乘性噪声作用下线性模型中的随机共振*

周登荣, 周玉荣
(攀枝花学院 工程技术学院, 四川 攀枝花 617000)

摘 要:随机共振是指在一定噪声强度和外部激励的共同作用下,动力学系统的输出响应达到最大值的一种非线性现象。本文研究了乘性噪声作用下线性模型的随机共振现象。根据噪声的特性和线性系统理论,得到了系统输出幅度增益的精确表达式。研究发现,输出幅度增益是激励信号频率以及系统参数的非单调函数,即出现了随机共振现象。输出幅度增益随噪声强度、自相关率的增大而单调地增大。选择适当的参数,系统输出幅度增益可以大于 1,即有噪声时的系统输出平均幅度可以大于无噪声时的输出幅度增益。该结果对于微弱信号检测有一定的意义,对于传统的线性系统理论是一个有益的补充。

关键词:随机共振;乘性噪声;线性模型
中图分类号:O211.64 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2008)03-0070-03

随机共振是指在有噪声的系统中,其输出信号(均值、信噪比等)是系统、噪声或激励信号的某个参数(噪声强度、激励信号的幅度或频率等)的非单调函数,这样一种非线性现象。随机共振现象不仅在非线性系统[1-7]中存在,线性系统[8-10]中同样也发现了随机共振。随机共振理论可以用于微弱信号的检测[3]以及比较器阵列中输出信噪比[4]的提高等方面。本文从实际电路模型[11]出发,研究了受乘性噪声和信号调制噪声作用的线性系统中的随机共振现象。

考虑电压源 V_i 激励的 RL 电路,由于受电磁场等因素的影响,电感 L 会受到扰动

$$L = L_0 + \eta(t) \tag{1}$$

其中 L_0 是常数。设 $\eta(t)$ 为随机电报噪声,其均值和相关函数为 $\langle\eta(t)\rangle = 0$, $\langle\eta(t_1)\eta(t_2)\rangle = D\exp(-\lambda|t_1 - t_2|)$,$D$、$\lambda$ 为噪声的强度和相关率,$\lambda = \tau^{-1}$,τ 是噪声的相关时间。

在电感 L 上的输出电压 V_0 满足线性微分方程

$$L\frac{\mathrm{d}V_0}{\mathrm{d}t} + RV_0 = L\frac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}t}, V_i = A\sin(\Omega t) \tag{2}$$

1 输出幅度增益

将(1)式代入(2)式,得

$$[L_0 + \eta(t)]\frac{\mathrm{d}V_0}{\mathrm{d}t} + RV_0 = [L_0 + \eta(t)]A\Omega\cos(\Omega t) \tag{3}$$

对(3)式两端随机平均,得

$$L_0\frac{\mathrm{d}\langle V_0\rangle}{\mathrm{d}t} + \eta\frac{\mathrm{d}\langle V_0\rangle}{\mathrm{d}t} + R\langle V_0\rangle = L_0A\Omega\cos(\Omega t) \tag{4}$$

(3)式两端乘以 $\eta(t)$,再随机平均,有

$$L_0\eta\frac{\mathrm{d}\langle V_0\rangle}{\mathrm{d}t} + D\frac{\mathrm{d}\langle V_0\rangle}{\mathrm{d}t} + R\langle\eta V_0\rangle = DA\Omega\cos(\Omega t) \tag{5}$$

利用随机电报噪声的性质[12]

$$\eta\frac{\mathrm{d}\langle V_0\rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\langle\eta V_0\rangle}{\mathrm{d}t} + \lambda\langle\eta V_0\rangle$$

把上式代入(4)、(5)式,有

$$D\frac{\mathrm{d}\langle V_0\rangle}{\mathrm{d}t} + L_0\frac{\mathrm{d}\langle\eta V_0\rangle}{\mathrm{d}t} + (L_0\lambda + R)\langle\eta V_0\rangle = DA\Omega\cos(\Omega t) \tag{6}$$

$$L_0\frac{\mathrm{d}\langle V_0\rangle}{\mathrm{d}t} + R\langle V_0\rangle + \frac{\mathrm{d}\langle\eta V_0\rangle}{\mathrm{d}t} + \lambda\langle\eta V_0\rangle = L_0A\Omega\cos(\Omega t) \tag{7}$$

设系统的稳态平均输出电压 $\langle V_0\rangle = a\cos(\Omega t + \varphi)$,联立求解(6)、(7)式,可得

$$a = A\Omega\sqrt{\frac{m_1^2 + m_2^2}{m_3^2 + m_4^2}}, \tan(\varphi) = \frac{m_1m_4 + m_2m_3}{m_2m_4 - m_1m_3}$$

其中

$$m_1 = L_0R + \lambda(L_0^2 - D), m_2 = \Omega(L_0^2 - D)$$

* 收稿日期:2007-09-23 修回日期:2008-01-07
资助项目:攀枝花学院博士基金(No. B2006-01)
作者简介:周登荣(1967-),男,讲师,硕士,研究方向为集成电路系统设计。

$$m_3 = R(R + L_0\lambda) - \Omega^2(L_0^2 - D)$$
$$m_4 = 2L_0R + \lambda(L_0^2 - D)$$

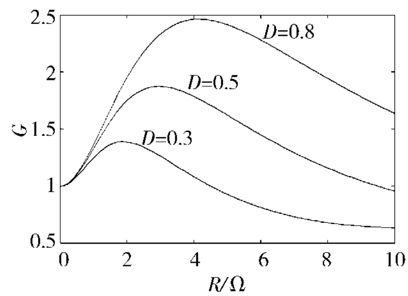
系统的输出幅度增益定义为

$$G = \frac{a}{a_N}, a_N = \frac{AL\Omega}{\sqrt{R_0^2 + L^2\Omega^2}} \qquad (8)$$

其中 a_N 为无噪声时系统的输出信号幅度。

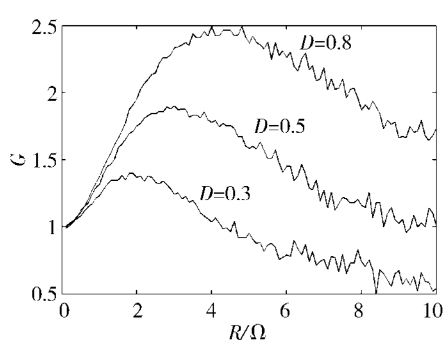
2 结论与讨论

下面根据(8)式,讨论系统输出幅度增益与噪声及系统参数的非单调关系,如图1～7。图中参数分别是电阻 R、电感 L、信号频率 Ω。



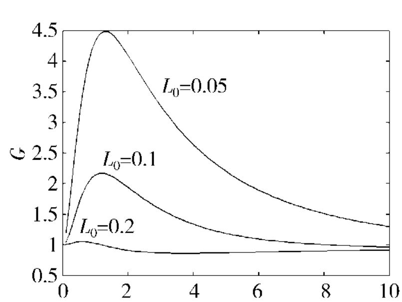
$L_0 = 0.2, \lambda = 5, \Omega = 5$

图1 噪声强度 D 取不同值时输出幅度增益 G 与电阻 R 的关系曲线



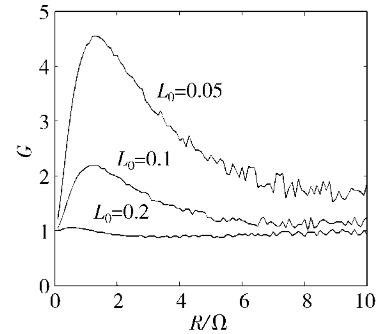
$L_0 = 0.2, \lambda = 5, \Omega = 5$

图2 噪声强度 D 取不同值时输出幅度增益 G 与电阻 R 的关系仿真曲线



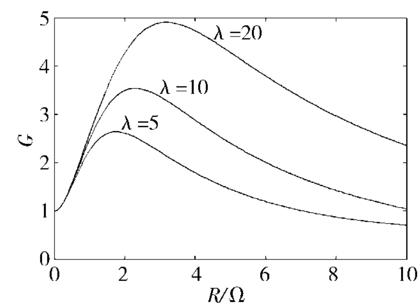
$D = 0.2, \lambda = 1, \Omega = 3$

图3 电阻 L_0 取不同值时输出幅度增益 G 与电阻 R 的关系曲线



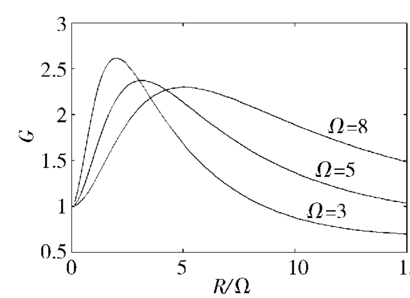
$D = 0.2, \lambda = 1, \Omega = 3$

图4 电阻 L_0 取不同值时输出幅度增益 G 与电阻 R 的关系仿真曲线



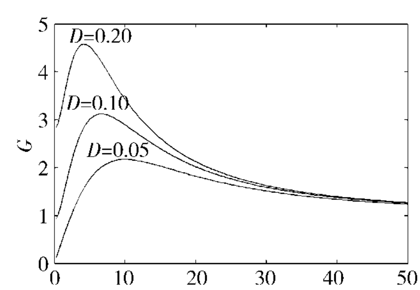
$L_0 = 0.1, D = 0.2, \Omega = 4$

图5 噪声相关率 λ 取不同值时输出幅度增益 G 与电阻 R 的关系曲线



$L_0 = 0.15, \lambda = 3, D = 0.5$

图6 信号频率 Ω 取不同值时输出幅度增益 G 与电阻 R 的关系曲线



$R = 2, L_0 = 0.05, \lambda = 2$

图7 噪声强度 D 取不同值时输出幅度增益 G 与信号频率 Ω 的关系曲线

由图1～7可见,选择适当的参数,系统输出幅

度增益可以大于 1,即有噪声时的系统输出平均幅度可以大于无噪声时的输出幅度,该结果对于微弱信号检测有一定的意义,即可以调节参数,使系统出现随机共振,从系统平均输出中得到增强了的微弱信号。其中,图2 是在相同条件下对图1 的仿真图,图4 是在相同条件下对图3 的仿真图。同时也发现随着电阻的增大,输出幅度增益先单调增加,在达到最大值后再单调减小,因此观察到了由参数(电阻 R) 导致的随机共振现象。由图 1、3 可见,随着噪声强度、噪声相关率的增大,输出幅度增益也增大,其共振峰向左移动 ;由图3 可见,输出幅度增益随电感 L_0 的增大而减小 ;由图 5 可见,输出幅度增益的最大值随着信号频率的增大向右移动,而且,输出幅度增益也是信号频率的非单调函数 ;当 $R < 2$ 时,随信号频率的增大,输出幅度增益单调减小,而当 $R > 5$ 时,输出幅度增益随信号频率的增大而单调增大。由图 7 可见,随着信号频率的增大,输出幅度增益出现了一个最大值,即' 真实的 "随机共振现象。

综上所述,当电感受到噪声扰动时,系统输出幅度增益是激励信号频率和电阻的非单调函数 ;且输出幅度增益随噪声强度、自相关率的增大而增大,随电感的增大而单调减小。该结果对于传统的线性系统理论和电路的分析都是一个有益的补充。

参考文献:

[1] BENZI R, SUTERA A, VULPIANI A. The Mechanism of Stochastic Resonance[J]. Journal of Physics A, 1981, 14 (11): 543-547.

[2] HU Gang, DING Da-fu. Higher Signal to Noise Ratio Obtained by Applying Stochastic Resonance System[J]. 北京师范大学学报(自然科学版), 1992, 28 (3): 348-355.

[3] WU Xiao-jing, GUO Wei-ming, CAI Wen-sheng, et al. A Method Based on Stochastic Resonance for the Detection of Weak Analytical Signal [J], Talanta, 2003, 61(2): 863-869.

[4] 祝恒江, 李蓉, 温孝东. 利用随机共振在强噪声下提取信息信号[J]. 物理学报, 2003, 52(10): 2404-2408.

[5] FAUVE S, HESLOT F. Stochastic Resonance in a Bistable System [J]. Phys Lett A, 1983, 97(1-2): 5-7.

[6] LUO X Q. Stochastic Resonance Driven by Two Different Kinds of Colored Noise in a Bistable System [J]. Phys Rev E, 2003, 67(2): 02110401-02110413.

[7] GUO F, ZHOU Y R, JIANG S Q, et al. Stochastic Resonance in a Mono-stable System with Multiplicative and Additive Noise[J]. Journal of Physics A, 2006, 39: 13861-13868.

[8] BARZYKIN A V, SCKI K. Periodically Driven Linear System with Multiplicative Colored Noise. Physics Rev E, 1998, 57 (6): 6555-6563.

[9] GITTERMAN M. Harmonic Oscillator with Fluctuating Damping Parameter [J]. Phys Rev E, 2004, 69 (4): 041101-041104.

[10] 周玉荣, 郭锋, 庞小峰. 具有调制二值噪声线性系统的随机共振 [J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2007, 24 (1): 48-51.

[11] SHAPIRO V E, LOGINOV V M. Formulae of Differentiaton and Their Use for Solving Stochastic Equations [J]. Journal of Physics A, 1978, 11: 563-574.

[12] 谭劲. 谐波对并联电容器的影响及抑制[J]. 西华师范大学学报(自然科学版), 2005, 26 (2): 187-190.

Stochastic Resonance of a Linear Model Subject under Multiplicative Noise

ZHOU Deng-rong, ZHOU Yu-rong

(College of Technology and Engineering, Sichuan Panzhihua University, Panzhihua Sichuan 617000, China)

Abstract: Stochastic resonance is a nonlinear effect that accounts for the optimum response of a dynamical system in an external stimulation at certain noise intensity. In this paper, the phenomenon of stochastic resonance in a linear model subject under multiplicative noise is investigated. By applying the noise character and the linear system theory, the explicit expression of the output amplitude gain (OAG) of the linear system is obtained. It is shown that the OAG is a non-monotonic function of the frequency of the stimulating signal and of the parameters of the system, i. e., the stochastic resonance phenomenon occurs. In addition, the OAG increases monotonically with the increase of the noise strength and the noise correlation rate. By choosing appropriate parameters of the noise and the system, the OAG of the system can be larger than one, i. e., the OAG of the noisy system can be larger than that of the noise free system. The result is of certain significance in weak signal detection, and provides a good supplement to conventional linear system theory.

Key words: stochastic resonance; multiplicative noise; linear model

(责任编辑 欧红叶)