　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2017)05-0072-05

分数阶偏微分方程是近些年来描述诸多“复杂多变”科学及工程问题,甚至社会现象的重要数学模型。从应用角度看,分数阶导数与整数阶导数模型的本质区别在于,对时间导数而言,整数阶导数描述的是某时刻研究对象的变化或性质,而分数阶导数所表示的性质与整个历史过程有关;对空间导数而言,整数阶描述的是研究对象在空间某一局部位置的性质,而分数阶描述的性质涉及整个空间位置。由于它有着重要科学价值及广泛应用背景,分数阶偏微分方程引起了人们的广泛关注。为构造分数阶偏微分方程的精确解,人们构建了大量行之有效的方法。如分数阶首次积分法[1]、分数阶微分变换法[2]、分数阶子方程方法[3]、分数阶 exp-函数法[4]和 Backlund 变换[5]分数阶(G'/G)-展开法[6-7]等。本文讨论了(3+1)维的分数阶偏微分方程 KZK 方程的精确解。

分数阶 Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov 方程(KZK 方程)[8]:

$$\partial_z D_\tau^\alpha p=\frac{c_0}{2}\Delta\perp p+\gamma D_\tau^{3\alpha}p+\beta D_\tau^{2\alpha}p^2,\tag{1}$$

其中,$\Delta\perp p=\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}$,$0<\alpha\leqslant 1$,$\gamma=\frac{D}{2c_0^3}$和$\beta=\frac{\bar{\beta}}{2\rho_0 c_0^3}$。$p$ 是压强,z 是传波方向,$\tau=t-\frac{z}{c_0}$是延迟时间变量,c_0 是声波的最小信号传播速度,D 是扩散系数,ρ_0 是环流密度。D_x^α 是分数阶微分算子,由 Jumarie 的修正 Riemann-Liouville 导数[9-10]定义:

$$D_x^\alpha f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^x(x-\xi)^{-\alpha-1}(f(\xi)-f(0))\mathrm{d}\xi,\alpha<0,\\ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x(x-\xi)^{-\alpha}(f(\xi)-f(0))\mathrm{d}\xi,0<\alpha<1,\\ (D_x^{\alpha-n}f(x))^{(n)},n\leqslant\alpha<n+1,n\geqslant 1。\end{cases}$$

其中,$\Gamma(\cdot)$为 Gamma 函数。Jumarie 的修正 Riemann-Liouville 导数具有如下性质:

$$\begin{cases}D_x^\alpha c=0,\\ D_x^\alpha x^\gamma=\frac{\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma-\alpha)}x^{\gamma-\alpha},\gamma>0,\\ (u(x)v(x))^{(\alpha)}=u(x)^{(\alpha)}v(x)+u(x)v(x)^{(\alpha)},\\ (f[u(x)])^{(\alpha)}=f'_u(u)u^{(\alpha)}(x)=f_u^{(\alpha)}(u)(u'_x)^\alpha。\end{cases}$$

三维衍射光电波 KZK 抛物型非线性波方程在三维衍射光电波中是最广泛应用模型之一,同时(1)式也是描

* **收稿日期**:2016-07-01　**修回日期**:2017-06-12　**网络出版时间**:2017-06-15 11:23
资助项目:国家自然科学基金(No.11371267);四川省教育厅自然科学重点基金(No.2012ZA135)
第一作者简介:张雪,女,研究方向为数学物理及偏微分方程,E-maill:1443773002@qq.com;**通信作者**:孙峪怀,教授,E-mail:sunyuhuai63@163.com
网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20170615.1123.004.html

述医疗超声波传播的重要模型，研究(1)式的精确解对理解复杂的超声波物理现象十分重要。Saha[8]应用首次积分法求得(1)式的精确解。本文拟采用扩展的(G'/G)方法[11]和分数阶复变换方法[12]相结合，以构建(1)式更丰富的精确解。

1 构建方法及过程描述

步骤 1，对于非线性分数阶偏微分方程

$$Q(u,u_x,u_{xx},u_y,u_{yy},u_z,u_t,D_t^{\alpha}u,D_x^{2\alpha}u,D_t^{3\alpha}u,\partial_z D_t^{\alpha}u,\cdots)=0,0<\alpha\leqslant 1, \tag{2}$$

其中，$D_t^{\alpha}u,D_x^{2\alpha}u,D_t^{3\alpha}u$ 是关于 u 的修改的 Riemann-Liouville 导数，$u=u(x,y,z,t)$是未知函数，Q 是 u 及 u 的关于 x,y,z,t 各阶偏导数的多项式。

对方程(2)作分数阶复变换：

$$u(x,y,z,t)=u(\xi),\xi=lx+my+kz+\frac{\lambda t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}, \tag{3}$$

其中，l,m,k,λ 为任意常数，(2)式转换为如下的常微分方程：

$$H(u,\lambda u',\lambda^2 u'',\lambda^3 u''',lu',l^2 u'',mu',m^2 u'',\cdots,k\lambda u'',\cdots)=0。 \tag{4}$$

步骤 2，假设方程(4)的解为：

$$u(\xi)=\sum_{i=0}^{m}a_i\left(\frac{G'}{G}\right)^i+\sum_{i=-m}^{-1}b_i\left(\frac{G'}{G}\right)^i, \tag{5}$$

其中，$G=G(\xi)$满足如下形式的常微分方程：

$$G''G=\tilde{\alpha}G'^2+\tilde{\beta}GG'+\tilde{\gamma}G^2。 \tag{6}$$

(5)，(6)式中的 $b_{-m},\cdots,a_0,\cdots,a_m,\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma}$ 为待定常数，正整数 m 由(4)式中平衡最高阶导数项和非线性项来确定。常微分方程(6)的解具有以下 3 种形式：

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{\tilde{\beta}^2+4\tilde{\gamma}-4\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}}}{2(1-\tilde{\alpha})}\left[\dfrac{C_1\sinh\left(\dfrac{\sqrt{\tilde{\beta}^2+4\tilde{\gamma}-4\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}}}{2}\xi\right)+C_2\cosh\left(\dfrac{\sqrt{\tilde{\beta}^2+4\tilde{\gamma}-4\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}}}{2}\xi\right)}{C_1\cosh\left(\dfrac{\sqrt{\tilde{\beta}^2+4\tilde{\gamma}-4\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}}}{2}\xi\right)+C_2\sinh\left(\dfrac{\sqrt{\tilde{\beta}^2+4\tilde{\gamma}-4\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}}}{2}\xi\right)}\right]+\\ \quad\dfrac{\tilde{\beta}}{2(1-\tilde{\alpha})},\text{当 }\tilde{\beta}^2-4(\tilde{\alpha}-1)\tilde{\gamma}>0,\tilde{\alpha}\neq 1\text{ 时},\\ \dfrac{\sqrt{4\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}-\tilde{\beta}^2-4\tilde{\gamma}}}{2(1-\tilde{\alpha})}\left[\dfrac{-C_1\sin\left(\dfrac{\sqrt{4\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}-\tilde{\beta}^2-4\tilde{\gamma}}}{2}\xi\right)+C_2\cos\left(\dfrac{\sqrt{4\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}-\tilde{\beta}^2-4\tilde{\gamma}}}{2}\xi\right)}{C_1\cos\left(\dfrac{\sqrt{4\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}-\tilde{\beta}^2-4\tilde{\gamma}}}{2}\xi\right)+C_2\sin\left(\dfrac{\sqrt{4\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}-\tilde{\beta}^2-4\tilde{\gamma}}}{2}\xi\right)}\right]+\\ \quad\dfrac{\tilde{\beta}}{2(1-\tilde{\alpha})},\text{当 }\tilde{\beta}^2-4(\tilde{\alpha}-1)\tilde{\gamma}<0,\tilde{\alpha}\neq 1\text{ 时},\\ \dfrac{1}{(1-\tilde{\alpha})}\left(\dfrac{C_1}{C_1\xi+C_2}+\dfrac{\tilde{\beta}}{2}\right),\text{当 }4(\tilde{\alpha}-1)\tilde{\gamma}-\tilde{\beta}^2=0,\tilde{\alpha}\neq 1\text{ 时}。\end{cases}$$

步骤 3，将(5)式代入(4)式，结合(6)式合并(G'/G)的相同幂次项，则方程(4)左端就变成一个关于(G'/G)的多项式，令该多项式的(G'/G)各阶幂次的系数为零。

步骤 4，求解上述以 $a_i(i=0,1,\cdots,m)$和 $b_i=(i=-m,\cdots,-1)$为未知量的代数方程组，并把得到的各组解连同(6)式的解代回(5)式就得到了(2)式的多个精确解。

2 KZK 方程的精确解

对方程(1)作行波变换(3)得到 $p(x,y,z,t)=u(\xi),\xi=lx+my+kz+\dfrac{\lambda\tau^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$。并对 ξ 积分两次，并令积分常数为零，可得：

$$\left[\frac{c_0}{2}(l^2+m^2)-k\lambda\right]u+\gamma\lambda^3u'+\lambda^2\beta u^2=0。\tag{7}$$

设方程(7)有类似(5)式的解,平衡(7)式中 $u'(\xi)$ 和 $u^2(\xi)$,有 $m=1$,于是方程(7)的解为:

$$u(\xi)=a_0+a_1\left(\frac{G'}{G}\right)+b_{-1}\left(\frac{G'}{G}\right)^{-1}。\tag{8}$$

经计算可得 $u'(\xi)$ 和 $u^2(\xi)$,且代入(8)式中,合并 $\left(\frac{G'}{G}\right)^i$,$i=0,1,2,\cdots$ 的相同幂次项,令各幂次的系数为零,得到关于 b_{-1},a_0,a_1 的代数方程组:

$$\begin{cases}\left(\frac{G'}{G}\right)^2:\gamma\lambda^3\left[a_1(\tilde{\alpha}-1)\right]+\lambda^2\beta a_1{}^2=0,\\ \left(\frac{G'}{G}\right):\left[\frac{c_0}{2}(l^2+m^2)-k\lambda\right]a_1+\gamma\lambda^3a_1\tilde{\beta}+2\lambda^2\beta a_0a_1=0,\\ \left(\frac{G'}{G}\right)^0:\left[\frac{c_0}{2}(l^2+m^2)-k\lambda\right]a_0+\gamma\lambda^3\left[a_1\tilde{\gamma}-b_{-1}(\tilde{\alpha}-1)\right]+\lambda^2\beta\left[a_0^2+2a_1b_{-1}\right]=0,\\ \left(\frac{G'}{G}\right)^{-1}:\left[\frac{c_0}{2}(l^2+m^2)-k\lambda\right]b_{-1}+\gamma\lambda^3(-b_{-1}\tilde{\beta})+2\lambda^2\beta a_0b_{-1}=0,\\ \left(\frac{G'}{G}\right)^{-2}:-\gamma\lambda^3b_{-1}\tilde{\gamma}+\lambda^2\beta b_{-1}^2=0。\end{cases}$$

解上述代数方程组,可得:

$$a_1=\frac{-\gamma\lambda(\tilde{\alpha}-1)}{\beta},a_0=\frac{k\lambda-\frac{c_0}{2}(l^2+m^2)-\gamma\lambda^3\tilde{\beta}}{2\lambda^2\beta},b_{-1}=0,k=\frac{c_0(l^2+m^2)}{2\lambda}+\frac{\gamma\lambda^2a_1\tilde{\gamma}}{a_0}+\lambda\beta a_0,$$

$$a_1=0,a_0=\frac{k\lambda-\frac{c_0}{2}(l^2+m^2)+\gamma\lambda^3\tilde{\beta}}{2\lambda^2\beta},b_{-1}=\frac{\gamma\lambda\tilde{\gamma}}{\beta},k=\frac{c_0(l^2+m^2)}{2\lambda}-\frac{\gamma\lambda^2b_{-1}\tilde{\alpha}}{a_0}+\frac{\gamma\lambda^2b_{-1}}{a_0}+\lambda\beta a_0。$$

情况 1,1) 当 $\tilde{\beta}^2+4\tilde{\gamma}-4\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}>0$ 时,方程(1)有双曲函数解:

$$u_1(\xi)=\frac{k\lambda-\frac{c_0}{2}(l^2+m^2)-\gamma\lambda^3\tilde{\beta}}{2\lambda^2\beta}-\frac{\gamma\lambda(\tilde{\alpha}-1)}{\beta}\frac{\sqrt{\tilde{\beta}^2+4\tilde{\gamma}-4\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}}}{2(1-\tilde{\alpha})}H_1,\tag{9}$$

其中,$H_1=\left[\frac{C_1\sinh\left(\frac{\sqrt{\tilde{\beta}^2+4\tilde{\gamma}-4\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}}}{2}\xi\right)+C_2\cosh\left(\frac{\sqrt{\tilde{\beta}^2+4\tilde{\gamma}-4\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}}}{2}\xi\right)}{C_1\cosh\left(\frac{\sqrt{\tilde{\beta}^2+4\tilde{\gamma}-4\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}}}{2}\xi\right)+C_2\sinh\left(\frac{\sqrt{\tilde{\beta}^2+4\tilde{\gamma}-4\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}}}{2}\xi\right)}\right]+\frac{\tilde{\beta}}{2(1-\tilde{\alpha})}$,$\xi=lx+my+kz+\frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$,$C_1,C_2$ 是任意的常数。

特别地,当(9)式中的 $C_2=0,C_1\neq0$ 时,$u_1(\xi)$ 简化为:

$$u_2(\xi)=\frac{k\lambda-\frac{c_0}{2}(l^2+m^2)-\gamma\lambda^3\tilde{\beta}}{2\lambda^2\beta}-\frac{\gamma\lambda(\tilde{\alpha}-1)}{\beta}\frac{\sqrt{\tilde{\beta}^2+4\tilde{\gamma}-4\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}}}{2(1-\tilde{\alpha})}H_2,$$

其中,$H_2=\tanh\left(\frac{\sqrt{\tilde{\beta}^2+4\tilde{\gamma}-4\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}}}{2}\xi\right)+\frac{\tilde{\beta}}{2(1-\tilde{\alpha})}$,$\xi=lx+my+kz+\frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$,$C_1,C_2$ 是任意的常数。

2) 当 $\tilde{\beta}^2+4\tilde{\gamma}-4\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}<0$ 时,方程(1)有三角形式解为:

$$u_3(\xi)=\frac{k\lambda-\frac{c_0}{2}(l^2+m^2)-\gamma\lambda^3\tilde{\beta}}{2\lambda^2\beta}-\frac{\gamma\lambda(\tilde{\alpha}-1)}{\beta}\frac{\sqrt{4\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}-\tilde{\beta}^2-4\tilde{\gamma}}}{2(1-\tilde{\alpha})}H_3,$$

其中，$H_3=\left[\dfrac{-C_1\sin\left(\dfrac{\sqrt{4\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}-\tilde{\beta}^2-4\tilde{\gamma}}}{2}\xi\right)+C_2\cos\left(\dfrac{\sqrt{4\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}-\tilde{\beta}^2-4\tilde{\gamma}}}{2}\xi\right)}{C_1\cos\left(\dfrac{\sqrt{4\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}-\tilde{\beta}^2-4\tilde{\gamma}}}{2}\xi\right)+C_2\sin\left(\dfrac{\sqrt{4\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}-\tilde{\beta}^2-4\tilde{\gamma}}}{2}\xi\right)}\right]+\dfrac{\tilde{\beta}}{2(1-\tilde{\alpha})}$，$\xi=lx+my+kz+\dfrac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$，$C_1$，$C_2$ 是任意的常数。

3）当 $\tilde{\beta}^2+4\tilde{\gamma}-4\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}=0$ 时，方程(1)的有理函数解为：

$$u_4(\xi)=\frac{k\lambda-\frac{c_0}{2}(l^2+m^2)-\gamma\lambda^3\tilde{\beta}}{2\lambda^2\beta}-\frac{\gamma\lambda(\tilde{\alpha}-1)}{\beta}\left[\frac{1}{(1-\tilde{\alpha})}\left(\frac{C_1}{C_1\xi+C_2}+\frac{\tilde{\beta}}{2}\right)\right],$$

其中，$\xi=lx+my+kz+\dfrac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$，$C_1$，$C_2$ 是任意的常数。

情况 2，1）当 $\tilde{\beta}^2+4\tilde{\gamma}-4\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}>0$ 时，方程(1)有如下的双曲函数解：

$$u_5(\xi)=\frac{k\lambda-\frac{c_0}{2}(l^2+m^2)+\gamma\lambda^3\tilde{\beta}}{2\lambda^2\beta}+\frac{\gamma\lambda\tilde{\gamma}}{\beta}H_4。\tag{10}$$

其中，$H_4=\left[\dfrac{C_1\sinh\left(\dfrac{\sqrt{\tilde{\beta}^2+4\tilde{\gamma}-4\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}}}{2}\xi\right)+C_2\cosh\left(\dfrac{\sqrt{\tilde{\beta}^2+4\tilde{\gamma}-4\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}}}{2}\xi\right)}{C_1\cosh\left(\dfrac{\sqrt{\tilde{\beta}^2+4\tilde{\gamma}-4\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}}}{2}\xi\right)+C_2\sinh\left(\dfrac{\sqrt{\tilde{\beta}^2+4\tilde{\gamma}-4\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}}}{2}\xi\right)}+\dfrac{\tilde{\beta}}{2(1-\tilde{\alpha})}\right]^{-1}$，$\xi=lx+my+kz+\dfrac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$，$C_1$，$C_2$ 是任意的常数。

特别地，当(10)式中的 $C_2=0$，$C_1\neq 0$ 时，$u_5(\xi)$ 简化为 $u_6(\xi)=\dfrac{k\lambda-\frac{c_0}{2}(l^2+m^2)+\gamma\lambda^3\tilde{\beta}}{2\lambda^2\beta}+\dfrac{\gamma\tilde{\lambda}\gamma}{\beta}H_5$，其中，$H_5=\left[\tanh\left(\dfrac{\sqrt{\tilde{\beta}^2+4\tilde{\gamma}-4\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}}}{2}\xi\right)+\dfrac{\tilde{\beta}}{2(1-\tilde{\alpha})}\right]^{-1}$，$\xi=lx+my+kz+\dfrac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$，$C_1$，$C_2$ 是任意的常数。

2）当 $\tilde{\beta}^2+4\tilde{\gamma}-4\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}<0$ 时，方程(1)有如下的三角形式解 $u_7(\xi)=\dfrac{k\lambda-\frac{c_0}{2}(l^2+m^2)+\gamma\lambda^3\tilde{\beta}}{2\lambda^2\beta}+\dfrac{\gamma\lambda\tilde{\beta}}{\beta}H_6$，其中，$H_6=\left[\dfrac{-C_1\sin\left(\dfrac{\sqrt{4\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}-\tilde{\beta}^2-4\tilde{\gamma}}}{2}\xi\right)+C_2\cos\left(\dfrac{\sqrt{4\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}-\tilde{\beta}^2-4\tilde{\gamma}}}{2}\xi\right)}{C_1\cos\left(\dfrac{\sqrt{4\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}-\tilde{\beta}^2-4\tilde{\gamma}}}{2}\xi\right)+C_2\sin\left(\dfrac{\sqrt{4\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}-\tilde{\beta}^2-4\tilde{\gamma}}}{2}\xi\right)}+\dfrac{\tilde{\beta}}{2(1-\tilde{\alpha})}\right]^{-1}$，$\xi=lx+my+kz+\dfrac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$，$C_1$，$C_2$ 是任意的常数。

3）当 $\tilde{\beta}^2+4\tilde{\gamma}-4\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}=0$ 时，方程(1)的有理函数解为：

$$u_8(\xi)=\frac{k\lambda-\frac{c_0}{2}(l^2+m^2)+\gamma\lambda^3\tilde{\beta}}{2\lambda^2\beta}+\frac{\gamma\lambda\tilde{\gamma}}{\beta}\left[\frac{1}{(1-\tilde{\alpha})}\left(\frac{C_1}{C_1\xi+C_2}+\frac{\tilde{\beta}}{2}\right)\right]^{-1}。$$

其中，$\xi=lx+my+kz+\dfrac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$，$C_1$，$C_2$ 是任意的常数。

3 结论

本文引入新的辅助微分方程(6)及展开式(5)式（当 $\tilde{\alpha}=0$，$\tilde{\beta}=-\lambda$，$\tilde{\gamma}=-\mu$ 时为文献[13]的辅助方程）。应用扩展的(G'/G)展开法，获得了分数阶 Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov 方程的精确解。这些精确解包括双

曲函数解、三角函数解和有理函数解。文献[10] 所得解为本文 $u_3(\xi)$的特例，$u_2(\xi)$，$u_4(\xi)$，$u_6(\xi)$，$u_7(\xi)$，$u_8(\xi)$是以往文献没有获得的解。此外，扩展的(G'/G)法具有一定的普适性，可应用到其他分数阶偏微分方程精确解的求解。

参考文献：

[1] ESLAMI M, VAJARGAH B F, Mirzazadeh M. Application of first integral method to fractional partial differential equations[J]. Indian Journal of Physics, 2014, 88(2): 177-184.

[2] LIU J C, HOU G L. Numerical solutions of the space-and-time-fractional coupled Burgers equations by generalized differential transform method[J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 217(16): 7001-7008.

[3] EMAD A B, ABDEL S, GAMAL H. Solutions to class of linear and nonlinear fractional differential equations[J]. Communications Theoretical Physics, 2016, 65(2): 127-135.

[4] OZKAN G, ESIN A, AHMET B. Different method for (3+1)-dimensional space-time fractional modified KdV-Zakharov-Kuznetsov equation[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2016, 71: 1259-1269.

[5] LIU P, ZENG B Q, YANG J R. Exact solutions and residual symmetries of the Ablowitz-Kaup-Newell-Segur system [J]. Chinese Physics B, 2015, 24(1): 010202-010208.

[6] WANG M L, LI X Z, ZHANG J. The (G'/G)-expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equation in mathematical physics[J]. Physics Letters A, 2008, 372(4): 417-423.

[7] ASLAN I. Travelling wave solutions for nonlinear differential-difference equations by the (G'/G) method[J]. Chinese Physics, 2016(65): 39-45.

[8] SAHA R A. New exact solutions of nonlinear fractional acoustic wave equations in ultrasound[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2016, 71: 859-868.

[9] JUMARIE G. Modified riemann-liouville derivative and fractional taylor series of non-differentiable functions further results[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2006, 51(9/10): 1367-1376.

[10] JUMARIE G. Fractional Hamilton-Jacobi equation for the optimal control of nonrandom fractional dynamics with fractional cost function[J]. Journal of Computational and Mathematics, 2007(23): 215-228.

[11] 尹君毅. 扩展的(G'/G)展开法和 ZaKharov 方程组的新精确解[J]. 物理学报, 2013, 62(20): 200202-200205.
YIN J Y. Extended expansion method for (G'/G) and new exact solutions of Zakharov equations[J]. Journal of Physics, 2013, 62(20): 200202-200206.

[12] LI Z B, HE J H. Fractional complex transform for fractional differential equations[J]. Mathematical and Computational Applications, 2010, 15(5): 970-973.

[13] 李钊，孙峪怀，黄春. 修改的(G'/G)-展开法与三阶非线性波动方程的精确解[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2016, 39(2): 180-184.
LI Z, SUN Y H, HUANG C. The modified (G'/G)-expansion method and new exact solutions of nonlinear wave equation[J]. Journal of Sichuan Normal University (Natural Science), 2016, 39(2): 180-184.

The Construction of New Exact Solutions for Fractional Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov Equation

ZHANG Xue, SUN Yuhuai, HONG Yun, JIANG Lin

(College of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, China)

Abstract: [**Purposes**] The exact solutions of fractional Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov equation are constructed. [**Methods**] Combined with the modified Riemann-Liouville derivative, the exact solutions of equation are obtained by the extended (G'/G)-expansion method which add negative power exponent and new auxiliary equation. [**Findings**] The new exact solutions contain hyperbolic function solution, trigonometric function solution and rational function solution. [**Conclusions**] The more exact solutions of equation are obtained.

Keywords: extended (G'/G)-expansion method; fractional Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov equation; exact solutions

(责任编辑 黄 颖)