DOI:10.11721/cqnuj20170441

关于两族拟 Lipschitz 映像的非凸混杂算法*

高兴慧，宋欣欣，王　晶，刘思璇，许　怡，刘　婷
(延安大学 数学与计算机科学学院，陕西 延安 716000)

摘要:【目的】研究两族渐近拟 Lipschitz 映像的公共不动点的迭代方法以及强收敛性的证明。【方法】利用构造凸闭集的方法和投影算子的定义和性质等技巧。【结果】首先，在 Hilbert 空间中，构造出一种新的关于两族渐近拟 Lipschitz 映像的公共不动点的非凸混杂投影算法，其次，利用构造凸闭集的方法证明了该算法的强收敛性。【结论】所得结论是最新文献相关结论之推广。

关键词:拟 Lipschitz 映像族;非凸混杂算法;强收敛性

中图分类号:O177.91　　　**文献标志码**:A　　　**文章编号**:1672-6693(2017)06-0061-04

混杂投影算法能够强收敛到非线性算子的不动点，此问题的研究可参考文献[1-7]。2015 年，文献[5]在 Hilbert 空间的框架下，设计出了几种修正的混杂投影算法，并证明了这些算法生成的迭代序列能强收敛到有限个拟渐近伪压缩映像之公共不动点。基于文献[5]的思想，文献[6]在没有有界性限制[5]下，提出了一族渐近拟 Lipschitz 映像的非凸混杂投影算法，推广了文献[5]中的主要结果。受到以上文献的启示，本文将在文献[6]的基础上，设计出一种新的关于两族渐近拟 Lipschitz 映像的非凸混杂投影算法，并去掉了文献[6]算法中的“Q_n”，而且证明了该迭代算法的强收敛性，本文的主要结果是对文献[5-6]的相关结果的推广和改进。

1 预备知识

设 H 是一个实 Hilbert 空间，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 与 $\|\cdot\|$ 分别表示 H 中的内积和范数符号，C 是 H 中非空闭凸子集。设 $T:C\to C$ 代表 C 到 C 的映像，用 $F(T)$ 代表 T 之不动点集合，也就是 $F(T)=\{x\in C:Tx=x\}$。

定义 1[6]　称映像 $T:C\to C$ 为拟 Lipschitz 的，若 $F(T)\neq\varnothing$，且存在常数 L 满足 $1\leqslant L<+\infty$，使得

$$\|Tx-p\|\leqslant L\|x-p\|,\forall x\in C,\forall p\in F(T),$$

这时也称 T 为拟 L-Lipschitz 映像。

定义 2[6]　设 $\{T_n\}:C\to C$ 为一族拟 L_n-Lipschitz 映像，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}L_n=1$，则称 $\{T_n\}$ 是渐近的。

定义 3[6]　称映像 $T:C\to C$ 为闭的，如果 $x_n\to x$，且 $\|Tx_n-x_n\|\to 0(n\to\infty)$，使得 $Tx=x$。

定义 4[6]　称映像 $\{T_n\}:C\to C$ 为一致闭的，若 $F=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F(T_n)\neq\varnothing$ 如果 $x_n\to x$，且 $\|T_nx_n-x_n\|\to 0$，使得 $x\in F$。

引理 1[6]　设 H 为实 Hilbert 空间，C 是 H 中非空闭凸子集，$T_n:C\to C$ 是一致闭的渐近拟 L_n-Lipschitz 映像族，则 $F=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F(T_n)$ 是 C 中闭凸子集。

引理 2[2]　设 H 是实 Hilbert 空间，C 是 H 中非空闭凸子集，对任意的 $x\in H$，$z\in C$，则 $z=P_Cx$ 当且仅当 $\langle x-z,y-z\rangle\leqslant 0,\forall y\in C$。这里 P_C 表示 H 到 C 上的距离投影，$P_Cx\in C$，满足 $\|x-P_Cx\|=\min\Big\{\|x-y\|:y\in C\Big\}$。

---

* **收稿日期**:2016-10-21　**修回日期**:2017-03-19　**网络出版时间**:2017-05-16　11:25
资助项目:国家自然科学基金(No.11071053);陕西省自然科学基础研究计划项目(No.2016JM6082);延安大学校级科研引导项目(No.YD2016-12);2016 年国家级大学生创新训练计划项目(No.201610719002);2016 年陕西省大学生创新训练计划项目(No.1496)
第一作者简介:高兴慧，女，副教授，研究方向为非线性泛函分析，E-mail:yadxgaoxinghui@163.com
网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20170516.1125.022.html

2 主要结果

定理 1 设 C 为 Hilbert 空间 H 之非空凸闭子集,$T'_n:C\to C$ 为一致闭的渐近拟-L'_n-Lipschitz 映像族,T''_n:$C\to C$ 为一致闭的渐近拟-L''_n-Lipschitz 映像族,使得 $F=F_1\cap F_2=\bigcap_{n=1}^{\infty}F(F'_n)\bigcap_{n=1}^{\infty}F(T''_n)\neq\varnothing$,假设 $\alpha_n,\beta_n\in(a,1]$,其中 $\alpha\in(0,1)$,序列$\{x_n\}$生成如下:

$$\begin{cases}x_0\in H,\\ C_1=C,x_1=P_{C_1}x_0,\\ y_n=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nT'_nx_n,\\ z_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_nT''_ny_n,\\ C_{n+1}=\{z\in\overline{\mathrm{co}}C_n:\|z_n-z\|\leqslant(1-\beta_n)\|x_n-z\|+\beta_nL''_n\|y_n-z\|\leqslant\\ \qquad(1+(L''_n(1+(L'_n-1)\alpha_n)-1)\beta_n)\|x_n-z\|\}\cap A,\\ x_{n+1}=P_{\overline{\mathrm{co}}}C_{n+1}x_0,n\geqslant1。\end{cases}\tag{1}$$

其中,$\overline{\mathrm{co}}C_n$ 表示 C_n 的凸闭包,$\forall n\geqslant1,A=\{z\in H:\|z-P_Fx_0\|\leqslant1\}$,则$\{x_n\}$强收敛到 P_Fx_0。

证明 分 6 步完成定理的证明。

第 1 步 证明 $F\cap A\subset\overline{\mathrm{co}}C_n,\forall n\geqslant1$。事实上,对于$\forall p\in F\cap A$,则 $p\in F_1$ 且 $p\in F_2$ 于是

$$\|z_n-p\|=\left\|(1-\beta_n)x_n+\beta_nT''_ny_n-p\right\|=\left\|(1-\beta_n)(x_n-p)+\beta_n(T''_ny_n-p)\right\|\leqslant$$
$$(1-\beta_n)\|x_n-p\|+\beta_nL''_n\|y_n-p\|=(1-\beta_n)\|x_n-p\|+\beta_nL''_n\left\|(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nT'_nx_n-p\right\|=$$
$$(1-\beta_n)\|x_n-p\|+\beta_nL''_n\left\|(1-\alpha_n)(x_n-p)+\alpha_n(T'_nx_n-p)\right\|\leqslant$$
$$(1-\beta_n)\|x_n-p\|+\beta_nL''_n(1+(L'_n-1)\alpha_n)\|x_n-p\|=(1+(L''_n(1+(L'_n-1)\alpha_n)-1)\beta_n)\|x_n-p\|。$$

而 $p\in A$,于是 $p\in C_{n+1}$,于是 $F\cap A\subset C_{n+1},\forall n\geqslant0$。因此 $F\cap A\subset\overline{\mathrm{co}}C_n,\forall n\geqslant1$,那么$\overline{\mathrm{co}}C_n$ 非空,$\forall n\geqslant1$。显然$\overline{\mathrm{co}}C_n$ 为凸闭集,$\forall n\geqslant1$。

第 2 步 证明$\lim_{n\to\infty}x_n=q\in C$。由 $x_n=P_{\overline{\mathrm{co}}C_n}x_0$ 可得 $\|x_n-x_0\|\leqslant\|z-x_0\|,\forall z\in\overline{\mathrm{co}}C_n$。令 $z_0=P_Fx_0$,则 $z_0\in F\cap A\subset\overline{\mathrm{co}}C_n$。于是

$$\|x_n-x_0\|\leqslant\|z_0-x_0\|,\tag{2}$$

又由 $x_{n+1}=P_{\overline{\mathrm{co}}C_{n+1}}x_0,\overline{\mathrm{co}}C_{n+1}\subset\overline{\mathrm{co}}C_n,\forall n\geqslant1$,可得

$$\|x_{n+1}-x_0\|\geqslant\|x_n-x_0\|。\tag{3}$$

结合(2)式和(3)式可得 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|$ 存在。再由于 $x_{n+m}=P_{\overline{\mathrm{co}}C_{n+m}}x_0,\overline{\mathrm{co}}C_{n+m}\subset\overline{\mathrm{co}}C_n$ 那么$\langle x_n-x_{n+m},x_n-x_0\rangle\leqslant0,\forall m,n\in\mathbf{N}$。于是

$$\|x_{n+m}-x_n\|^2=\|(x_{n+m}-x_0)-(x_n-x_0)\|^2=\|x_{n+m}-x_0\|^2+\|x_n-x_0\|^2-2\langle x_{n+m}-x_0,x_n-x_0\rangle=$$
$$\|x_{n+m}-x_0\|^2+\|x_n-x_0\|^2-2\langle x_{n+m}-x_n+x_n-x_0,x_n-x_0\rangle=$$
$$\|x_{n+m}-x_0\|^2-\|x_n-x_0\|^2-2\langle x_{n+m}-x_n,x_n-x_0\rangle\leqslant$$
$$\|x_{n+m}-x_0\|^2-\|x_n-x_0\|^2\to0(n\to\infty),\forall m\geqslant1。$$

所以$\{x_n\}$是 C 中的柯西列,于是$\lim_{n\to\infty}x_n=q\in C$。

第 3 步 证明 $y_n\to q(n\to\infty)$。令 $D_{n+1}=\{z\in C:\|y_n-z\|^2\leqslant\|x_n-z\|^2+4(L'_n-1)(L'_n+1)\}$,由 D_{n+1} 的定义可得

$$D_{n+1}=\{z\in C:\langle y_n-z,y_n-z\rangle\leqslant\langle x_n-z,x_n-z\rangle+4(L'_n-1)(L'_n+1)\}=$$
$$\{z\in C:\|y_n\|^2-2\langle y_n,z\rangle+\|z\|^2\leqslant\|x_n\|^2-2\langle x_n,z\rangle+\|z\|^2+4(L'_n-1)(L'_n+1)\}=$$
$$\{z\in C:2\langle x_n-y_n,z\rangle\leqslant\|x_n\|^2-\|y_n\|^2+4(L'_n-1)(L'_n+1)\}。$$

易得 D_{n+1}是闭凸集,$\forall n\geqslant0$。下证 $C_{n+1}\subset D_{n+1},\forall n\geqslant0$。

事实上,$\forall z\in C_{n+1}$有$(1-\beta_n)\|x_n-z\|+\beta_nL''_n\|y_n-z\|\leqslant(1+(L''_n(1+(L'_n-1)\alpha_n)-1)\beta_n)\|x_n-z\|$,那么$\|y_n-z\|^2\leqslant(1+(L'_n-1)\alpha_n)^2\|x_n-z\|^2\leqslant\|x_n-z\|^2+(L'_n-1)(L'_n+1)\|x_n-z\|^2$。从 C_{n+1}的构造可得 $C_{n+1}\subset A,\forall n\geqslant0$,则 $z\in A$。因为 A 为凸集,所以$\overline{\mathrm{co}}C_{n+1}\subset A,\forall n\geqslant0$,注意到 $x_n\in\overline{\mathrm{co}}C_n$,则 $x_n\in A$,于是

$$\| y_n - z \|^2 \leqslant \| x_n - z \|^2 + (L'_n - 1)(L'_n + 1) \| x_n - z \|^2 \leqslant \| x_n - z \|^2 + 4(L'_n - 1)(L'_n + 1), \tag{4}$$

所以 $z \in D_{n+1}$，于是 $C_{n+1} \subset D_{n+1}$，$\forall n \geqslant 0$。由于 D_{n+1} 是凸集，所以 $\overline{\mathrm{co}} C_{n+1} \subset D_{n+1}$，$\forall n \geqslant 0$，因此 $x_{n+1} \in \overline{\mathrm{co}} C_{n+1} \subset D_{n+1}$，于是

$$\| y_n - x_{n+1} \|^2 \leqslant \| x_n - x_{n+1} \|^2 + 4(L'_n - 1)(L'_n + 1) \to 0 (n \to \infty), \tag{5}$$

因此 $y_n \to q (n \to \infty)$。

第 4 步　证明 $z_n \to q (n \to \infty)$。令 $D'_{n+1} = \{z \in C : \| z_n - z \|^2 \leqslant \| x_n - z \|^2 + 4(L''_n L'_n - 1)(L''_n L'_n + 1)\}$，由 D'_{n+1} 的定义可得

$$D'_{n+1} = \{z \in C : \langle z_n - z, z_n - z \rangle \leqslant \langle x_n - z, x_n - z \rangle + 4(L''_n L'_n - 1)(L''_n L'_n + 1)\} =$$
$$\{z \in C : \| z_n \|^2 - 2\langle z_n, z \rangle + \| z \|^2 \leqslant \| x_n \|^2 - 2\langle x_n, z \rangle + \| z \|^2 + 4(L''_n L'_n - 1)(L''_n L'_n + 1)\} =$$
$$\{z \in C : 2\langle x_n - z_n, z \rangle \leqslant \| x_n \|^2 - \| z_n \|^2 + 4(L''_n L'_n - 1)(L''_n L'_n + 1)\}。$$

易得 D'_{n+1} 是闭凸集，$\forall n \geqslant 0$。下面证明 $C_{n+1} \subset D'_{n+1}$，$\forall n \geqslant 0$。

事实上，$\forall z \in C_{n+1}$，有

$$\| z_n - z \|^2 \leqslant (1 + (L''_n(1 + (L'_n - 1)\alpha_n) - 1)\beta_n)^2 \| x_n - z \|^2 \leqslant (1 + (L''_n(1 + (L'_n - 1)) - 1))^2 \| x_n - z \|^2 =$$
$$(1 + (L''_n L'_n - 1))^2 \| x_n - z \|^2 = \| x_n - z \|^2 + [2(L''_n L'_n - 1) + (L''_n L'_n - 1)^2] \| x_n - z \|^2 =$$
$$\| x_n - z \|^2 + (L''_n L'_n - 1)(L''_n L'_n + 1) \| x_n - z \|^2。$$

类似于(4)式的证明可得 $\| z_n - z \|^2 \leqslant \| x_n - z \|^2 + 4(L''_n L'_n - 1)(L''_n L'_n + 1)$。类似于(5)式的证明可得

$$\| z_n - x_{n+1} \|^2 \leqslant \| x_n - x_{n+1} \|^2 + 4(L''_n L'_n - 1)(L''_n L'_n + 1) \to 0 (n \to \infty),$$

因此 $z_n \to q (n \to \infty)$。

第 5 步　证明 $q \in F$。由 y_n 的定义可得 $\alpha_n \| T'_n x_n - x_n \| = \| y_n - x_n \|$，由于 $\alpha_n \in (a, 1] \subset [0, 1]$，对上式两边取极限可得 $\lim\limits_{n \to \infty} \| T'_n x_n - x_n \| = 0$，因为$\{T'_n\}$是一致闭的，且 $x_n \to q$，所以 $T'_n q = q$，即 $q \in F_1$。

另一方面，由(1)式中 z_n 的定义可得 $z_n - y_n = (1 - \beta)(x_n - y_n) + \beta_n (T''_n y_n - y_n)$，于是

$$(z_n - y_n) - (1 - \beta_n)(x_n - y_n) = \beta_n (T''_n y_n - y_n),$$

从而 $\beta_n \| T''_n y_n - y_n \| \leqslant \| z_n - y_n \| (1 - \beta_n) \| x_n - y_n \|$。由于 $\beta_n \in (a, 1] \subset [0, 1]$，对上式两边取极限可得 $\lim\limits_{n \to \infty} \| T''_n y_n - y_n \| = 0$，因为$\{T''_n\}$是一致闭的，且 $x \to q$，所以 $T''_n q = q$，即 $q \in F_2$，所以 $q \in F_1 \cap F_2 = F$。

第 6 步　证明 $q = z_0 = P_F x_0$。反证法，假设 $q \neq z_0$，则 $\| x_0 - q \| > \| x_0 - z_0 \|$，那么存在正整数 M，当 $n > M$ 时，有 $\| x_0 - x_n \| > \| x_0 - z_0 \|$，因为 $x_n = P_{\overline{\mathrm{co}} C_n} x_0$ 所以 $z_0 \overline{\in} \overline{\mathrm{co}} C_n$。由第 1 步知 $F \cap A \subset \overline{\mathrm{co}} C_n$，$\forall n \geqslant 1$，且 $z_0 \in F$，那么 $z_0 \overline{\in} A$ 这与 A 的定义矛盾，所以 $q = z_0 = P_F x_0$。　证毕

注 1　1)定理 1 把文献[6]中的定理 2.5 从一族拟 Lipschitz 映像推广到两族拟 Lipschitz 映像上；2)定理 1 中的算法比文献[6]中的定理 2.5 中的算法简单，也就是去掉了集合“Q_n”。

在 (1)式中，如果取 $\alpha_n = 0$，则可得推论 1。

推论 1　设 C 为 Hilbert 空间 H 之非空凸闭子集，$T_n : C \to C$ 为一致闭的渐近拟-L_n-Lipschitz 映像族，使得 $F = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F(T_n) \neq \varnothing$，假设 $\beta_n \in (a, 1]$，其中 $\alpha \in (0, 1)$，序列$\{x_n\}$生成如下：

$$\begin{cases} x_0 \in H, \\ C_1 = C, x_1 = P_{C_1} x_0, \\ z_n = (1 - \beta_n) x_n + \beta_n T_n x_n, \\ C_{n+1} = \{z \in \overline{\mathrm{co}} C_n : \| z_n - z \| \leqslant (1 + (L_n - 1)\beta_n) \| x_n - z \|\} \cap A, \\ x_{n+1} = P_{\overline{\mathrm{co}} C_{n+1}} x_0, n \geqslant 1。 \end{cases}$$

其中，$\overline{\mathrm{co}} C_n$ 表示 C_n 的凸闭包，$\forall n \geqslant 1$，$A = \{z \in H : \| z - P_F x_0 \| \leqslant 1\}$则$\{x_n\}$强收敛到 $P_F x_0$。

参考文献：

[1] SU Y F, QIN X L. Monotone CQ iterative processes for nonexpansive semigroups and maximal monotone operators[J]. Nonlinear Analysis, 2008, 68: 3657-3664.

[2] ZHOU H Y, SU Y F. Strong convergence theorems for a family of quasi-asymptotic pseudo-contractions in Hilbert spaces[J]. Nonlinear Analysis, 2009, 70: 4047-4052.

[3] GAO X H, ZHOU H Y. Strong convergence theorems of common elements for equilibrium problems and fixed point problems in Banach spaces[J]. Acta Mathematics Applicatae Sinica, English Series, 2012, 28(2): 337-350.

[4] 高兴慧,杨春萍.关于 Lipschitz 拟伪压缩映像族的强收敛定理[J].浙江大学学报(理学版),2016,43(1):71-74.
GAO X H, YANG C P. Strong convergence theorems for a family of Lipschitz quasi-pseudo-contractions[J]. Journal of Zhejiang University (Science Edition), 2016, 43(1): 71-74.

[5] LIU Y X, ZHENG L G, WANG P Y, et al. Three kinds of new hybrid projection methods for a finite family of quasi-asymptotically pseudocontractive mappings in Hilbert spaces[J]. Fixed Point Theory and Applications, 2015, 2015(118): 1-13.

[6] GUAN J Y, TANG Y X, MA P C, et al. Non-convex hybrid algorithm for a family of countable quasi-Lipschitz mappings and application[J]. Fixed Point Theory and Applications, 2015, 2015(214): 1-11.

[7] 谭军,向长合.一致凸 Banach 空间中 α-非扩张映像的强收敛定理[J].重庆师范大学学报(自然科学版),2015,32(4):74-77.
TAN J, XIANG C H. Strong convergence theorems for α-nonexpansive mapping in uniformly convex Banach spaces [J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Sciecnce), 2015, 32(4): 74-77.

Non-convex Hybrid Algorithm for Two Families of Quasi-Lipschitz Mappings

GAO Xinghui, SONG Xinxin, WANG Jing, LIU Sixuan, XU Yi, LIU Ting

(College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an Shaanxi 716000, China)

Abstract: [**Purposes**]The purpose is to study itarative methods and proofs of strong convergence of common fixed points for two families of asymptotically quasi-Lipschitz mappings in Hilbert spaces. The strong convergence of the proposed algorithm is proved by the method of constructing concex and closed sets. The results presented here improve and extend the corresponding ones announced by many others. [**Methods**]The method of constructing concex and closed sets and the definition and properties of projective operator are used. [**Findings**]First, a kind of new non-convex hybrid algorithms of common fixed points is established for two families of asymptotically quasi-Lipschitz mappings in Hilbert spaces. Second, the strong convergence of the proposed algorithm is proved by the method of constructing concex and closed sets. [**Conclusions**]The results presented here improve and extend the corresponding ones announced by many others.

Keywords: quasi-Lipschitz mappings; non-convex hybrid algorithm; strong convergence

(责任编辑 游中胜)