2016 年度重庆市出版专项基金资助栏目　　DOI:10.11721/cqnuj20170604

运筹学与控制论

多目标优化中一类鲁棒有效解的最优性充分条件*

李艳艳，朱　巧，赵克全
(重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331)

摘要:【目的】对多目标优化问题鲁棒有效解及一些相关性质进行讨论。【方法】利用 Clarke 方向导数意义下的线性化锥对带不等式约束的非光滑多目标优化问题中一类鲁棒有效解进行讨论,并举例进行说明。【结果】得到了该问题的一些最优性充分条件。【结论】所得的主要结果对最近一些研究工作做了改进与推广。

关键词:非光滑多目标优化;最优性条件;鲁棒有效解;线性化锥

中图分类号:O220.6　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2017)06-0011-04

多目标优化理论与方法在经济管理、交通运输、生态保护、工程设计与生产管理等诸多领域中都有着十分重要且广泛的应用。近些年来,目标优化理论与方法研究已成为国际最优化领域中的研究热点之一。关于多目标优化问题的研究已有大量成果[1-3]。

最近,关于确定型多目标优化问题的各类鲁棒解及其性质以及不确定型多目标优化问题的鲁棒解及其性质研究已经引起了一些学者的关注,并取得了一些研究成果[4-8]。特别地,2012 年,Kuroiwa 和 Lee[4]考虑了目标函数和约束函数都含不确定信息的多目标优化问题,提出了这类不确定多目标优化问题的鲁棒对应形式,进而提出了鲁棒有效解、鲁棒弱有效解、鲁棒真有效解的概念,研究了鲁棒真有效解和鲁棒弱有效解的一些标量化结果。2014 年,Ehrgott 等人[5]从不同的角度定义了鲁棒弱有效解、鲁棒有效解和鲁棒严格有效解的概念,并将处理确定型多目标优化问题的线性加权标量化方法和-约束法推广到不确定多目标优化问题,并进一步研究了这些鲁棒解的性质。

关于确定型多目标优化问题的各类鲁棒解及其性质研究,2013 年,Georgiev 等人[9]考虑了线性多目标优化问题,提出了鲁棒有效解的概念并建立了鲁棒有效解的充分必要条件。2015 年,Zamani 等人[10]提出了一类新的鲁棒有效解和鲁棒真有效解的概念,研究了带不等式约束的非光滑多目标优化问题的鲁棒有效解和鲁棒真有效解的一些最优性必要条件和充分条件,并讨论了这类鲁棒有效解与其他几类鲁棒有效解之间的一些关系。

此外,线性化锥已被广泛应用于处理多目标优化问题,特别是在建立多目标优化问题各类解的最优性条件方面具有重要作用[11-13]。特别地,2015 年,Zhao[12]利用 Clarke 广义方向导数提出了非光滑意义下的线性化锥,进而建立了一类带不等式约束的非光滑多目标优化问题有效解与真有效解的最优性条件。

受文献[10-13]中研究工作的启发,本文利用 Clarke 广义方向导数意义下的线性化锥研究了带不等式约束的非光滑多目标优化问题一类鲁棒有效解的一些最优性充分条件,并给出了一些具体例子对主要结果进行了解释。

1 预备知识

设 $\mathbf{R}^n$ 表示 n 维欧氏空间且 $A\subset\mathbf{R}^n$。则 A 的锥包,代数内部和凸包分别定义为:

$$\mathrm{cone}A=\{\lambda a\,|\,\lambda\geqslant 0,a\in A\},\mathrm{core}A=\{x\in A\mid\forall\, y\in\mathbf{R}^n,\exists\,\lambda>0,x+\lambda y\in A\},$$

$$\mathrm{conv}A=\left\{x\in\mathbf{R}^n\,|\,m\in\mathbf{N},x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i,\lambda_i\in[0,1],y_i\in A,\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1\right\}。$$

记 $P_{\mathrm{pos}}(A)=\left\{y\in\mathbf{R}^n\mid\exists\, m\in\mathbf{N},y=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i y_i,\lambda_i\geqslant 0,y_i\in A\right\}$。若 $A_i\in\mathbf{R}^n(i=1,\cdots,l)$ 是凸集,则

* **收稿日期**:2017-02-18　**修回日期**:2017-06-05　**网络出版时间**:2017-11-10 15:40
资助项目:国家自然科学基金(No.11431004;No.11671062;No.11271391);重庆市基础与前沿研究计划项目(No.cstc2015jcyjA00027);重庆市教委科学技术研究项目(No.KJ1500303)
第一作者简介:李艳艳,女,研究方向为多目标优化理论与方法,E-mail: mathyanyanl@163.com;**通信作者**:赵克全,教授,E-mail:kequanz@163.com
网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20171110.1540.036.html

$P_{\rm pos}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{l}A_i\right)=\left\{\sum\limits_{i=1}^{l}\lambda_i d_i \mid d_i\in A,\lambda_i\geqslant 0,i=1,\cdots,l\right\}$。

A 在 $\bar{x}$ 处的切锥定义为 $T(A,\bar{x})=\left\{d\in\mathbf{R}^n\mid \exists(\{x_i\}\subseteq A,\{t_i\}\subseteq\mathbf{R});x_i\to\bar{x},t_i\downarrow 0,\dfrac{x_i-\bar{x}}{t_i}\to d\right\}$。

定义 1[14] 设 $f:\mathbf{R}^n\mapsto\mathbf{R}$ 在 $x\in\mathbf{R}^n$ 附近是局部 Lipschitz 的。f 在 x 处沿方向 v 的广义方向导数 $f^\circ(x,v)$ 和 f 在 x 处的广义梯度集分别定义为:

$$f^\circ(x,v):=\limsup_{y\to x,t\downarrow 0}\frac{f(y+tv)-f(y)}{t},\partial f(x)=\{\zeta\in\mathbf{R}^n\mid f^\circ(x,v)\geqslant\zeta^{\mathrm T}v,\forall v\in\mathbf{R}^n\}。$$

定义 2[14] 设 $h:\mathbf{R}^n\mapsto\mathbf{R}$,如果对任意的 $d\in\mathbf{R}^n$,$h^\circ(\bar{x},d)$存在且 $h^\circ(x,v)=\lim\limits_{t\downarrow 0}\dfrac{h(\bar{x}+td)-h(\bar{x})}{t}$,则称函数 h 在 $\bar{x}$ 处是正则的。

定义 3[15] 设 $f:\mathbf{R}^n\mapsto\mathbf{R}$ 是拟凸的,若对任意的 $x,y\in\mathbf{R}^n$,$\lambda\in[0,1]$,有:

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\max\{f(x),f(y)\}。$$

本文考虑如下带不等式约束的多目标优化问题:

$$\begin{aligned}&(\mathrm{MOP})\ \min f(x),\\&\qquad\text{s.t. } g_j(x)\leqslant 0,j\in J=\{1,\cdots,m\},x\in X\subseteq\mathbf{R}^n。\end{aligned}$$

其中 $f(x)=(f_1(x),\cdots,f_p(x))$。$X$ 是非空闭凸集且 f_i 与 g_i 是局部 Lipschitz 的。可行集 Ω 和起作用约束指标集 $I(\bar{x})$分别记为 $\Omega=\{x\in X\mid g_j(x)\leqslant 0,j\in J\}$,$I(\bar{x})=\{j\in J\mid g_i\leqslant 0\}$,$\bar{x}\in\Omega$。

定义 4[1] 称 $\bar{x}\in\Omega$ 是(MOP)的有效解,若不存在 $x\in\Omega$ 使得 $f(x)\leqslant f(\bar{x})$且 $f(x)\neq f(\bar{x})$。

定义 5[10] 设 $\bar{x}\in\Omega$ 是(MOP)的有效解,称 $\bar{x}$ 是(MOP)的鲁棒有效解,如果存在 $\varepsilon>0$ 使得对任意满足 $\|\boldsymbol{C}\|<\varepsilon$的 $p\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{C}$,$\bar{x}$ 均是下面问题的有效解

$$\begin{aligned}&\min f(x)+Cx,\\&\text{s.t. } g_j(x)\leqslant 0,j\in J,x\in X。\end{aligned}$$

2 主要结果

Zhao[12]利用 Clarke 广义方向导数定义了如下形式的线性化锥:

$$L(M(\bar{x}),\bar{x})=\{d\in T(X,\bar{x})\mid\partial f_i(\bar{x})^{\mathrm T}d\leqslant 0,i\in\{1,2,\cdots,p\},\partial g_j(\bar{x})^{\mathrm T}d\leqslant 0,j\in I(\bar{x})\},$$

其中 $M(\bar{x})=\bigcap\limits_{i=1}^{p}M^i(\bar{x})$,$M^i(\bar{x})=\{x\in\mathbf{R}^n\mid g_j(x)\leqslant 0,j\in J,f_i(x)\leqslant f_i(\bar{x})\}$,$i=1,\cdots,p$。

为了建立本文的主要结果,首先给出下面的引理。

引理 1[13] 设 $f:\mathbf{R}^n\mapsto\mathbf{R}$ 在 y 处局部 Lipschitz 且正则。如果 f 是拟凸,则对任意的 $x\in\mathbf{R}^n$,$f(x)\leqslant f(y)\Rightarrow\xi^{\mathrm T}(x-y)\leqslant 0,\forall\xi\in\partial f(y)$。

引理 2[13] 设 $f_i(i=1,2,\cdots,p)$和 $g_i(j\in J)$在 $\bar{x}$ 处局部 Lipschitz 且正则。若 f_i 和 g_i 是拟凸的且 $L(M(\bar{x}),\bar{x})=0$,则 $\bar{x}\in\Omega$ 是(MOP)的有效解。

引理 3 设 $f_i(i=1,2,\cdots,p)$和 $g_j(j\in J)$在 $\bar{x}\in\Omega$ 处局部 Lipschitz。记

$$P=P_{\rm pos}\left(\bigcup_{i=1}^{p}\partial f_i(\bar{x})\right)+P_{\rm pos}\left(\bigcup_{j\in I(\bar{x})}\partial g_j(\bar{x})\right),Q=\mathrm{cone}\left(\mathrm{conv}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{p}\partial f_i(\bar{x})\right)\cup\left(\bigcup_{j\in I(\bar{x})}\partial g_j(\bar{x})\right)\right)\right)。$$

则 $P=\mathbf{R}^n\Leftrightarrow 0\in\mathrm{core}(\mathrm{cl}Q)$。

证明 先证 $P=Q$。对 $\forall x\in P$,由 P 的定义可知,存在

$$y\in P_{\rm pos}\left(\bigcup_{i=1}^{p}\partial f_i(\bar{x})\right),z\in P_{\rm pos}\left(\bigcup_{j\in I(\bar{x})}\partial g_j(\bar{x})\right),$$

使得 $x=y+z$。进而存在 $d_i\in\partial f_i(\bar{x})$,$d'_j\in\partial g_j(\bar{x})$,$\lambda_i\geqslant 0$,$\mu_j\geqslant 0$ 使得 $x=\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i d_i+\sum\limits_{j\in I(\bar{x})}\mu_j d'_j=\sum\lambda'_i v_i$,其中 $\lambda'_i\geqslant 0$,$v_i\in\partial f_i(\bar{x})\cup\partial g_i(\bar{x})$。故 $x\in Q$,即 $P\subseteq Q$。

反之,对 $\forall x\in Q$,由 Q 的定义可知,存在 $\lambda\geqslant 0$,$y\in\mathrm{conv}\left(\left(\bigcup\limits_{i=1}^{p}\partial f_i(\bar{x})\right)\cup\left(\bigcup\limits_{j\in I(\bar{x})}\partial g_j(\bar{x})\right)\right)$使得 $x=\lambda y$。进而存在 $y'\in\bigcup\limits_{i=1}^{p}\partial f_i(\bar{x})$,$y''\in\bigcup\limits_{j\in I(\bar{x})}\partial g_j(\bar{x})$ 使得 $x=\lambda\sum_i\omega'_i y'_i+\sum_i\omega''_i y''_i$,其中 $\omega_i,\omega''_i\geqslant 0$ 且 $\sum_i\omega'_i+$

$\sum_i \omega''_i = 1$。故 $x \in P$，即 $Q \subseteq P$。

下面证 $P = \mathbf{R}^n \Leftrightarrow 0 \in \mathrm{core}(\mathrm{cl}Q)$。事实上，$P = \mathbf{R}^n \Leftrightarrow Q = \mathbf{R}^n \Leftrightarrow \mathrm{cl}Q = \mathbf{R}^n \Leftrightarrow 0 \in \mathrm{core}(\mathrm{cl}Q)$。　证毕

定理 1　设 $f_i(i=1,2,\cdots,p)$ 和 $g_j(j\in J)$ 在 $\bar{x}\in\Omega$ 处局部 Lipschitz 且正则。若 f_i 是凸函数，g_j 是拟凸函数且 $L(M(\bar{x}),\bar{x})=0$，则 $\bar{x}\in\Omega$ 是(MOP)的鲁棒有效解。

证明　因为 $L(M(\bar{x}),\bar{x})=0$，所以由引理 2 可知 $\bar{x}$ 是(MOP)的有效解。若 $\bar{x}$ 不是(MOP)的鲁棒有效解，则对任意的 $\varepsilon>0$ 存在 $p\times n$ 阶矩阵列 $\{C_i\}$ 满足 $\|C_i\|<\varepsilon$ 和 $\{x_i\}\in\Omega\setminus\{\bar{x}\}$ 使得：

$$f(x_i)+C_ix_i \leqslant f(\bar{x})+C_i\bar{x} \text{ 且 } f(x_i)+C_ix_i \neq f(\bar{x})+C_i\bar{x}, \tag{1}$$

且

$$g_j(x_i)\leqslant 0=g_j(\bar{x}),\ \forall j\in I(\bar{x}),\ x_i\in\Omega。 \tag{2}$$

令 $d_i=\dfrac{x_i-\bar{x}}{\|x_i-\bar{x}\|}$。不失一般性，假定存在 $d\in\mathbf{R}^n$ 使得 $d_i\to d$ 且 $\|d\|=1$。取 $t_i=\min\left\{\dfrac{1}{i},\|x_i-\bar{x}\|\right\}$。则 $t_i\downarrow 0$。因为 Ω 是凸集，所以 $\bar{x}+t_id_i\in\Omega$。从而有：

$$d\in T(X,\bar{x})。 \tag{3}$$

因为 f 是凸函数，所以 $f+C$ 也是凸函数。从而对任意的 $\xi\in\partial f(\bar{x})$，均有：

$$f(x_i)+C_ix_i \geqslant f(\bar{x})+C_i\bar{x}+(\xi+C_i)^{\mathrm{T}}(x_i-\bar{x})。$$

进一步由(1)式可得 $(\xi+C_i)^{\mathrm{T}}(x_i-\bar{x})\leqslant 0$，$(\xi+C_i)^{\mathrm{T}}(x_i-\bar{x})\neq 0$，即：

$$\xi^{\mathrm{T}}\left(\frac{x_i-\bar{x}}{\|x_i-\bar{x}\|}\right)\leqslant -C_i^{\mathrm{T}}\left(\frac{x_i-\bar{x}}{\|x_i-\bar{x}\|}\right),\ \xi^{\mathrm{T}}\left(\frac{x_i-\bar{x}}{\|x_i-\bar{x}\|}\right)\neq -C_i^{\mathrm{T}}\left(\frac{x_i-\bar{x}}{\|x_i-\bar{x}\|}\right)。$$

两边同时取极限可得：

$$\xi^{\mathrm{T}}d\leqslant 0,\ \forall \xi\in\partial f(\bar{x})。 \tag{4}$$

又因为 g_j 是拟凸函数，所以由引理 1 和(2)式可得 $\eta^{\mathrm{T}}(x_i-\bar{x})\leqslant 0$，$\forall \eta\in\partial g_j(\bar{x})$，$j\in I(\bar{x})$，即 $\eta^{\mathrm{T}}\left(\dfrac{x_i-\bar{x}}{\|x_i-\bar{x}\|}\right)\leqslant 0$，$\forall \eta\in\partial g_j(\bar{x})$，$j\in I(\bar{x})$。两边同时取极限可得：

$$\eta^{\mathrm{T}}d\leqslant 0,\ \forall \eta\in\partial g_j(x),\ j\in I(\bar{x})。 \tag{5}$$

故由(3)～(5)式可得，$0\neq d\in L(M(\bar{x}),\bar{x})$，与条件矛盾。　证毕

注 1　定理 1 中 f 的凸性假设必不可少。下面例子将对其进行说明。

例 1　考虑多目标优化问题

$$\min\ (f_1(x),f_2(x)),$$
$$\text{s.t. } g_1(x)\leqslant 0,\ x\in\mathbf{R}。$$

其中 $f_1(x)=\dfrac{1}{2}x$，$f_2(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x, & |x|<2\\ -\left(\dfrac{1}{2}x\right)^{\frac{1}{3}}, & |x|\geqslant 2\end{cases}$，$g_1(x)=x^3-64$。

容易验证函数 f_2 是非凸函数。设 $\bar{x}=4$，易知 $L(M(\bar{x}),\bar{x})=0$ 且 $\bar{x}$ 也是上述问题的有效解。然而，对任意 $\varepsilon>0$，它不是问题

$$\min\left(f_1(x),f_2(x)+\frac{\varepsilon}{4}x\right),$$
$$\text{s.t. } g_1(x)\leqslant 0,\ x\in\mathbf{R}$$

的有效解。事实上，对任意的 $\varepsilon>0$，$f_1(\bar{x})=2$，$f_2(\bar{x})+\dfrac{\varepsilon}{4}\bar{x}=-2^{\frac{1}{3}}+\varepsilon$，设 $x_\varepsilon=\min\left\{-250,-\dfrac{2}{\varepsilon^3}\right\}$。当 $-250<-\dfrac{2}{\varepsilon^3}$，即 $\varepsilon>\dfrac{1}{5}$ 时，有 $f_1(x_\varepsilon)=-125$，$f_2(x_\varepsilon)+\dfrac{\varepsilon}{4}x_\varepsilon=5-\dfrac{125}{2}\varepsilon$，显然 $f_1(x_\varepsilon)-f_1(\bar{x})<0$ 且 $f_2(x_\varepsilon)+\dfrac{\varepsilon}{4}x_\varepsilon-f_2(\bar{x})-\dfrac{\varepsilon}{4}\bar{x}<0$；当 $-250\geqslant-\dfrac{2}{\varepsilon^3}$，即 $0<\varepsilon\leqslant\dfrac{1}{5}$ 时，$f_1(x_\varepsilon)=-\dfrac{1}{\varepsilon^3}$，$f_2(x_\varepsilon)+\dfrac{\varepsilon}{4}x_\varepsilon=\dfrac{1}{\varepsilon}-\dfrac{1}{2\varepsilon^2}$，显然 $f_1(x_\varepsilon)-f_1(\bar{x})<0$ 且 $f_2(x_\varepsilon)+\dfrac{\varepsilon}{4}x_\varepsilon-f_2(\bar{x})-\dfrac{\varepsilon}{4}\bar{x}\leqslant 0$。

注 2 注意到定理 1 中约束函数 g_j 的拟凸性假设是必不可少的。事实上，文献[13]中的例 5.1 表明：若 f_i 和 g_j 在 $\bar{x}$ 处局部 Lipschitz 且正则，若 f_i 是凸函数且 $L(M(\bar{x}),\bar{x})=0$。但 g_j 不是拟凸函数，则 $\bar{x}$ 可能不是有效解，进而也不是鲁棒有效解。

定理 2 设 $f_i(i=1,\cdots,p)$ 和 $g_j(j\in J)$ 在 $\bar{x}\in\Omega$ 处局部 Lipschitz 且正则。若 f_i 是凸函数，g_j 是拟凸函数且 $P_{\mathrm{pos}}\left(\bigcup_{i=1}^{p}\partial f_i(\bar{x})\right)+P_{\mathrm{pos}}\left(\bigcup_{j\in I(\bar{x})}\partial g_j(\bar{x})\right)=\mathbf{R}^n$，则 $\bar{x}$ 是(MOP)的鲁棒有效解。

证明 由引理 3 可知

$$P_{\mathrm{pos}}\left(\bigcup_{i=1}^{p}\partial f_i(\bar{x})\right)+P_{\mathrm{pos}}\left(\bigcup_{j\in I(\bar{x})}\partial g_j\left(\bar{x}\right)\right)=\mathbf{R}^n\Leftrightarrow L(M(\bar{x}),\bar{x})=\{0\}。$$

再由定理 1 可知，$\bar{x}$ 是(MOP)的鲁棒有效解。 证毕

注 3 定理 2 是文献[10]中定理 3.6 的推广，放宽了约束函数的凸性条件至拟凸情形。

参考文献：

[1] EHRGOTT M.Multicriteria optimization[M].Berlin:Springer,2005.

[2] SAWARAGI Y.Theory of multiobjective optimization[M].New York:Academic Press,1985.

[3] 林锉云，董家礼.多目标最优化的方法与理论[M].吉林：吉林教育出版社，1992.
LIN C Y,DONG J L.The method and theory of multiobjective optimization[M].Jilin:Jilin Education Press,1992.

[4] KUROIWA D,LEE G M.On robust multiobjetive optimization[J].Vietnam Journal of Mathematics,2012,40:305-317.

[5] EHRGOTT M,IDE J,SCHÖBEL A.Minmax robustness for multi-objective optimization problems[J].European Journal of Operational Research,2014,239:17-31.

[6] KÖBIS E.On robust optimization relations between scalar robust optimization and unconstrained multicriteria optimization[J].Journal of Optimization Theory and Applications,2015,167:969-984.

[7] KUROIWA D,LEE G M.On robust convex multiobjective optimization[J].Nonlinear Convex Anal,2014,15(6):1125-1136.

[8] DEB K,GUPTA H.Introducing robustness in multiobjective optimization[J].Evolutionary Computation,2006,14(4):463-494.

[9] GEORGIEV P J,LUC D T,PARDALOS P.Robust aspects of solutions in deterministic multiple objective linear programming[J].European Journal of Operational Research,2013,229(1):29-36.

[10] ZAMANI M,SOLEIMANI M,KABGANI A.Robustness in nonsmooth nonlinear multi-objective programming[J].European Journal of Operational Research,2015,247:370-378.

[11] BURACHIK R S,RIZVI M M.On weak and strong Kuhn-Tucker conditions for smooth multiobjective optimization[J].Journal of Optimization Theory and Applications,2012,155(2):477-491.

[12] ZHAO K Q.Strong Kuhn-Tucker optimality in nonsmooth multiobjective optimization problems[J].Pacific Journal of Optimization,2015,11(3):483-494.

[13] ZHAO K Q,YANG X M.Characterizations of efficient and weakly efficient points in nonconvex vector optimization[J].Journal of Global Optimization,2015,61(3):575-590.

[14] CLARKE F H.Optimization and nonsmooth analysis[M].New York:Wiley,1983.

[15] BAZARAA M S,SHERALI H D,SHETTY C M.Nonlinear programming:theory and algorithms[M].3rd Edition.New Jersey:John Wiley Sons,2006.

Operations Research and Cybernetics

Sufficient Optimality Conditions for Kind of Robust Efficient Solutions in Multiobjective Optimization

LI Yanyan, ZHU Qiao, ZHAO Kequan

(College of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [**Purposes**]The study of various solutions for multiobjective optimization is a very important subject in the study of multiobjective optimization theory and method. However, the study of robust efficient solution has important practical significance and application value. [**Methods**]By means of linearizing cone in the sense of Clarke direction derivative. [**Findings**]Some optimality sufficient conditions are given for a kind of robust efficient solutions of nonsmooth multiobjective optimization problems with inequality constraints. Moreover, some concrete examples are also presented to illustrate the main results. [**Conclusions**]The main results improve and generalize some recent research works.

Keywords: nonsmooth multiobjective optimization; optimality conditions; robust efficient solutions; linearizing cone

(责任编辑 黄 颖)