2017 年 11 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Nov. 2017
第 34 卷 第 6 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 34 No. 6

DOI:10.11721/cqnuj20170614

伪抛物型积分微分方程一个新的混合有限元分析*

刁 群，毛凤梅

(平顶山学院 数学与统计学院，河南 平顶山 467000)

摘要:【目的】研究伪抛物型积分微分方程一个新的混合元模式。【方法】利用 Bramble-Hilbert 引理，对不完全双二次元 Q_2^- 及其梯度空间进行探索。【结果】证明了单元具有的一个新的高精度理论。【结论】在半离散和向后欧拉全离散格式下，分别导出了原始变量 u 在 H^1-模和中间变量 $\boldsymbol{p}$ 在 L^2-模意义下的超逼近性质。

关键词:伪抛物型积分微分方程;混合有限元方法;Bramble-Hilbert 引理;半离散和全离散格式;超逼近

中图分类号:O242.21 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2017)06-0078-07

考虑如下的伪抛物型积分微分方程

$$\begin{cases} u_t-\nabla\cdot\left(a(X,t)\nabla u_t+b_1(X,t)\nabla u+\int_0^t b_2(X,t,s)\nabla u(X,s)\mathrm{d}s\right)=f(X,t),(X,t)\in\Omega\times(0,T] \\ u(X,t)=0,(X,t)\in\partial\Omega\times(0,T] \\ u(X,0)=u_0(X),X\in\Omega \end{cases},\quad(1)$$

这里 Ω 为 $\mathbf{R}^2$ 上的一个凸多边形区域，$\partial\Omega$ 为其边界，a,b_1,b_2,f 和 u_0 是已知的函数，其中 a,b_1,b_2 以及它们的导数光滑有界且满足 $0<a_0\leqslant a(X,t)\leqslant a_1$。

伪抛物型积分微分方程是一类重要的发展方程，在流体力学、核反应动力学和生物力学等许多实际问题中有着广泛应用。关于这类方程数值方法的研究已有一些结果。其中文献[1]基于 Raviart-Thomas 空间，提出了混合有限元方法，通过引入广义混合椭圆投影，在半离散格式下，给出了平方模范数下的最优误差估计，并利用正则 Green 函数得到了最大模范数下的拟最优误差估计。文献[2]提出了一维情况下的 H^1-Galerkin 混合有限元方法，对于半离散格式，证明了有限元解的存在唯一性，并给出了解函数以及其梯度的最优收敛阶误差估计。文献[3]针对完全非线性的情形提出了一类新的有限元投影(称为 Sobolev-Volterra 投影)，证明了它存在唯一性，并分别在半离散和全离散格式下，得到了最佳 H^1 和 L^2 收敛性。但据已有文献，对伪抛物型积分微分方程的数值分析，目前只局限于收敛性的研究，并且需要借助于不同形式的投影算子进行误差估计。

众所周知，混合有限元方法是求偏微分方程数值解的有效方法之一，但是它需要所涉及的两个有限元逼近空间满足 B-B 相容性条件，这通常不是一件很简单的事。2010 年，文献[4]对二阶椭圆问题提出了一类新的混合元格式，和传统混合元方法相比，该格式具有 B-B 条件容易满足，自由度少等优点。因此，近几年该方法得到了广泛应用。如文献[5]利用此混合元($P_m+P_{m-1}\times P_{m-1}$)方法研究了抛物方程，并给出了半离散和全离散格式下的收敛性分析;文献[6]建立了抛物型方程在新混合元格式下的非协调混合有限元($EQ_1^{\mathrm{rot}}+Q_{10}\times Q_{01}$)方法，导出了半离散格式下的超逼近性质和整体超收敛结果，并进一步得到了比通常误差估计高一阶的外推结果;文献[7]对 Possion 方程应用低阶协调($Q_{11}+Q_{01}\times Q_{10}$)和非协调($EQ_1^{\mathrm{rot}}+Q_{10}\times Q_{01}$)新混合元格式进行了分析，得到了半离散格式下的超逼近性质和整体超收敛结果;文献[8-10]分别对 Sobolev 方程、Sine-Gordon 方程和 Schrödinger 方程提出了低阶的半离散和全离散混合有限元($Q_{11}+Q_{01}\times Q_{10}$)格式，均获得了超逼近性质和整体超收敛结果。

本文的主要目的是利用不完全双二次元 Q_2^- 及其梯度空间，对伪抛物型积分微分方程构造一个新的混合元模式。首先，通过 Bramble-Hilbert 引理，给出单元所具有的一个新的高精度结果。其次，在不需要借助传统有

* **收稿日期**:2016-12-14 **修回日期**:2017-09-20 **网络出版时间**:2017-11-10 15:36

资助项目:国家自然科学基金(No.11271340);河南省科技计划项目(No.162300410082)

第一作者简介:刁群，女，讲师，研究方向为有限元方法及应用，E-mail:diaoqun.happy@163.com;**通信作者**:毛凤梅，副教授，E-mail:maofengmei@pdsu.edu.cn

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20171110.1536.014.html

限元分析中必不可少的投影算子的前提下,对于半离散和向后欧拉全离散格式,分别导出原始变量 u 在 H^1-模和中间变量 $\boldsymbol{p}$ 在 L^2-模意义下的超逼近性质。

1 混合元的构造及性质

设 Ω 是一个矩形区域,其边界 $\partial\Omega$ 分别平行于 x 轴和 y 轴,T_h 是 Ω 的矩形单元剖分族,满足正则性假设。对 $e\in T_h$,设它的 4 个顶点分别为 $a_1(x_e-h_e,y_e-k_e)$,$a_2(x_e+h_e,y_e-k_e)$,$a_3(x_e+h_e,y_e+k_e)$,$a_4(x_e-h_e,y_e+k_e)$,4 条边分别为 $l=\overline{a_1a_2}$,$l_2=\overline{a_2a_3}$,$l_3=\overline{a_3a_4}$,$l_4=\overline{a_4a_1}$。记 $h=\max\limits_{e\in T_h}\{h_e,k_e\}$,$\hat{e}$ 为 $\hat{x}-\hat{y}$ 平面上的参考单元,$\hat{a}_1(-1,-1)$,$\hat{a}_2(1,-1)$,$\hat{a}_3(1,1)$,$\hat{a}_4(-1,1)$为 4 个顶点,$\hat{l}_1=\overline{\hat{a}_1\hat{a}_2}$,$\hat{l}_2=\overline{\hat{a}_2\hat{a}_3}$,$\hat{l}_3=\overline{\hat{a}_3\hat{a}_4}$,$\hat{l}_4=\overline{\hat{a}_4\hat{a}_1}$为 4 条边。

定义 $\hat{e}$ 上的有限元$(\hat{e},\hat{P},\hat{\Sigma})$及$(\hat{e},\hat{P}^i,\hat{\Sigma}^i)(i=1,2)$,如下:

$$\hat{\Sigma}=\{\hat{v}_i,i=1,2,\cdots,8\},\hat{P}=Q_2^-(\hat{e})=\mathrm{span}\{1,\hat{x},\hat{y},\hat{x}\hat{y},\hat{x}^2,\hat{y}^2,\hat{x}^2\hat{y},\hat{x}\hat{y}^2\},$$

$$\hat{\Sigma}^1=\{\hat{p}_i^1,i=1,2,\cdots,5\},\hat{P}^1=\mathrm{span}\{1,\hat{x},\hat{y},\hat{x}\hat{y},\hat{y}^2\},\hat{\Sigma}^2=\{\hat{p}_i^2,i=1,2,\cdots,5\},\hat{P}^2=\mathrm{span}\{1,\hat{x},\hat{y},\hat{x}\hat{y},\hat{x}^2\}。$$

其中:

$$\hat{v}_i=\hat{v}(\hat{a}_i),\hat{v}_{i+4}=\frac{1}{|\hat{l}_i|}\int_{\hat{l}_i}\hat{v}\mathrm{d}\hat{s},i=1,2,3,4,$$

$$\hat{p}_1^1=\frac{1}{|\hat{l}_1|}\int_{\hat{l}_1}\hat{p}^1\mathrm{d}\hat{s},\hat{p}_2^1=\frac{1}{|\hat{l}_2|}\int_{\hat{l}_2}\hat{x}\hat{p}^1\mathrm{d}\hat{s},\hat{p}_3^1=\frac{1}{|\hat{l}_3|}\int_{\hat{l}_3}\hat{p}^1\mathrm{d}\hat{s},\hat{p}_4^1=\frac{1}{|\hat{l}_4|}\int_{\hat{l}_4}\hat{x}\hat{p}^1\mathrm{d}\hat{s},\hat{p}_5^1=\frac{1}{|\hat{e}|}\int_{\hat{e}}\hat{p}^1\mathrm{d}\hat{x}\mathrm{d}\hat{y},$$

$$\hat{p}_1^2=\frac{1}{|\hat{l}_1|}\int_{\hat{l}_1}\hat{p}^2\mathrm{d}\hat{s},\hat{p}_2^2=\frac{1}{|\hat{l}_2|}\int_{\hat{l}_2}\hat{y}\hat{p}^2\mathrm{d}\hat{s},\hat{p}_3^2=\frac{1}{|\hat{l}_3|}\int_{\hat{l}_3}\hat{p}^2\mathrm{d}\hat{s},\hat{p}_4^2=\frac{1}{|\hat{l}_4|}\int_{\hat{l}_4}\hat{y}\hat{p}^2\mathrm{d}\hat{s},\hat{p}_5^2=\frac{1}{|\hat{e}|}\int_{\hat{e}}\hat{p}^2\mathrm{d}\hat{x}\mathrm{d}\hat{y}。$$

定义 $\hat{e}$ 上的插值算子 $\hat{I}:H^2(\hat{e})\to\hat{P}$,$\hat{\Pi}:(H^1(\hat{e}))^2\to\hat{P}^1\times\hat{P}^2$,满足:

$$\hat{I}\hat{v}(\hat{a}_i)=\hat{v}_i,\int_{\hat{l}_i}(\hat{v}-\hat{I}\hat{v})\mathrm{d}\hat{s}=0,i=1,2,3,4,$$

$$\int_{\hat{l}_i}(\hat{\boldsymbol{p}}-\hat{\Pi}\hat{\boldsymbol{p}})\cdot\boldsymbol{\tau}q\mathrm{d}\hat{s}=0,\forall q\in P_1(\hat{l}_i),i=1,2,3,4,\int_{\hat{e}}(\hat{\boldsymbol{p}}-\hat{\Pi}\hat{\boldsymbol{p}})\mathrm{d}\hat{x}\mathrm{d}\hat{y}=0,$$

其中 $\hat{\boldsymbol{p}}=(\hat{p}^1,\hat{p}^2)$,$\hat{\Pi}\hat{\boldsymbol{p}}=(\hat{\Pi}^1\hat{p}^1,\hat{\Pi}^2\hat{p}^2)$,$\boldsymbol{\tau}$是$\hat{l}_i$ 的单位切向量,$P_1(\hat{l}_i)$是$\hat{l}_i$ 上的一次多项式空间。

可以验证,以上定义的插值算子是适定的,插值函数表达式分别为:

$$\hat{I}\hat{v}=\alpha_0+\alpha_1\hat{x}+\alpha_2\hat{y}+\alpha_3\hat{x}\hat{y}+\alpha_4\hat{x}^2+\alpha_5\hat{y}^2+\alpha_6\hat{x}^2\hat{y}+\alpha_7\hat{x}\hat{y}^2,$$

$$\hat{\Pi}^1\hat{p}^1=\beta_0+\beta_1\hat{x}+\beta_2\hat{y}+\beta_3\hat{x}\hat{y}+\beta_4\hat{y}^2,\hat{\Pi}^2\hat{p}^2=\gamma_0+\gamma_1\hat{x}+\gamma_2\hat{y}+\gamma_3\hat{x}\hat{y}+\gamma_4\hat{x}^2,$$

其中:

$$\alpha_0=-\frac{1}{2}(\hat{v}_1+\hat{v}_2+\hat{v}_3+\hat{v}_4)+\frac{3}{4}(\hat{v}_5+\hat{v}_6+\hat{v}_7+\hat{v}_8),\alpha_1=\frac{1}{8}(\hat{v}_1-\hat{v}_2-\hat{v}_3+\hat{v}_4)+\frac{3}{4}(\hat{v}_6-\hat{v}_8),$$

$$\alpha_2=\frac{1}{8}(\hat{v}_1+\hat{v}_2-\hat{v}_3-\hat{v}_4)+\frac{3}{4}(\hat{v}_7-\hat{v}_5),\alpha_3=\frac{1}{4}(\hat{v}_1-\hat{v}_2+\hat{v}_3-\hat{v}_4),$$

$$\alpha_4=\frac{3}{8}(\hat{v}_1+\hat{v}_2+\hat{v}_3+\hat{v}_4)-\frac{3}{4}(\hat{v}_5+\hat{v}_7),\alpha_5=\frac{3}{8}(\hat{v}_1+\hat{v}_2+\hat{v}_3+\hat{v}_4)-\frac{3}{4}(\hat{v}_6+\hat{v}_8),$$

$$\alpha_6=\frac{3}{8}(-\hat{v}_1-\hat{v}_2+\hat{v}_3+\hat{v}_4)+\frac{3}{4}(\hat{v}_5-\hat{v}_7),\alpha_7=\frac{3}{8}(-\hat{v}_1+\hat{v}_2+\hat{v}_3-\hat{v}_4)-\frac{3}{4}(\hat{v}_6-\hat{v}_8),$$

$$\beta_0=\frac{3}{2}\hat{p}_5^1-\frac{1}{4}(\hat{p}_1^1+\hat{p}_3^1),\beta_1=\frac{3}{2}(\hat{p}_2^1+\hat{p}_4^1),\beta_2=\frac{1}{2}(\hat{p}_3^1-\hat{p}_1^1),\beta_3=\frac{3}{2}(\hat{p}_4^1-\hat{p}_2^1),\beta_4=\frac{3}{4}(\hat{p}_1^1+\hat{p}_3^1)-\frac{3}{2}\hat{p}_5^1,$$

$$\gamma_0=\frac{3}{2}\hat{p}_5^2-\frac{1}{4}(\hat{p}_1^2+\hat{p}_3^2),\gamma_1=\frac{1}{2}(\hat{p}_1^2-\hat{p}_3^2),\gamma_2=\frac{3}{2}(\hat{p}_2^2+\hat{p}_4^2),\gamma_3=\frac{3}{2}(\hat{p}_2^2-\hat{p}_4^2),\gamma_4=\frac{3}{4}(\hat{p}_1^2+\hat{p}_3^2)-\frac{3}{2}\hat{p}_5^2。$$

定义可逆仿射变换 $F_e:\hat{e}\to e$,$\begin{cases}x=x_e+h_e\hat{x},\\y=y_e+k_e\hat{y},\end{cases}$那么相应的有限元空间以及所诱导的插值算子分别为:

$$V_h=\{v;v|_e=\hat{v}\circ F_e^{-1},\hat{v}\in\hat{p},\forall e\in T_h\},$$

$$W_h=\{\boldsymbol{w}=(w^1,w^2);\boldsymbol{w}|_e=(\hat{w}^1\circ F_e^{-1},\hat{w}^2\circ F_e^{-1}),\boldsymbol{w}=(\hat{w}^1,\hat{w}^2)\in\hat{p}^1\times\hat{p}^2,\forall e\in T_h\},$$

$$I_h:H^2(\Omega)\to V_h,I_h|_e=I_e,I_e v=\hat{I}\hat{v}\circ F_e^{-1},$$

$$\Pi_h:(H^1(\Omega))^2\to\boldsymbol{W}_h,\Pi_h\boldsymbol{w}=(\Pi_h^1w^1,\Pi_h^2w^2),\Pi_h^i|_e=\Pi_e^i,\Pi_e^iw^i=\hat{\Pi}^i\hat{w}^i\circ F_e^{-1},i=1,2。$$

引理 1[11] 若 $u\in H^4(\Omega)$,则对任意的 $v\in V_h$,有:$(u-I_hu,v)=O(h^3)|u|_3\|v\|_0$,$(\nabla(u-I_hu),\nabla v)=O(h^3)|u|_4\|v\|_1$。

引理 2 若 $u\in H^4(\Omega)$,$\boldsymbol{p}=(p^1,p^2)\in(H^3(\Omega))^2$,则对任意的 $\boldsymbol{w}=(w^1,w^2)$,有:

$$(\nabla(u-I_hu),\boldsymbol{w})=O(h^3)\ |u|_4\|\boldsymbol{w}\|_0,(\boldsymbol{p}-\Pi_h\boldsymbol{p},\boldsymbol{w})=O(h^3)\ |\boldsymbol{p}|_3\|\boldsymbol{w}\|_0。$$

证明 对任意的 $\hat{w}^1\in\hat{p}^1$,考察函数 $B(\hat{u},\hat{w}^1)=\int_{\hat{e}}(\hat{u}-\hat{I}\hat{u})_{\hat{x}}\hat{w}^1$。

由 Sobolev 嵌入定理,有 $|B(\hat{u},\hat{w}^1)|\leqslant C\|\hat{u}\|_{4,\hat{e}}\|\hat{w}^1\|_{0,\hat{e}}$。根据插值函数的表达式可得,当 $\hat{u}$ 分别取 $\hat{x}^3$,$\hat{y}^3$ 时,相应的插值 $\hat{I}\hat{u}$ 分别为 $\hat{x}$,$\hat{y}$,代入 $B(\hat{u},\hat{w}^1)=\int_{\hat{e}}(\hat{u}-\hat{I}\hat{u})_{\hat{x}}\hat{w}^1$ 计算可得 $B(\hat{u},\hat{w}^1)=0$,$\forall\hat{u}\in P_3(\hat{e})$,这里 $P_3(\hat{e})$ 为 $\hat{e}$ 上的三次多项式空间。

由 Bramble-Hilbert 引理知 $|B(\hat{u},\hat{w}^1)|\leqslant C|\hat{u}|_{4,\hat{e}}\|\hat{w}^1\|_{0,\hat{e}}$。于是 $\int_{\hat{e}}(\hat{u}-\hat{I}\hat{u})_{\hat{x}}\hat{w}^1=O(1)|\hat{u}|_{4,\hat{e}}\|\hat{w}^1\|_{0,\hat{e}}$,通过仿射变换,可得 $\int_e(u-Iu)_xw^1=O(h^3)|u|_{4,e}\|w^1\|_{0,e}$,同理有 $\int_e(u-Iu)_yw^2=O(h^3)|u|_{4,e}\|w^2\|_{0,e}$。综合以上两式,即得引理 2 的第一式。第二式类似可得。 证毕

2 半离散格式下的超逼近分析

令 $\boldsymbol{p}=a\nabla u_t+b_1\nabla u+\int_0^t b_2\nabla u\,\mathrm{d}s$,则问题(1)等价于:

$$\begin{cases}u_t-\nabla\cdot\boldsymbol{p}=f(X,t),(X,t)\in\Omega\times(0,T]\\ \boldsymbol{p}=a\nabla u_t+b_1\nabla u+\int_0^t b_2\nabla u\,\mathrm{d}s,(X,t)\in\Omega\times(0,T]\\ u(X,t)=0,(X,t)\in\partial\Omega\times(0,T]\\ u(X,0)=u_0(X),X\in\Omega\end{cases},\tag{2}$$

问题(2)的变分问题为:求 $\{u,\boldsymbol{p}\}:[0,T]\to H_0^1(\Omega)\times(L^2(\Omega))^2$,使得:

$$\begin{cases}(u_t,v)+(\boldsymbol{p},\nabla v)=(f,v),\forall v\in H_0^1(\Omega)\\ (\boldsymbol{p},\boldsymbol{w})-(a\nabla u_t,\boldsymbol{w})-(b_1\nabla u,\boldsymbol{w})-\left(\int_0^t b_2\nabla u\,\mathrm{d}s,\boldsymbol{w}\right)=0,\forall\boldsymbol{w}\in(L^2(\Omega))^2\end{cases}。\tag{3}$$

与问题(3)对应的半离散逼近格式为:求 $\{u_h,\boldsymbol{p}_h\}:[0,T]\to V_0^h\times\boldsymbol{W}_h$,满足:

$$\begin{cases}(u_{ht},v_h)+(\boldsymbol{p}_h,\nabla v_h)=(f,v_h),\forall v_h\in V_0^h\\ (\boldsymbol{p}_h,\boldsymbol{w}_h)-(a\nabla u_{ht},\boldsymbol{w}_h)-(b_1\nabla u_h,\boldsymbol{w}_h)-\left(\int_0^t b_2\nabla u_h\,\mathrm{d}s,\boldsymbol{w}_h\right)=0,\forall\boldsymbol{w}_h\in\boldsymbol{W}_h,\\ u_h(X,0)=I_hu_0(X),X\in\Omega\end{cases}\tag{4}$$

其中 $V_0^h=\{v;v\in V_h,v|_{\partial\Omega}=0\}$。

由文献[4]易见,混合变分格式中的空间对 $H_0^1(\Omega)$ 和 $(L^2(\Omega))^2$ 以及混合有限元逼近中的空间对 V_0^h 和 $\boldsymbol{W}_h$ 的匹配分别满足连续和离散的 B-B 条件,故问题(3)和(4)均存在唯一解。

定理 1 设 $\{u,\boldsymbol{p}\}$ 和 $\{u_h,\boldsymbol{p}_h\}$ 分别是(3)和(4)的解,$u,u_t\in H^4(\Omega)$,$\boldsymbol{p}\in(H^3(\Omega))^2$,则有:

$$\|u_h-I_hu\|_1\leqslant Ch^3\left[\int_0^t(\|u\|_4^2+\|u_t\|_4^2)\,\mathrm{d}s\right]^{1/2},$$

$$\|\boldsymbol{p}_h-\Pi_h\boldsymbol{p}\|_0\leqslant Ch^3\left[\|\boldsymbol{p}\|_3^2+\|u\|_4^2+\|u_t\|_4^2+\int_0^t\left(\|u\|_4^2+\|u_t\|_4^2\right)\mathrm{d}s\right]^{1/2}。$$

证明 记 $u-u_h=(u-I_hu)+(I_hu-u_h)=\eta+\xi$,$\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_h=(\boldsymbol{p}-\Pi_h\boldsymbol{p})+(\Pi_h\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_h)=\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\theta}$,则由(3),(4)式可得下面的误差方程:

$$\begin{cases}(\xi_t,v_h)+(\boldsymbol{\theta},\nabla v_h)=-(\eta_t,v_h)-(\boldsymbol{r},\nabla v_h),\ \forall v_h\in V_0^h\\ (\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{w}_h)-(a\nabla\xi_t,\boldsymbol{w}_h)-(b_1\nabla\xi,\boldsymbol{w}_h)-\left(\int_0^t b_2\nabla\xi\mathrm{d}s,\boldsymbol{w}_h\right)=\\ \quad -(\boldsymbol{r},\boldsymbol{w}_h)+(a\nabla\eta_t,\boldsymbol{w}_h)+(b_1\nabla\eta,\boldsymbol{w}_h)+\left(\int_0^t b_2\nabla\eta\mathrm{d}s,\boldsymbol{w}_h\right),\ \forall \boldsymbol{w}_h\in\boldsymbol{W}_h\end{cases}。\tag{5}$$

一方面，在(5)式中令 $v_h=\xi_t,\boldsymbol{w}_h=\nabla\xi_t$，并将两式相减，可得

$$\|\xi_t\|_0^2+\left\|a^{\frac{1}{2}}\nabla\xi_t\right\|_0^2=-(\eta_t,\xi_t)-(a\nabla\eta_t,\nabla\xi_t)-(b_1\nabla\eta,\nabla\xi_t)-(b_1\nabla\xi,\nabla\xi_t)-\left(\int_0^t b_2\nabla\eta\mathrm{d}s,\nabla\xi_t\right)-\left(\int_0^t b_2\nabla\xi\mathrm{d}s,\nabla\xi_t\right)\triangleq\sum_{i=1}^6 A_i。\tag{6}$$

借助 Schwarz 不等式和 Young 不等式及引理 1，有：

$$|A_1|\leqslant Ch^6(\|u_t\|_3^2+\|\xi_t\|_0^2),\ |A_4|\leqslant C\|\nabla\xi\|_0^2+\varepsilon\|\nabla\xi_t\|_0^2,\ |A_6|\leqslant C\int_0^t\|\nabla\xi\|_0^2\mathrm{d}s+\varepsilon\|\nabla\xi_t\|_0^2。$$

对任意的 $\varphi\in W^{1,\infty}(\Omega)$，定义它在单元 e 上的平均值 $\overline{\varphi}|_e=\frac{1}{|e|}\int_e\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则 $|\varphi-\overline{\varphi}|\leqslant Ch\|\varphi\|_{1,\infty,e}$。利用插值理论和平均值技巧及引理 1，可得：

$$|A_2|=\left|\sum_e((a-\overline{a})\nabla\eta_t,\nabla\xi_t)_e+\sum_e(\overline{a}\nabla\eta_t,\nabla\xi_t)_e\right|\leqslant$$
$$Ch(\|\nabla\eta_t\|_0^2+\|\nabla\xi_t\|_0^2)+Ch^3\|u_t\|_4\|\nabla\xi_t\|_0\leqslant Ch^6\|u_t\|_4^2+\varepsilon\|\nabla\xi_t\|_0^2。$$

类似地，有 $|A_3|\leqslant Ch^6\|u\|_4^2+\varepsilon\|\nabla\xi_t\|_0^2$，$|A_5|\leqslant Ch^6\int_0^t\|u\|_4^2\mathrm{d}s+\varepsilon\|\nabla\xi_t\|_0^2$。

综合以上估计与(6)式，并取充分小的 ε，可得：

$$\|\nabla\xi_t\|_0^2\leqslant Ch^6\left(\|u\|_4^2+\|u_t\|_4^2+\int_0^t\|u\|_4^2\mathrm{d}s\right)+C\left(\|\nabla\xi\|_0^2+\int_0^t\|\nabla\xi\|_0^2\mathrm{d}s\right),$$

由于 $\nabla\xi(X,0)=0$，故有：

$$\|\nabla\xi\|_0^2\leqslant\int_0^t\|\nabla\xi_t\|_0^2\mathrm{d}s,\tag{7}$$

再利用积分不等式 $\int_0^t\left(\int_0^s\|\varphi(\boldsymbol{\tau})\|_0^2\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}\right)\mathrm{d}s\leqslant C\int_0^t\|\varphi(s)\|_0^2\mathrm{d}s$ 以及 Gronwall 引理，可得：

$$\|\nabla\xi_t\|_0^2\leqslant Ch^6\left(\|u\|_4^2+\|u_t\|_4^2+\int_0^t\|u\|_4^2\mathrm{d}s\right),\tag{8}$$

把(8)式代入(7)式即得定理 1 的第一式。

另一方面，在(5)式的第二式中令 $\boldsymbol{w}_h=\boldsymbol{\theta}$，类似于前面的估计，有：

$$\|\boldsymbol{\theta}\|_0^2=(a\nabla\xi_t,\boldsymbol{\theta})+(b_1\nabla\xi,\boldsymbol{\theta})+\left(\int_0^t b_2\nabla\xi\mathrm{d}s,\boldsymbol{\theta}\right)-(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\theta})+(a\nabla\eta_t,\boldsymbol{\theta})+(b_1\nabla\eta,\boldsymbol{\theta})+\left(\int_0^t b_2\nabla\eta\mathrm{d}s,\boldsymbol{\theta}\right)\leqslant$$
$$Ch^6\left(\|p\|_3^2+\|u\|_4^2+\|u_t\|_4^2+\int_0^t(\|u\|_4^2)\mathrm{d}s\right)+C\left(\|\nabla\xi\|_0^2+\|\nabla\xi_t\|_0^2+\int_0^t(\|\nabla\xi\|_0^2)\mathrm{d}s\right)+\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\theta}\|_0^2。$$

把前面已有的结果代入上式即得定理 1 的第二式。　　证毕

3 全离散格式下的超逼近分析

设 $0=t_0<t_1<\cdots<t_N=T$ 为$[0,T]$的等距分割，$\boldsymbol{\tau}=\frac{T}{N}$，$t_n=n\boldsymbol{\tau}$，$n=0,1,\cdots,N$，对任意的光滑函数 φ，定义 $\varphi^n=\varphi(t_n)$，$\partial_t\varphi^n=\frac{1}{\boldsymbol{\tau}}(\varphi^n-\varphi^{n-1})$。

与问题(3)对应的全离散逼近格式为：求 $\{U^n,\boldsymbol{P}^n\}\in V_0^h\times\boldsymbol{W}_h$，满足：

$$\begin{cases}(\partial_t U^n,v_h)+(\boldsymbol{P}^n,\nabla v_h)=(f^n,v_h),\ \forall v_h\in V_0^h\\ (\boldsymbol{P}^n,\boldsymbol{w}_h)-(a^n\nabla\partial_t U^n,\boldsymbol{w}_h)=(b_1^n\nabla U^n,\boldsymbol{w}_h)+\sum_{i=0}^{n-1}\boldsymbol{\tau}(b_2(X,t_n,t_i)\nabla U^i,\boldsymbol{w}_h)=0,\ \forall\boldsymbol{w}_h\in\boldsymbol{W}_h。\\ U^0=I_h u_0(X),X\in\Omega\end{cases}\tag{9}$$

在(3)式中令 $t=t_n$,可得:

$$\begin{cases}(\partial_t u^n,v)+(\boldsymbol{p}^n,\nabla v)=(f^n,v)+(R_1^n,v),\ \forall v\in H_0^1(\Omega),\\ (\boldsymbol{p}^n,\boldsymbol{w})-(a^n\nabla\partial_t u^n,\boldsymbol{w})=(b_1^n\nabla u^n,\boldsymbol{w})+\sum_{i=0}^{n-1}\boldsymbol{\tau}(b_2(X,t_n,t_i)\nabla u^i,\boldsymbol{w})+\\ \qquad(a^n\boldsymbol{R}_2^n,\boldsymbol{w})+(\boldsymbol{R}_3^n,\boldsymbol{w}),\ \forall \boldsymbol{w}\in(L^2(\Omega))^2,\end{cases}\tag{10}$$

其中 $R_1^n=\partial_t u^n-u_t^n$,$\boldsymbol{R}_2^n=\nabla u_t^n-\nabla\partial_t u^n$,$\boldsymbol{R}_3^n=\int_0^{t_n}b_2(X,t_n,s)\nabla u(X,s)\mathrm{d}s-\boldsymbol{\tau}\,b_2(X,t_n,t_i)\nabla u^i$。

定理2 设$\{U^n,\boldsymbol{P}^n\}$和$\{u^n,\boldsymbol{p}^n\}$分别是(9),(10)式的解,$u,u_t\in L^\infty(H^4)$,$u_{tt}\in L^\infty(H^1)$,$\boldsymbol{p}\in L^\infty((H^3)^2)$,则对任意的$1\leqslant n\leqslant N$,有:

$$\|U^n-I_hu^n\|_1\leqslant Ch^3M_1+C\boldsymbol{\tau}M_2,$$

$$\|\boldsymbol{P}^n-\Pi_h\boldsymbol{p}^n\|_0\leqslant Ch^3\left[M_1^2+\|u_t\|_{L^\infty(H^4)}^2+\|\boldsymbol{p}\|_{L^\infty((H^3)^2)}^2\right]^{\frac{1}{2}}+C\boldsymbol{\tau}\left[M_2^2+\|u_{tt}\|_{L^\infty(H^1)}^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

其中 $M_1^2=\|u\|_{L^\infty(H^4)}^2+\int_0^{t_n}\|u_t\|_4^2\mathrm{d}t$,$M_2^2=\int_0^{t_n}(\|u\|_1^2+\|u_t\|_1^2+\|u_{tt}\|_1^2)\mathrm{d}t$,$\|\varphi\|_{L^\infty(H^k)}=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\|\varphi\|_{H^k(\Omega)}$。

证明 记

$u^n-U^n=(u^n-I_hu^n)+(I_hu^n-U^n)=\eta^n+\xi^n$,$\boldsymbol{p}^n-\boldsymbol{P}^n=(\boldsymbol{p}^n-\Pi_h\boldsymbol{p}^n)+(\Pi_h\boldsymbol{p}^n-\boldsymbol{P}^n)=\boldsymbol{r}^n+\boldsymbol{\theta}^n$,则由(9),(10)式可得下面的误差方程:

$$\begin{cases}(\partial_t\xi^n,v_h)+(\boldsymbol{\theta}^n,\nabla v_h)=(R_1^n,v_h)-(\partial_t\eta^n,v_h)-(\boldsymbol{r}^n,\nabla v_h),\ \forall v_h\in V_0^h\\ (\boldsymbol{\theta}^n,\boldsymbol{w}_h)-(a^n\nabla\partial_t\xi^n,\boldsymbol{w}_h)=(a^n\boldsymbol{R}_2^n,\boldsymbol{w}_h)+(\boldsymbol{R}_3^n,\boldsymbol{w}_h)-(\boldsymbol{r}^n,\boldsymbol{w}_h)+(a^n\nabla\partial_t\eta^n,\boldsymbol{w}_h)+(b_1^n\nabla\xi^n,\boldsymbol{w}_h)+\\ \qquad(b_1^n\nabla\eta^n,\boldsymbol{w}_h)+\boldsymbol{\tau}\sum_{i=0}^{n-1}(b_2(X,t_n,t_i)\nabla\xi^i,\boldsymbol{w}_h)+\boldsymbol{\tau}\sum_{i=0}^{n-1}(b_2(X,t_n,t_i)\nabla\eta^i,\boldsymbol{w}_h),\ \forall\boldsymbol{w}_h\in\boldsymbol{W}_h\end{cases}。\tag{11}$$

一方面,在(11)式中令 $v_h=\partial_t\xi^n$,$\vec{\boldsymbol{w}}_h=\nabla\partial_t\xi^n$,并将两式相减,可得:

$$\begin{aligned}&\|\partial_t\xi^n\|_0^2+\left\|(a^n)^{\frac{1}{2}}\nabla\partial_t\xi^n\right\|_0^2=(R_1^n,\partial_t\xi^n)-(\partial_t\eta^n,\partial_t\xi^n)-(a^n\boldsymbol{R}_2^n,\nabla\partial_t\xi^n)-(\boldsymbol{R}_3^n,\nabla\partial_t\xi^n)-\\&(a^n\nabla\partial_t\eta^n,\nabla\partial_t\xi^n)-(b_1^n\nabla\eta^n,\nabla\partial_t\xi^n)-(b_1^n\nabla\xi^n,\nabla\partial_t\xi^n)-\boldsymbol{\tau}\sum_{i=0}^{n-1}(b_2(X,t_n,t_i)\nabla\xi^i,\nabla\partial_t\xi^n)-\\&\boldsymbol{\tau}\sum_{i=0}^{n-1}(b_2(X,t_n,t_i)\nabla\eta^i,\nabla\partial_t\xi^n)\triangleq\sum_{i=1}^{9}B_i。\end{aligned}\tag{12}$$

下面先给出 R_1^n,$\boldsymbol{R}_2^n$,$\boldsymbol{R}_3^n$ 的估计:

$$\|R_1^n\|_0^2=\left\|\boldsymbol{\tau}^{-1}\int_{t_{n-1}}^{t_n}(t_{n-1}-t)u_{tt}\mathrm{d}t\right\|_0^2\leqslant C\boldsymbol{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|u_{tt}\|_0^2\mathrm{d}t,$$

$$\|\boldsymbol{R}_2^n\|_0^2=\left\|\boldsymbol{\tau}^{-1}\int_{t_{n-1}}^{t_n}(t_{n-1}-t)\nabla u_{tt}\mathrm{d}t\right\|_0^2\leqslant C\boldsymbol{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|\nabla u_{tt}\|_0^2\mathrm{d}t,$$

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{R}_3^n\|_0^2&=\left\|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left[\int_{t_i}^{s}(b_2(X,t_n,t)\nabla u(X,t))_t\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}s\right\|_0^2\leqslant\\&n\sum_{i=0}^{n-1}\left\|\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left[\int_{t_i}^{s}(b_2(X,t_n,t)\nabla u(X,t))_t\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}s\right\|_0^2\leqslant\end{aligned}$$

$$Cn\boldsymbol{\tau}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left\|\int_{t_i}^{s}(b_2(X,t_n,t)\nabla u(X,t))_t\mathrm{d}t\right\|_0^2\mathrm{d}s\leqslant Cn\boldsymbol{\tau}^2\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left[\int_{t_i}^{s}\|(b_2(X,t_n,t)\nabla u(X,t))_t\|_0^2\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}s\leqslant$$

$$Cn\boldsymbol{\tau}^3\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\|(b_2(X,t_n,t)\nabla u(X,t))_t\|_0^2\mathrm{d}t\leqslant C\boldsymbol{\tau}^2\int_0^{t_n}(\|\nabla u\|_0^2+\|\nabla u_t\|_0^2)\mathrm{d}t。$$

利用与估计 A_i 类似的技巧以及对 R_1^n,$\boldsymbol{R}_2^n$,$\boldsymbol{R}_3^n$ 的估计结果,B_i 可依次估计为

$$|B_1|\leqslant C\|R_1^n\|_0^2+\frac{1}{2}\|\partial_t\xi^n\|_0^2\leqslant C\boldsymbol{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|u_{tt}\|_0^2\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\|\partial_t\xi^n\|_0^2,$$

$$|B_2|\leqslant Ch^3\|\partial_tu^n\|_3\|\partial_t\xi^n\|_0\leqslant Ch^6\|\partial_tu^n\|_3^2+\frac{1}{2}\|\partial_t\xi^n\|_0^2\leqslant Ch^6\boldsymbol{\tau}^{-1}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|u_t\|_3^2\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\|\partial_t\xi^n\|_0^2,$$

$$|B_3| \leqslant C\|\boldsymbol{R}_2^n\|_0^2 + \varepsilon\|\nabla\partial_t\xi^n\|_0^2 \leqslant C\boldsymbol{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|\nabla u_{tt}\|_0^2 \mathrm{d}t + \varepsilon\|\nabla\partial_t\xi^n\|_0^2,$$

$$|B_4| \leqslant C\|\boldsymbol{R}_3^n\|_0^2 + \varepsilon\|\nabla\partial_t\xi^n\|_0^2 \leqslant C\boldsymbol{\tau}^2\int_0^{t_n}(\|\nabla u\|_0^2 + \|\nabla u_t\|_0^2)\,\mathrm{d}t + \varepsilon\|\nabla\partial_t\xi^n\|_0^2,$$

$$|B_5| = \Big|\sum_e ((a^n - \overline{a^n})\nabla\partial_t\eta^n, \nabla\partial_t\xi^n)_e + \sum_e (\overline{a^n}\,\nabla\partial_t\eta^n, \nabla\partial_t\xi^n)_e\Big| \leqslant$$

$$Ch^6\|\partial_t u^n\|_4^2 + \varepsilon\|\nabla\partial_t\xi^n\|_0^2 \leqslant Ch^6\boldsymbol{\tau}^{-1}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|u_t\|_4^2 \mathrm{d}t + \varepsilon\|\nabla\partial_t\xi^n\|_0^2,$$

$$|B_6| = \Big|\sum_e ((b_1^n - \overline{b_1^n})\nabla\eta^n, \nabla\partial_t\xi^n)_e + \sum_e (\overline{b_1^n}\,\nabla\eta^n, \nabla\partial_t\xi^n)_e\Big| \leqslant Ch^6\|u^n\|_4^2 + \varepsilon\|\nabla\partial_t\xi^n\|_0^2,$$

$$|B_7| \leqslant C\|\nabla\xi^n\|_0^2 + \varepsilon\|\nabla\partial_t\xi^n\|_0^2,\ |B_8| \leqslant C\boldsymbol{\tau}\sum_{i=0}^{n-1}\|\nabla\xi^i\|_0^2 + \varepsilon\|\nabla\partial_t\xi^n\|_0^2,$$

$$|B_9| = \boldsymbol{\tau}\left|\sum_{i=0}^{n-1}\left[\sum_e ((b_2(X,t_n,t_i) - \overline{b_2(X,t_n,t_i)})\nabla\eta^i, \nabla\partial_t\xi^n)_e + \sum_e (\overline{b_2(X,t_n,t_i)}\,\nabla\eta^i, \nabla\partial_t\xi^n)_e\right]\right| \leqslant$$

$$Ch^6\boldsymbol{\tau}\sum_{i=0}^{n-1}\|u^i\|_4^2 + \varepsilon\|\nabla\partial_t\xi^n\|_0^2。$$

在以上估计中取充分小的 ε，并结合(12)式，可得：

$$\|\nabla\partial_t\xi^n\|_0^2 \leqslant Ch^6\left(\boldsymbol{\tau}^{-1}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|u_t\|_4^2 \mathrm{d}t + \|u^n\|_4^2 + \boldsymbol{\tau}\sum_{i=0}^{n-1}\|u^i\|_4^2\right) + C\boldsymbol{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|u_{tt}\|_1^2 \mathrm{d}t +$$

$$C\boldsymbol{\tau}^2\int_0^{t_n}(\|u\|_1^2 + \|u_t\|_1^2)\,\mathrm{d}t + C\boldsymbol{\tau}\sum_{i=0}^{n-1}\|\nabla\xi^i\|_0^2 + C\|\nabla\xi^n\|_0^2。 \tag{13}$$

由于 $\nabla\xi^0 = 0$，故有：

$$\|\nabla\xi^n\|_0^2 \leqslant \|\nabla\xi^n - \nabla\xi^{n-1} + \nabla\xi^{n-1} - \nabla\xi^{n-2} + \cdots + \nabla\xi^1 - \nabla\xi^0\|_0^2 \leqslant C\boldsymbol{\tau}\sum_{j=1}^{n}\|\nabla\partial_t\xi^j\|_0^2。 \tag{14}$$

把(13)式代入(14)式，可得

$$\|\nabla\xi^n\|_0^2 \leqslant Ch^6\left(\int_0^{t_n}\|u_t\|_4^2 \mathrm{d}t + \boldsymbol{\tau}\sum_{j=1}^{n}\|u^j\|_4^2 + \boldsymbol{\tau}^2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j-1}\|u^i\|_4^2\right) + C\boldsymbol{\tau}^2\int_0^{t_n}\|u_{tt}\|_1^2 \mathrm{d}t +$$

$$C\boldsymbol{\tau}^3\sum_{j=1}^{n}\int_0^{t_j}(\|u\|_1^2 + \|u_t\|_1^2)\,\mathrm{d}t + C\boldsymbol{\tau}^2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j-1}\|\nabla\xi^i\|_0^2 + C\boldsymbol{\tau}\sum_{j=1}^{n}\|\nabla\xi^j\|_0^2 \leqslant$$

$$Ch^6\left(\int_0^{t_n}\|u_t\|_4^2 \mathrm{d}t + \|u\|_{L^\infty(H^4)}^2\right) + C\boldsymbol{\tau}^2\int_0^{t_n}(\|u\|_1^2 + \|u_t\|_1^2 + \|u_{tt}\|_1^2)\,\mathrm{d}t + C\boldsymbol{\tau}\sum_{j=1}^{n}\|\nabla\xi^j\|_0^2。 \tag{15}$$

在(15)式中取充分小的 $\boldsymbol{\tau}$，使得 $1 - C\boldsymbol{\tau} > 0$，由离散的 Gronwall 引理即得定理 2 的第一式。

另一方面，在(11)式的第二式中令 $\boldsymbol{w}_h = \boldsymbol{\theta}^n$，有：

$$\|\boldsymbol{\theta}^n\|_0^2 = (a^n\boldsymbol{R}_2^n, \boldsymbol{\theta}^n) + (\boldsymbol{R}_3^n, \boldsymbol{\theta}^n) + (a^n\,\nabla\partial_t\xi^n, \boldsymbol{\theta}^n) + (a^n\,\nabla\partial_t\eta^n, \boldsymbol{\theta}^n) + (b_1^n\,\nabla\xi^n, \boldsymbol{\theta}^n) + (b_1^n\,\nabla\eta^n, \boldsymbol{\theta}^n) - (\boldsymbol{r}^n, \boldsymbol{\theta}^n) +$$

$$\boldsymbol{\tau}\sum_{i=0}^{n-1}(b_2(X,t_n,t_i)\nabla\xi^i, \boldsymbol{\theta}^n) + \boldsymbol{\tau}\sum_{i=0}^{n-1}(b_2(X,t_n,t_i)\nabla\eta^i, \boldsymbol{\theta}^n) \leqslant$$

$$Ch^6\left(\boldsymbol{\tau}^{-1}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|u_t\|_4^2 \mathrm{d}t + \|p^n\|_3^2 + \|u^n\|_4^2 + \boldsymbol{\tau}\sum_{i=0}^{n-1}\|u^i\|_4^2\right) +$$

$$C\boldsymbol{\tau}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|u_{tt}\|_1^2 \mathrm{d}t + C\boldsymbol{\tau}^2\int_0^{t_n}(\|u\|_1^2 + \|u_t\|_1^2)\,\mathrm{d}t + C\boldsymbol{\tau}\sum_{i=0}^{n-1}\|\nabla\xi^i\|_0^2 + C(\|\nabla\xi\|_0^2 + \|\nabla\partial_t\xi^n\|_0^2)。$$

把前面已有的结果代入上式即得定理 2 的第二式。　　证毕

4 结论

本文利用不完全双二次元 Q_2^- 及其梯度空间构造的新混合元模式对伪抛物型积分微分方程进行了分析。在半离散和向后欧拉全离散格式下，分别导出了原始变量 u 在 H^1-模和中间变量 $\boldsymbol{p}$ 在 L^2-模意义下的超逼近性质，利用该性质可直接得到收敛性结果，进一步还可通过插值后处理技术得到整体超收敛，从而达到改善解的精度的目的，这也是目前偏微分方程数值求解的热点之一。

参考文献：

[1] 车海涛.伪抛物型积分微分方程的混合有限元误差估计[J].工程数学学报，2009，26(6)：1033-1038.
CHE H T. Error estimates for mixed finite element methods for pseudo-parabolic intergo-differential equations[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics，2009，26(6)：1033-1038.

[2] 高育红.伪抛物型积分-微分方程的 H^1-Galerkin 混合元法[J].内蒙古大学学报(自然科学版)，2009，40(2)：157-161.
GAO Y H. H^1-Galerkin mixed finite element method for pseudo-parabolic partial integro-differential equations[J]. Journal of Inner Mongolia University，2009，40(2)：157-161.

[3] 崔霞.Sobolev-Volterra 投影与积分微分方程有限元数值分析[J].应用数学学报，2001，24(3)：441-455.
CUI X. Sobolev-Volterra projection and numerical analysis of finite element methods for integro-differential equations[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica，2001，24(3)：441-455.

[4] 陈绍春，陈红如.二阶椭圆问题新的混合元格式[J].计算数学，2010，32(2)：213-218.
CHEN S C，CHEN H R. New mixed element schemes for second order elliptic problem[J]. Mathematica Numerica Sinica，2010，32(2)：213-218.

[5] 李磊，孙萍，罗振东.抛物方程一种新混合有限元格式及误差分析[J].数学物理学报，2012，32A(6)：1158-1165.
LI L，SUN P，LUO Z D. A new mixed finite element formulation and error estimates for parabolic equations[J]. Acta Mathematica Scientia，2012，32A(6)：1158-1165.

[6] 石东洋，张亚东.抛物型方程一个新的非协调混合元超收敛性分析及外推[J].计算数学，2013，35(4)：337-352.
SHI D Y，ZHANG，Y D. Superconvergence and extrapolation analysis of a new nonconforming mixed finite element approximation for parabolic equation[J]. Mathematica Numerica Sinica，2013，35(4)：337-352.

[7] 石东洋，李明浩.二阶椭圆问题一种新格式的高精度分析[J]. 应用数学学报，2014，37(1)：45-58.
SHI D Y，LI M H. High accuracy analysis of new schemes for second order elliptic problem for recurrent event data[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica，2014，37(1)：45-58.

[8] 史艳华，石东洋.Sobolev 方程新混合元方法的高精度分析[J].系统科学与数学，2014，34(4)：452-463.
SHI Y H，SHI D Y. High accuracy analysis of a new mixed finite element method for Sobolev equation[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences，2014，34(4)：452-463.

[9] 石东洋，王芬玲，樊明智，等.Sine-Gordon 方程的最低阶各向异性混合元高精度分析新途径[J].计算数学，2015，37(2)：148-161.
SHI D Y，WANG F L，FAN M Z，et al. A new approach of the lowest order anisotropic mixed mixed finite element high accuracy analysis for nonlinear Sine-Gordon equation[J]. Mathematica Numerica Sinica，2015，37(2)：148-161.

[10] 赵艳敏，石东洋，王芬玲.非线性 Schrödinger 方程新混合元方法的高精度分析[J].计算数学，2015，37(2)：162-178.
ZHAO Y M，SHI D Y，WANG F L. High accuracy analysis of a new mixed finite element method for nonlinear Schrödinger equation[J]. Mathematica Numerica Sinica，2015，37(2)：162-178.

[11] 郝晓斌.非协调有限元的构造及其应用[D].郑州：郑州大学，2008.
HAO X B. Constructure and application of nonconforming finite element[D]. Zhengzhou：Zhengzhou University，2008.

A New Mixed Finite Element Analysis for Pseudo-parabolic Intergo-differential Equation

DIAO Qun，MAO Fengmei

(School of Mathematics and Statistics，Pingdingshan University，Pingdingshan Henan 467000，China)

Abstract：[**Purposes**]A new mixed finite element pattern for pseudo-parabolic intergo-differential equation is studied. [**Methods**] Though Bramble-Hilbert lemma，the spaces of incomplete biquadratic element Q_2^- and its gradient are explored. [**Findings**]A new high precision theory on element is proved. [**Conclusions**]The superclose properties for the primitive variable u in H^1-norm and the intermediate variable $\boldsymbol{p}$ in L^2-norm are obtained respectively for semi-discrete and the backward Euler fully discrete schemes.

Keywords：pseudo-parabolic intergo-differential equation；mixed finite element method；Bramble-Hilbert lemma；semi-discrete and fully discrete schemes；superclose

（责任编辑　黄　颖）