DOI:10.11721/cqnuj20170406

Orlicz 曲率像*

谷伟平[1], 曾春娜[2], 杨 林[3]
(1. 重庆人文科技学院 机电与信息工程学院, 重庆 401524; 2. 重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331;
3. 西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715)

摘要:【目的】把 L_p 中的 p-曲率像推广为 Orlicz 曲率像。【方法】应用凸几何分析。【结果】对 Orlicz 曲率函数进行定义,并推广了 Orlicz 混合体积。【结论】得到 Orlicz 曲率像的仿射不变性等一些重要性质及关于 Orlicz 曲率像的几个不等式,特殊情形为 Lutwak 得到的 L_p 中的相应结果。

关键词: Orlicz;混合体积;对偶混合体积;曲率像;表面积测度
中图分类号:O186.5　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2017)05-0077-04

Peety[1-2]首先研究的曲率像逐渐发展为凸几何中一种非常重要的几何量,它涉及的曲率像不等式与 Blaschke-Santalo 不等式是凸体理论中很重要的仿射等周不等式。该几何量定义为:设 K 为 $\mathbf{R}^n$ 中的凸体,则 K 的曲率函数 $f(K,\cdot):S^{n-1}\to\mathbf{R}$ 定义为 $f(K,\cdot)=\dfrac{\mathrm{d}S(K,\cdot)}{\mathrm{d}S}$,其中,$S(K,\cdot)$为 K 在单位球面 S^{n-1} 上的表面积测度,S 为 S^{n-1} 上的 Lebesgue 测度。

设 K 为质心在原点的星体,则 K 的曲率像 ΛK 定义为[3]:

$$f(\Lambda K,\cdot)=\frac{\omega_n}{V(K)}\rho(K,\cdot)^{n+1}。\tag{1}$$

其中,ω_n 为 $\mathbf{R}^n$ 中单位球的体积,$V(K)$为 K 的体积,$\rho(K,\cdot)$为 K 的径向函数。

由(1)式定义的曲率像 ΛK 是质心在原点的具有正连续曲率函数的凸体的集合,且(1)式被 Lutwak[4]稍有差别地推广到 L_p 空间中,即对于 $p\geqslant 1$ 及有正曲率函数的且包含原点在其内部的凸体 K,其 p-曲率像 $\Lambda_p K$ 定义为[4]:

$$f_p(K,\cdot)=\frac{\omega_n}{V(\Lambda_p K)}\rho(\Lambda_p K,\cdot)^{n+p}。\tag{2}$$

其中,K 的 p-曲率函数 $f_p(K,\cdot):S^{n-1}\to\mathbf{R}$ 为:

$$f_p(K,\cdot)=\frac{\mathrm{d}S_p(K,\cdot)}{\mathrm{d}S}。\tag{3}$$

这里 $S_p(K,\cdot)$为 K 在 S^{n-1} 上的 p-表面积测度,且有 Radon-Nikodym 导数 $\dfrac{\mathrm{d}S_p(K,\cdot)}{\mathrm{d}S(K,\cdot)}=h(K,\cdot)^{1-p}$。其中,$h(K,\cdot)$为 K 的支持函数。

本文考虑 Orlicz 空间中的曲率像。

设 $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$是凸的、严格递增且 $\varphi(0)=0$ 的一类函数。对包含原点在其内部的凸体 K,文献[5]给出了 Orlicz 表面积测度的定义,其中蕴涵了:

$$\frac{\mathrm{d}S_\varphi(K,\cdot)}{\mathrm{d}S}=\varphi\left(\frac{1}{h(K,\cdot)}\right)h(K,\cdot)f(K,\cdot)。\tag{4}$$

若 K 还具有正的曲率函数,则定义 Orlicz 曲率函数为:

$$f_\varphi(K,\cdot)=\frac{\mathrm{d}S_\varphi(K,\cdot)}{\mathrm{d}S}。\tag{5}$$

* **收稿日期:**2016-05-26　**修回日期:**2017-07-22　**网络出版时间:**2017-05-16 11:27
资助项目:重庆人文科技学院教改项目(No.15CRKXJ05);重庆市教委科学技术研究项目(No.KJ1500312);重庆师范大学基金项目(No.14XYY028)
第一作者简介:谷伟平,女,讲师,研究方向为凸几何分析和代数学,E-mail:weipinggu913@163.com;**通信作者:**曾春娜,副教授,E-mail:zengchn@163.com
网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20170516.1127.092.html

若 $\varphi(t)=t^p$,$1\leqslant p<\infty$,则 Orlicz 曲率函数即为(3)式中的 p-曲率函数。

利用 Orlicz 曲率函数,定义 Orlicz 曲率像 $\Lambda_\varphi K$ 为:

$$f_\varphi(K,\cdot)=\frac{\omega_n}{V(\Lambda_\varphi K)}\varphi(\rho(\Lambda_\varphi K,\cdot))\rho(\Lambda_\varphi K,\cdot)^n,\tag{6}$$

这样定义的 $\Lambda_\varphi K$ 是包含原点在内部的星体,且若 $\varphi(t)=t^p(1\leqslant p<\infty)$,则 Orlicz 曲率像为(2)式。

设 Φ 为满足以上条件且使得$\frac{\varphi(a)}{\varphi(b)}=\frac{\varphi(ac)}{\varphi(bc)}(c>0)$成立的所有 φ 的集合。本文首先推广了 Orlicz 混合体积的定义[6-7],得到定义 1。对于 $\varphi\in\Phi$,给出了这类混合体积与 Orlicz 对偶混合体积及 Orlicz 曲率像三者之间的关系(定理 1),证明了 Orlicz 曲率像的唯一性(定理 2),最后得到了关于 Orlicz 曲率像的仿射性质(定理 3 或它的等价形式定理 4)和几个不等式(定理 5 与定理 6)。若 $\varphi(t)=t^p(1\leqslant p<\infty)$,以上结果为 Lutwak 在文献[4]得到的结果。

1 预备知识

本文设 K^n 为 $\mathbf{R}^n$ 中凸体(紧致、有非空内点的凸集)的集合,K_o^n 为 K^n 中包含原点的凸体的集合,K_c^n 为 K^n 中质心在原点的凸体的集合,F_o^n 为 K_o^n 中有正曲率函数的凸体的集合,F_c^n 为 F_o^n 中质心在原点的凸体的集合,S_o^n 为 $\mathbf{R}^n$ 中包含原点的星体的集合,S^{n-1}为 $\mathbf{R}^n$ 中的单位球面。

凸体 K 的支持函数 $h(K,\cdot):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 定义为 $h(K,x)=\max\{x\cdot y:y\in K\}$,其中 $x\in\mathbf{R}^n$,$x\cdot y$ 为标准内积。若$A\in SL(n)$,则支持函数有性质 $h(AK,u)=h(K,A^tu)$。

Orlicz 空间中的混合体积在文献[6-7]中定义为:

$$V_\varphi(K,L)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\varphi\left(\frac{h(L,u)}{h(K,u)}\right)h(K,u)\mathrm{d}S(K,u)。\tag{7}$$

其中 $S(K,\cdot)$为 K 在 S^{n-1}上 的 Aleksandrov-Fenchel-Jessen 表面积测度,定义为:

$$S(K,\omega)=\int_{x\in\partial K,v(x)\in\omega}\mathrm{d}S(x),\tag{8}$$

其中 $\omega\subset S^{n-1}$,$v(x)$为 K 在 x 点处的单位外法向量。

对偶混合体积理论中一个基本的概念是紧星集 K 的径向函数$\rho(K,\cdot):\mathbf{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$,对任意的 $x\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$ 其定义为$\rho(K,x)=\max\{\lambda\geqslant 0:\lambda x\in K\}$。若 $\rho(K,\cdot)$是正的连续函数,则称 K 是一星体。若 $A\in SL(n)$,则有

$$\rho(AQ,u)=\rho(Q,A^{-1}u)。\tag{9}$$

设 $\varphi\in\Phi$,$\varphi(t)=\varphi\left(\frac{1}{t}\right)$,则 Orlicz 空间中的对偶混合体积可定义为:

$$\widetilde{V}_\varphi(K,L)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\varphi\left(\frac{\rho(L,u)}{\rho(K,u)}\right)\rho(K,u)^n\mathrm{d}S(u)。\tag{10}$$

对偶 Orlicz 混合体积有很多好的性质,如对偶 Orlicz 混合体积的仿射不变性[8],$A\in SL(n)$,有:

$$\widetilde{V}_\varphi(AK,AL)=\widetilde{V}_\varphi(K,L),\tag{11}$$

及唯一性定理。

引理 1[8] 设 $\varphi\in\Phi$ 与 $\mu\subset S_o^n$,且 $K,L\in\mu$。若对所有的 $Q\in\mu$ 均有$\frac{\widetilde{V}_\varphi(K,Q)}{V(K)}=\frac{\widetilde{V}_\varphi(L,Q)}{V(L)}$,则 $K=L$。

设 $K\in\kappa_o^n$,则 K 的极体 K^* 定义为 $K^*=\{x\in\mathbf{R}^n:x\cdot y\leqslant 1$,对所有 $y\in K\}$。若 $A\in SL(n)$,则有$(AK)^*=A^{-t}K^*$。对 $K\in\kappa_o^n$,则有 $K^{**}=K$,且:

$$h(K^*,\cdot)=\frac{1}{\rho(K,\cdot)}。\tag{12}$$

一个重要的仿射等周不等式是 Blaschke-Santalo 不等式[9]:对 $K\in\kappa_o^n$,有:

$$V(K)V(K^*)\leqslant w_n^2,\tag{13}$$

当且仅当 K 为椭球时等号成立。

当 $A\in SL(n)$,$K\in F_o^n$ 时,K 的曲率函数满足[9] $f(AK,u)=f(K,A^tu)$。

2 主要结论

首先,推广 Orlicz 混合体积定义为以下定义。

定义 1　若 $K\in\kappa_o^n$，$Q\in S_o^n$，则定义：

$$V_\varphi(K,Q^*)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\varphi\left(\frac{1}{h(K,u)\rho(Q,u)}\right)h(K,u)\,\mathrm{d}S(K,u)。\tag{14}$$

当 $Q\in\kappa_o^n$ 时，由(12)式与 $K^{**}=K$ 知(14)式即为(10)式。

定理 1　设 $\varphi\in\Phi$ 与 $K\in F_o^n$，则对于所有 $Q\in S_o^n$ 有：

$$V_\varphi(K,Q^*)=\frac{w_n}{V(\Lambda_\varphi K)}\widetilde{V}_\varphi(\Lambda_\varphi K,Q)。\tag{15}$$

证明　由(14)式及(4)式可得

$$V_\varphi(K,Q^*)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\frac{\varphi\left(\frac{1}{h(K,u)\rho(Q,u)}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{h(K,u)}\right)}\mathrm{d}S_\varphi(K,u)。\tag{16}$$

结合(5)式，(6)式及(16)式有

$$V_\varphi(K,Q^*)=\frac{w_n}{nV(\Lambda_\varphi K)}\int_{S^{n-1}}\frac{\varphi\left(\frac{1}{h(K,u)\rho(Q,u)}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{h(K,u)}\right)}\varphi(\rho(\Lambda_\varphi K,\cdot))\rho(\Lambda_\varphi K,\cdot)^n\,\mathrm{d}S(u)。\tag{17}$$

由于$\frac{\varphi(a)}{\varphi(b)}=\frac{\varphi(ac)}{\varphi(bc)}$ $(c>0)$及 $\varphi(t)=\varphi\left(\frac{1}{t}\right)$知(17)式可化简为：

$$V_\varphi(K,Q^*)=\frac{w_n}{nV(\Lambda_\varphi K)}\int_{S^{n-1}}\varphi\left(\frac{\rho(Q,u)}{\rho(\Lambda_\varphi K,u)}\right)\rho(\Lambda_\varphi K,u)^n\,\mathrm{d}S(u)。$$

再由(10)式可知上式即为所证结论。　　证毕

结合引理 1 得如下定理。

定理 2　设 $\varphi\in\Phi$ 与 $K\in F_o^n$，若对于所有 $Q\in S_o^n$ 有

$$V_\varphi(K,Q^*)=\frac{w_n}{V(L)}\widetilde{V}_\varphi(L,Q),\tag{18}$$

则 $L=\Lambda_\varphi K$。

证明　由(18)式及(15)式可得$\frac{\widetilde{V}_\varphi(\Lambda_\varphi K,Q)}{V(\Lambda_\varphi K)}=\frac{\widetilde{V}_\varphi(L,Q)}{V(L)}$，又由引理 1 知 $L=\Lambda_\varphi K$。　　证毕

为了证明 Orlicz 曲率像的仿射性质，给出以下两个引理。

引理 2　设函数 $f,g:\mathbf{R}^n\backslash\{0\}\rightarrow(0,\infty)$为连续函数，$A\in SL(n)$。若 f 为 0 阶齐次，g 为 $-n$ 阶齐次的，则：

$$\int_{S^{n-1}}f(u)g(Au)\,\mathrm{d}S(u)=\int_{S^{n-1}}f(A^{-1}u)g(u)\,\mathrm{d}S(u)。\tag{19}$$

证明　令 $\varphi(t)=\varphi\left(\frac{1}{t}\right)\in\Phi$，$K,L\in S_o^n$，且 $f(u)=\varphi\left(\frac{\rho(L,u)}{\rho(A^{-1}K,u)}\right)$，$g(u)=\rho(K,u)^n$。

由对偶混合体积(10)式有

$$\widetilde{V}_\varphi(A^{-1}K,L)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\varphi\left(\frac{\rho(L,u)}{\rho(A^{-1}K,u)}\right)\rho(K,A^{-1}u)^n\,\mathrm{d}S(u)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\varphi\left(\frac{\rho(L,u)}{\rho(A^{-1}K,u)}\right)\rho(K,Au)^n\,\mathrm{d}S(u),$$

及

$$\widetilde{V}_\varphi(K,AL)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\varphi\left(\frac{\rho(AL,u)}{\rho(K,u)}\right)\rho(K,u)^n\,\mathrm{d}S(u)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\varphi\left(\frac{\rho(L,A^{-1}u)}{\rho(K,u)}\right)\rho(K,u)^n\,\mathrm{d}S(u)。$$

由对偶 Orlicz 混合体积的仿射不变性(11)式知(19)式成立。　　证毕

引理 3　设 $K\in F_o^n$，$Q\in S_o^n$ 与 $A\in SL(n)$，则 $V_\varphi(AK,Q^*)=V_\varphi(K,(A^tQ)^*)$。

证明　假设 $K\in F_o^n$，由(9)式及支持函数的性质 $h(AK,u)=h(K,A^tu)$可得：

$$V_\varphi(AK,Q^*)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\varphi\left(\frac{1}{h(K,A^tu)\rho(Q,u)}\right)h(K,A^tu)f(K,A^tu)\,\mathrm{d}S(u)。$$

又由(14)式及(9)式有 $V_\varphi(K,(A^tQ)^*)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\varphi\left(\frac{1}{h(K,u)\rho(A^{-t}Q,u)}\right)h(K,u)f(K,u)\,\mathrm{d}S(u)$。

由引理 2 知对于 $K\in F_o^n$ 有 $V_\varphi(AK,Q^*)=V_\varphi(K,(A^tQ)^*)$ 成立。对任一 $K\in K_o^n$，可取一列 $K_i\in F_o^n$，使得 $K_i\to K$。再由混合体积的连续性知结论成立。 证毕

定理 3 设 $\varphi\in\Phi$，$K\in F_o^n$ 与 $A\in SL(n)$，则 $\Lambda_\varphi AK=A^{-t}\Lambda_\varphi K$。

证明 设 $Q\in S_o^n$，由引理 3，定理 1 及(11)式知 $V_\varphi(AK,Q^*)=\dfrac{\omega_n}{V(A^{-t}\Lambda_\varphi K)}\widetilde{V}_\varphi(A^{-t}\Lambda_\varphi K,Q)$。由定理 1 知 $V_\varphi(AK,Q^*)=\dfrac{\omega_n}{V(\Lambda_\varphi AK)}\widetilde{V}_\varphi(\Lambda_\varphi AK,Q)$。以上两式结合定理 2 可知 $\Lambda_\varphi AK=A^{-t}\Lambda_\varphi K$。 证毕

由 $(AK)^*=A^{-t}K^*$ 知定理 3 等价于以下定理。

定理 4 设 $\varphi\in\Phi$，$K\in F_o^n$ 与 $A\in SL(n)$，则 $\Lambda_\varphi^* AK=\Lambda_\varphi K$。

定理 5 设 $\varphi\in\Phi$ 与 $K\in F_o^n$，则 $\dfrac{V(K)}{\omega_n}\geqslant\varphi\left(\left(\dfrac{V(\Lambda_\varphi K)}{V(K^*)}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$，等号成立当且仅当 K^* 与 $\Lambda_\varphi K$ 位似。

证明 在(15)式中令 $Q=K^*$ 得 $V(K)=\dfrac{\omega_n}{V(\Lambda_\varphi K)}\widetilde{V}_\varphi(\Lambda_\varphi K,K^*)$。

由对偶 Orlicz 混合体积不等式(10)式知 $V(K)\geqslant\omega_n\varphi\left(\left(\dfrac{V(K^*)}{V(\Lambda_\varphi K)}\right)^{\frac{1}{n}}\right)=\omega_n\varphi\left(\left(\dfrac{V(\Lambda_\varphi K)}{V(K^*)}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$，等号成立当且仅当 K^* 与 $\Lambda_\varphi K$ 位似。 证毕

由 Blaschke-Santalo 不等式(13)式及定理 5 得以下定理。

定理 6 设 $\varphi\in\Phi$ 与 $K\in F_c^n$，则 $\dfrac{\omega_n}{V(K^*)}\geqslant\varphi\left(\left(\dfrac{V(\Lambda_\varphi K)}{V(K^*)}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$，等号成立当且仅当 K 为一椭球。

参考文献：

[1] PEETY C M. Isoperimetric problems[C]. Proceedings of a conference on convexity and combinatorial geometry. Oklahoma: University of Oklahoma, 1967: 234-241.

[2] PEETY C M. Geominimal surface area[J]. Geom Dedicata, 1973, 3(1): 77-97.

[3] LUTWAK E. Extended affine surface area[J]. Adv Math, 1991, 85(1): 39-68.

[4] LUTWAK E. The Brunn-Minkowski-Firey theory II: affine and geominimal surface areas[J]. Adv Math, 1996, 118(2): 244-294.

[5] ZOU D, XIONG G. The minimal Orlicz surface area[J]. Adv Appl Math, 2014, 61(c): 25-45.

[6] GARDNER R, HUG D, WEIL W. The Orlicz-Brunn-Minkowski theory: a general framework, additions, and inequalities[J]. J Differential Geom, 2014, 97(3): 427-476.

[7] XI D, JIN H, LENG G. The Orlicz Brunn-Minkowski inequality[J]. Adv Math, 2014, 260: 350-374.

[8] ZHU B, ZHOU J, XU W. Dual Orlicz-Brunn-Minkowski theory[J]. Adv Math, 2014, 264: 700-725.

[9] GARDNER R. Geometric Tomography[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

Orlicz Curvature Images

GU Weiping[1], ZENG Chunna[2], YANG Lin[3]

(1. College of Electromechanical and Information Engineering, Chongqing College of Humanities Science and Technology, Chongqing 401524; 2. College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331; 3. School of Mathematics and Statistic, Southwest University, Chongqing 400715, China)

Abstract: [**Purposes**] To investigate the curvature image is to generalize the p-curvature image in L_p to Orlicz curvature image. [**Methods**] Convex geometric analysis, it introduces the concept of Orlicz curvature functions and generalize the Orlicz mixed volume. [**Findings**] Obtain some important properties including affine invariant and inequalities of Orlicz curvature image. [**Conclusions**] As their special cases, some Lutwak's results in L_p is obtained.

Key words: Orlicz; mixed volume; dual mixed volume; curvature image; surface area measure

(责任编辑 许 甲)