2017年度重庆市出版专项基金资助栏目 DOI:10.11721/cqnuj20180101

运筹学与控制论

受相互作用影响下的项目组合选择问题的有效求解方法*

李星梅[1],张又中[1],吕志坚[2]

(1. 华北电力大学 经济与管理学院,北京 102206;2. 北京市科学技术情报研究所,北京 100044)

摘要:【目的】相互作用关系的高阶项目组合选择问题通常被转化为一个整数多项式规划问题,利用传统方法需要使用大量的不等式约束,但是引入大量非紧不等式约束会造成严重的计算负担,针对这个问题提出了新的有效求解方法。【方法】将高阶项目组合选择模型转化为混合0-1规划,利用一个新的线性化方法,将大量非紧不等式通过等式约束代替,然后采用分枝定界法来得到最优解。【结果】通过大量数值实验,展示了新方法在解决考虑相互作用关系的高阶项目组合选择问题时的计算效率。【结论】结果表明,所提出的新方法能够有效提高求解此类问题的计算效率。

关键词:高阶项目组合选择;相互作用关系;混合0-1规划问题

中图分类号:O221.2;F062.4 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2018)01-0001-10

通常管理者为了获取更多的利润或完成组织的战略目标,需要在同一时间段内执行多个项目。也就是说,管理者必须从候选项目中选择出最适合的那几个项目,组成一个有效的项目组合。一个合理的项目组合能够保证资源的有效利用,并且收益更多;相反,错误的选择会损害组织的利益和名声。但大多数情况下,决策者面临着许多不可避免的现实约束,如资源、成本预算等,这也使得选择一个正确的项目组合并非易事。因此,在经济与管理领域,项目组合选择问题(Project portfolio selection problem, PPSP)引起了人们的很多关注。目前对项目组合选择的研究主要集中于管理科学和运筹优化方面,如投资组合选择[1-2]、研发(Research and development, R&D)[3-5]、成本预算[6-7]、信息系统/信息科技(Information system/information technology, IS/IT)[8]以及公私合作模式(Public-private partnership, PPP)[9-10]等。

为了更好地反映现实,目前文献中的模型都会较为关注一些实际的和重要的因素,如相互作用关系[11]、基数约束[12]、调度[13]、雇员能力[14]及可分性[15]等。本文主要考虑相互作用关系。不过,值得指出的是,本文对于项目组合选择问题的讨论可以扩展到包括其他因素的更完备的模型上。

收益相关性和资源相关性是项目相互作用关系的两种主要类型。根据实际经验,当两个或更多相关的项目被选择并执行时,企业可能会获得额外的收入,称为协同收益。当协同作用发生时,总的收益增加[8,11],而低于各项目收益和的那部分叫做竞争损失[15-16]。本文同时考虑了协同收益和竞争损失。至于资源相关性,是指当相关的项目在同一时间段被执行时,组织可能会进行更有效的资源配置,甚至比原来资源量的需求更少。

讨论项目 i 和 j 的相关性需要引入0-1变量 x_i 和 x_j,令 $x_i=1$ 表示项目被选中,$x_i=0$ 表示项目被放弃,$x_ix_j=1$ 表示项目 i 和 j 具有相互作用关系[7,15,17]。这种表示方法会导致PPSP成为一个整数多项式规划问题。例如,两个项目 i 和 j 的相关性通过一个二次项来表示,3个项目 i,j 和 k 之间的相互作用则用一个三次项表示。2阶和3阶的模型在目前的文献中最为常见。本文认为,高阶多次项可以用于表示4个及4个以上项目间的相互作用。

考虑到PPSP问题的复杂性(NP难问题),启发式算法经常被用于解决这个问题。但是,这种方法不能保证得到全局最优解。为了得到最优解,目前的最优化方法使用一些转化技术来线性化PPSP模型中的乘积项[18-19]。Glover[19]的方法是一个很好的尝试,但是他们使用了大量的不等式约束,会造成计算负担。因此,本文提出一种新的线性化方法,使用更少的约束来更有效率地解决高阶PPSP问题。

* 收稿日期:2017-11-29 修回日期:2017-12-30 网络出版时间:2018-01-18 15:21

资助项目:国家自然科学基金(No.71772060);北京市财政项目(No.PXM2017-178214-000005)

第一作者简介:李星梅,女,教授,研究方向为项目选择及项目管理,E-mail:xingmeil@163.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20180118.1521.002.html

此外,执行的项目越多,企业会获得更多的收益。但是一个公司的能力,如总资金、工作人数和管理成本等会影响到执行项目的个数。一些文献指出,一个组织同时执行的项目太多,可能会导致该组织运行混乱,资金周转不灵等等[20-21]。因此,限制最优组合中的最大项目个数绝对必要。

本文后续结构如下:第一节简要介绍了考虑相互作用关系的高阶项目组合选择问题模型;第二节详细叙述了本文提出的新模型,并比较了传统模型与新模型的问题规模;第三节通过数值实验,比较了不同模型对于解决高阶问题的效率;最后一节给出结论。

1 高阶 PPSP 模型及初步转化

实际上,当决策者选择项目时,该项目所影响的市场份额,提升的品牌认可度,企业形象以及其他方面都是需要考虑的。但同时应深刻认识到,利润是维持企业不断前进的主要动力。基于这个事实,本文假设决策者在进行项目选择时只关心利润最大化。由此可以得出4阶的初始PPSP模型(模型1),该模型也可以扩展到更高阶的情况,为便于说明,本文主要讨论4阶模型。

模型 1

$$\max \quad \sum_{i=1}^{N} r_i x_i + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} r_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=1}^{N-2}\sum_{j=i+1}^{N-1}\sum_{k=j+1}^{N} r_{i,j,k} x_i x_j x_k - \sum_{i=1}^{N-3}\sum_{j=i+1}^{N-2}\sum_{k=j+1}^{N-1}\sum_{l=k+1}^{N} r_{i,j,k,l} x_i x_j x_k x_l, \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{N} d_i^s x_i - \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} d_{i,j}^s x_i, x_j + \sum_{i=1}^{N-2}\sum_{j=i+1}^{N-1}\sum_{k=j+1}^{N} d_{i,j,k}^s x_i x_j x_k - \sum_{i=1}^{N-3}\sum_{j=i+1}^{N-2}\sum_{k=j+1}^{N-1}\sum_{l=k+1}^{N} d_{i,j,k,l}^s x_i x_j x_k x_l \leqslant b_s,$$
$$s=1,\cdots,S, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \leqslant m。 \tag{3}$$

其中,$x_i \in \{0,1\}$,$i=1,\cdots,N$。N 表示候选项目数,变量 x_i 的取值表示项目 i 被选择($x_i=1$)还是放弃($x_i=0$)。向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ 代表了一个项目组合,m 是一个正整数,代表执行项目的数目限制。

目标函数(1)表示执行项目的总收益,r_i 是单独运作项目 i 产生的收益,$r_{i,j}$,$r_{i,j,k}$ 和 $r_{i,j,k,l}$ 分别是来自共同执行项目 i,j;i,j,k 以及 i,j,k,l 产生的额外收益。由于竞争损失的存在,$r_{i,j}$,$r_{i,j,k}$ 和 $r_{i,j,k,l}$ 不总是正值。

资源约束(2)保证执行项目所需的资源总量限制为 b_s,$s=1,\cdots,S$。S 是不同种类资源的数目。与收益类似,d_i^s 是项目 i 单独执行时所需资源 s 的总量。$d_{i,j}^s$,$d_{i,j,k}^s$ 和 $d_{i,j,k,l}^s$ 则分别是不同项目同时执行时所需的资源总量。

显然,模型1是一个多项式整数规划问题。实际上,这类问题属于NP难问题,即除非{P=NP},否则不能在一个理想的时间内得到最优解。Glover为了解决这一问题,提出了一种线性技术来将它转化为混合0-1整数规划问题。Glover引入了一些额外变量,相应的,还补充了不等式约束来代替初始模型中的乘积项。参考他们的工作,可以得到一个线性重构模型(模型2)如下。

模型 2

$$\max \quad \sum_{i=1}^{N} r_i x_i + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} r_{i,j} y_{i,j} + \sum_{i=1}^{N-2}\sum_{j=i+1}^{N-1}\sum_{k=j+1}^{N} r_{i,j,k} z_{i,j,k} + \sum_{i=1}^{N-3}\sum_{j=i+1}^{N-2}\sum_{k=j+1}^{N-1}\sum_{l=k+1}^{N} r_{i,j,k,l} w_{i,j,k,l}, \tag{4}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{N} x_i \leqslant m,$$

$$\sum_{i=1}^{N} d_i^s x_i - \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} d_{i,j}^s y_{i,j} + \sum_{i=1}^{N-2}\sum_{j=i+1}^{N-1}\sum_{k=j+1}^{N} d_{i,j,k}^s z_{i,j,k} - \sum_{i=1}^{N-3}\sum_{j=i+1}^{N-2}\sum_{k=j+1}^{N-1}\sum_{l=k+1}^{N} d_{i,j,k,l}^s w_{i,j,k,l} \leqslant b_s, s=1,\cdots,S, \tag{5}$$

$$y_{i,j} \leqslant x_i, y_{i,j} \leqslant x_j, y_{i,j} \geqslant x_i + x_j - 1, i,j=1,\cdots,N, i<j, \tag{6}$$

$$z_{i,j,k} \leqslant x_i, z_{i,j,k} \leqslant x_j, z_{i,j,k} \leqslant x_k, z_{i,j,k} \geqslant x_i + x_j + x_k - 2, i,j,k=1,\cdots,N, i<j<k, \tag{7}$$

$$w_{i,j,k,l} \leqslant x_i, w_{i,j,k,l} \leqslant x_j, w_{i,j,k,l} \leqslant x_k, w_{i,j,k,l} \leqslant x_l, w_{i,j,k,l} \geqslant x_i + x_j + x_k + x_l - 3,$$
$$i,j,k,l=1,\cdots,N, i<j<k<l。 \tag{8}$$

其中,$x_i \in \{0,1\}$,$y_{i,j}$,$z_{i,j,k}$,$w_{i,j,k,l} \geqslant 0$,$i,j,k,l=1,\cdots,N$,$i<j<k<l$。$y_{i,j}=x_i x_j$,$z_{i,j,k}=x_i x_j x_k$ 且 $w_{i,j,k,l}=x_i x_j x_k x_l$,$i,j,k,l=1,\cdots,N$,$i<j<k<l$。

定义 3 个正连续向量 $\boldsymbol{y}=(y_{1,2},\cdots,y_{1,N},y_{2,3},\cdots,y_{N-1,N})$，$\boldsymbol{z}=(z_{1,2,3},\cdots,z_{1,2,N},z_{2,3,4},\cdots,z_{N-2,N-1,N})$，$\boldsymbol{w}=(w_{1,2,3,4},\cdots,w_{1,2,3,N},w_{1,3,4,5},\cdots,w_{N-3,N-2,N-1,N})$。

注意到，重构模型中的 3 个向量 $\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{z}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 是正连续向量而不是二维向量。此外，线性不等式约束(6)～(8)式保证了当 $x_i\in\{0,1\}$时，有 $y_{i,j}=x_ix_j$，$z_{i,j,k}=x_ix_jx_k$ 且 $w_{i,j,k,l}=x_ix_jx_kx_l$。初始模型 1 和重构模型 2 之间的等价性也由此得出。这个方法的确把乘积项转化为了线性项，但是使用了 $\frac{3N(N-1)}{2}+\frac{4N(N-1)(N-2)}{6}+\frac{5N(N-1)(N-2)(N-3)}{24}$ 个线性不等式约束((6)～(8)式)。

2 新线性技术下的 PPSP 转化模型

注意到初始模型中的(3)式，需要分别讨论：1) $\sum_{i=1}^{N}x_i=m$；2) $\sum_{i=1}^{N}x_i\leqslant m$ 这两种情况。

首先，考虑基数约束为等式的情况，即 $\sum_{i=1}^{N}x_i=m,0<m<N$ 。注意到，

$$x_i\sum_{j=1,j\neq i}^{N}x_j=(m-1)x_i,\tag{9}$$

$$x_i\sum_{j=1,j\neq i}^{N}x_j\sum_{k=1,k\neq i,k\neq j}^{N}x_k=\frac{(m-1)(m-2)}{2}x_i,\tag{10}$$

$$x_i\sum_{j=1,j\neq i}^{N}x_j\sum_{k=1,k\neq i,k\neq j}^{N}x_k\sum_{l=1,l\neq i,l\neq j,l\neq k}^{N}x_l=\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6}x_i。\tag{11}$$

那么，乘积项 x_ix_j，$x_ix_jx_k$ 和 $x_ix_jx_kx_l$ 就能够通过定理 1 引入的辅助变量 $y_{i,j}$，$z_{i,j,k}$ 和 $w_{i,j,k,l}$ 来进行线性化。

定理 1　对向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_N)\in\{0,1\}^N$，$\boldsymbol{y}=(y_{1,2},\cdots,y_{1,N},y_{2,3},\cdots,y_{N-1,N})\in[0,1]^{N(N-1)/2}$，$\boldsymbol{z}=(z_{1,2,3},\cdots,z_{1,2,N},z_{2,3,4},\cdots,z_{N-2,N-1,N})\in[0,1]^{N(N-1)(N-2)/6}$，$\boldsymbol{w}=(w_{1,2,3,4},\cdots,w_{1,2,3,N},w_{1,3,4,5},\cdots,w_{N-3,N-2,N-1,N})\in[0,1]^{N(N-1)(N-2)(N-3)/24}$，如果：

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{N}x_i=m,\sum_{j>i}^{N}y_{i,j}+\sum_{j<i}^{N}y_{j,i}+\sum_{j>i}^{N}\sum_{k>j}^{N}z_{i,j,k}+\sum_{j<i}^{N}\sum_{k>i}^{N}z_{j,i,k}+\\ \sum_{j<k}^{N}\sum_{k<i}^{N}z_{j,k,i}+\sum_{j>i}^{N}\sum_{k>j}^{N}\sum_{l>k}^{N}w_{i,j,k,l}+\sum_{j<i}^{N}\sum_{k>i}^{N}\sum_{l>k}^{N}w_{j,i,k,l}+\\ \sum_{j>k}^{N}\sum_{k<i}^{N}\sum_{l>i}^{N}w_{j,k,i,l}+\sum_{j<k}^{N}\sum_{k<l}^{N}\sum_{l<i}^{N}w_{j,k,l,i}=\left[(m-1)+\frac{(m-1)(m-2)}{2}+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6}\right]x_i,\\ i=1,\cdots,N,\end{gathered}\tag{12}$$

则有 $x_ix_j=y_{i,j}$，$x_ix_jx_k=z_{i,j,k}$，$x_ix_jx_kx_l=w_{i,j,k,l}$，$i,j,k,l=1,\cdots,N$ 且 $i<j<k<l$。

为了证明定理 1，从(9)～(11)式入手。

证明　由(9)～(11)式可得，若 $x_i=1$，则(9)式右边的值等价于 $(m-1)+\frac{(m-1)(m-2)}{2}+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6}$，否则为 0。

现在考虑 $m\geqslant 4$ 的情况，若 $m\geqslant 4$，则存在某个 i'，j'，k'，l' 且 i'，j'，k'，l' 互不相等，使得 $x_{i'}=x_{j'}=x_{k'}=x_{l'}=1$。分析定理 1 中(12)式所有的 i,j,k,l，其中 i,j,k,l 互不相等，有：

1) 若 $i=i'$，那么 $x_{i'}=1$，且

$$\begin{gathered}\sum_{j>i'}^{N}y_{i',j}+\sum_{j<i'}^{N}y_{j,i'}+\sum_{j>i'}^{N}\sum_{k>j}^{N}z_{i',j,k}+\sum_{j<i'}^{N}\sum_{k>i'}^{N}z_{j,i',k}+\sum_{j<k}^{N}\sum_{k<i'}^{N}z_{j,k,i'}+\sum_{j>i'}^{N}\sum_{k>j}^{N}\sum_{l>k}^{N}w_{i',j,k,l}+\sum_{j<i'}^{N}\sum_{k>i'}^{N}\sum_{l>k}^{N}w_{j,i',k,l}+\\ \sum_{j>k}^{N}\sum_{k<i'}^{N}\sum_{l>i'}^{N}w_{j,k,i',l}+\sum_{j<k}^{N}\sum_{k<l}^{N}\sum_{l<i'}^{N}w_{j,k,l,i'}=(m-1)+\frac{(m-1)(m-2)}{2}+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6}。\end{gathered}$$

若 $i\neq i'$，那么 $x_i=y_{i,j}=z_{i,j,k}=w_{i,j,k,l}=0$。

2) 若 $j=j'$,那么 $x_{j'}=1$,且

$$\sum_{i<j'}^{N}y_{i,j'}+\sum_{i>j'}^{N}y_{j',i}+\sum_{i>j'}^{N}\sum_{k>i}^{N}z_{j',i,k}+\sum_{i<j'}^{N}\sum_{k>j'}^{N}z_{i,j',k}+\sum_{i<k}^{N}\sum_{k<j'}^{N}z_{i,k,j'}+\sum_{i>j'}^{N}\sum_{k>i}^{N}\sum_{l>k}^{N}w_{j',i,k,l}+\sum_{i<j'}^{N}\sum_{k>j'}^{N}\sum_{l>k}^{N}w_{i,j',k,l}+\sum_{i<k}^{N}\sum_{k<j'}^{N}\sum_{l>j'}^{N}w_{i,k,j',l}+\sum_{i<k}^{N}\sum_{k<l}^{N}\sum_{l<j'}^{N}w_{i,k,l,j'}=(m-1)+\frac{(m-1)(m-2)}{2}+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6}。$$

若 $j\neq j'$,那么 $x_j=y_{i,j}=z_{i,j,k}=w_{i,j,k,l}=0$。

3) 若 $k=k'$,那么 $x_{k'}=1$,且

$$\sum_{i<k'}^{N}y_{i,k'}+\sum_{i>k'}^{N}y_{k',i}+\sum_{i>k'}^{N}\sum_{j>i}^{N}z_{k',i,j}+\sum_{i<k'}^{N}\sum_{j>k'}^{N}z_{i,k',j}+\sum_{i<j}^{N}\sum_{j<k'}^{N}z_{i,j,k'}+\sum_{i>k'}^{N}\sum_{j>i}^{N}\sum_{l>i}^{N}w_{k',i,j,l}+\sum_{i<k'}^{N}\sum_{j>k'}^{N}\sum_{l>j}^{N}w_{i,k',j,l}+\sum_{i<j}^{N}\sum_{j<k'}^{N}\sum_{l>k'}^{N}w_{i,j,k',l}+\sum_{i<j}^{N}\sum_{j<l}^{N}\sum_{l<k'}^{N}w_{i,j,l,k'}=(m-1)+\frac{(m-1)(m-2)}{2}+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6}。$$

若 $k\neq k'$,那么 $x_k=y_{i,k}=z_{i,j,k}=w_{i,j,k,l}=0$。

4) 若 $l=l'$,那么 $x_{l'}=1$,且

$$\sum_{i<l'}^{N}y_{i,l'}+\sum_{i>l'}^{N}y_{l',i}+\sum_{i>l'}^{N}\sum_{j>i}^{N}z_{l',i,j}+\sum_{i<l'}^{N}\sum_{j>l'}^{N}z_{i,l',j}+\sum_{i<j}^{N}\sum_{j<l'}^{N}z_{i,j,l'}+\sum_{i>l'}^{N}\sum_{j>i}^{N}\sum_{k>j}^{N}w_{l',i,j,k}+\sum_{i<l'}^{N}\sum_{j>l'}^{N}\sum_{k>j}^{N}w_{i,l',j,k}+\sum_{i<j}^{N}\sum_{j<l'}^{N}\sum_{k>l'}^{N}w_{i,j,l',k}+\sum_{i<j}^{N}\sum_{j<k}^{N}\sum_{k<l'}^{N}w_{i,j,k,l'}=(m-1)+\frac{(m-1)(m-2)}{2}+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6}。$$

若 $l\neq l'$,那么 $x_l=y_{i,l}=z_{i,j,l}=w_{i,j,k,l}=0$。

综上可得,$x_i=x_j=x_k=x_l=y_{i,j}=y_{i,k}=y_{i,l}=y_{j,k}=y_{j,l}=y_{k,l}=y_{i,j,k}=y_{i,j,l}=y_{j,k,l}=w_{i,j,k,l}=0$ 对所有 $i=j=k=l=1,\cdots,N(i<j<k<l)$ 成立,除非 $i=i',j=j',k=k',l=l'$。也即,若 $(x_{i'},x_{j'},x_{k'},x_{l'})=(1,1,1,1)$,那么 $y_{i',j'}=y_{i',k'}=y_{i',l'}=y_{j',k'}=y_{j',l'}=y_{k',l'}=y_{i',j',k'}=y_{i',j',l'}=y_{j',k',l'}=w_{i',j',k',l'}=1$。

由此可知,$x_ix_j=y_{i,j}$,$x_ix_k=y_{i,k}$,$x_ix_l=y_{i,l}$,$x_jx_k=y_{j,k}$,$x_jx_l=y_{j,l}$,$x_kx_l=y_{k,l}$,$x_ix_jx_k=z_{i,j,k}$,$x_ix_jx_l=z_{i,j,l}$,$x_jx_kx_l=z_{j,k,l}$ 且 $x_ix_jx_kx_l=w_{i,j,k,l}$ 对所有 $i=j=k=l=1,\cdots,N(i<j<k<l)$ 成立。 证毕

根据等式约束 $\sum_{i=1}^{N}x_i=m$ 及定理1,可以得到一个新的转化PPSP模型。

模型3 $\max \sum_{i=1}^{N}r_ix_i+\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}r_{i,j}y_{i,j}+\sum_{i=1}^{N-2}\sum_{j=i+1}^{N-1}\sum_{k=j+1}^{N}r_{i,j,k}z_{i,j,k}+\sum_{i=1}^{N-3}\sum_{j=i+1}^{N-2}\sum_{k=j+1}^{N-1}\sum_{l=k+1}^{N}r_{i,j,k,l}w_{i,j,k,l}$,

$$\text{s.t.}\quad \sum_{i=1}^{N}d_i^sx_i-\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}d_{i,j}^sy_{i,j}+\sum_{i=1}^{N-2}\sum_{j=i+1}^{N-1}\sum_{k=j+1}^{N}d_{i,j,k}^sz_{i,j,k}-\sum_{i=1}^{N-3}\sum_{j=i+1}^{N-2}\sum_{k=j+1}^{N-1}\sum_{l=k+1}^{N}d_{i,j,k,l}^sw_{i,j,k,l}\leqslant b_s,s=1,\cdots,S,$$

$$\sum_{i=1}^{N}x_i=m,\ \sum_{j>i}^{N}y_{i,j}+\sum_{j<i}^{N}y_{j,i}+\sum_{j>i}^{N}\sum_{k>j}^{N}z_{i,j,k}+\sum_{j<i}^{N}\sum_{k>i}^{N}z_{j,i,k}+\sum_{j<k}^{N}\sum_{k<i}^{N}z_{j,k,i}+\sum_{j>i}^{N}\sum_{k>j}^{N}\sum_{l>k}^{N}w_{i,j,k,l}+\sum_{j<i}^{N}\sum_{k>i}^{N}\sum_{l>k}^{N}w_{j,i,k,l}+\sum_{j>k}^{N}\sum_{k<i}^{N}\sum_{l>i}^{N}w_{j,k,i,l}+\sum_{j<k}^{N}\sum_{k<l}^{N}\sum_{l<i}^{N}w_{j,k,l,i}=Gx_i,i=1,\cdots,N。$$

其中,G 是一个常数,$G=(m-1)+\frac{(m-1)(m-2)}{2}+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6}$。

模型3考虑了基数约束 $\sum_{i=1}^{N}x_i=m$,且只使用了 N 个等式约束便保证了 $y_{i,j}=x_ix_j$,$z_{i,j,k}=x_ix_jx_k$ 及 $w_{i,j,k,l}=x_ix_jx_kx_l$,所以可以期望该模型的求解效率会更高。

除了等式约束的情况,还需要考虑不等式基数约束,即 $\sum_{i=1}^{N}x_i\leqslant m,0<m<N$。为了解决这个问题,引入一个新的辅助整数变量 $Q=\sum_{t=1}^{m}tu_t$,其中,$u_t\in\{0,1\},t=1,\cdots,m$,且有 $\sum_{t=1}^{m}u_t=1$。

注意到 $Q\in\{1,\cdots,m\}$,实际上 Q 代表了一个组合的基数。用 Q 替代(12)式中的 m,则(12)式的右边变为 $\left[(Q-1)+\frac{(Q-1)(Q-2)}{2}+\frac{(Q-1)(Q-2)(Q-3)}{6}\right]x_i$,这是一个非线性项。可以用下面的定理来解决这个非线性项。

定理 2　对一个 0-1 变量集合，$x_i \in \{0,1\}, i=1,\cdots,N, \sum_{i=1}^{N} x_i \leqslant m, 0<m<N$，一个正连续变量 $\Phi_i, i=1,\cdots,N$，0-1 变量 $u_t, t=1,\cdots,m$，和一个整数变量 $Q=\sum_{t=1}^{m} t u_t$，若将非线性项 $\left[(Q-1)+\frac{(Q-1)(Q-2)}{2}+\frac{(Q-1)(Q-2)(Q-3)}{6}\right]x_i$ 转化为线性项 Φ_i，需满足下面的线性系统：

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{t=1}^{m} t u_t, \tag{13}$$

$$\sum_{t=1}^{m} u_t = 1, \tag{14}$$

$$\sum_{t=1}^{m}\left[(t-1)+\frac{(t-1)(t-2)}{2}+\frac{(t-1)(t-2)(t-3)}{6}\right]u_t + M(x_i-1) \leqslant \Phi_i \leqslant$$
$$\sum_{t=1}^{m}\left[(t-1)+\frac{(t-1)(t-2)}{2}+\frac{(t-1)(t-2)(t-3)}{6}\right]u_t + M(1-x_i), i=1,\cdots,N, \tag{15}$$

$$\Phi_i \leqslant M x_i, i=1,\cdots,N。\tag{16}$$

其中，M 是一个足够大的常数，可以定义为 $(m-1)+\frac{(m-1)(m-2)}{2}+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6}$。

证明　由(14)，(15)式可知，$1 \leqslant \sum_{i=1}^{N} x_i \leqslant m$，假设存在某个特殊的 u_t，则非线性项

$$\left[(Q-1)+\frac{(Q-1)(Q-2)}{2}+\frac{(Q-1)(Q-2)(Q-3)}{6}\right]x_i$$

可以表示为 $\sum_{t=1}^{m}\left[(t-1)+\frac{(t-1)(t-2)}{2}+\frac{(t-1)(t-2)(t-3)}{6}\right]u_t$。

此外，1）如果 $x_i=1$，那么由(15) 式可知 $\Phi_i=\sum_{t=1}^{m}\left[(t-1)+\frac{(t-1)(t-2)}{2}+\frac{(t-1)(t-2)(t-3)}{6}\right]u_t$；2）如果 $x_i=0$，那么由(16) 式可知 $\Phi_i=0$。

由此可知，非线性项 $\left[(Q-1)+\frac{(Q-1)(Q-2)}{2}+\frac{(Q-1)(Q-2)(Q-3)}{6}\right]x_i$ 可由该线性系统转化为 Φ_i。　　证毕

直到目前为止，虽然乘积项和非线性项都已被转化，但是模型中依旧存在大量的变量。为了进一步减少计算负担，引入下面的引理 1。

引理 1[12]　给定一个正整数 $m, 0<m<N$，令 $g_{p,t}$ 满足 $1+\sum_{p=1}^{h} 2^{p-1} g_{p,t}=t, t=1,\cdots,m$，其中 $h=\lceil \log_2 m \rceil$，令向量 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_m) \in \mathbf{R}_+^m$，二维向量 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_h)$，如果 $\sum_{t=1}^{m} u_t=1, \lambda_p=\sum_{t=1}^{m} g_{p,t} u_t, p=1,\cdots,h$，那么 $u_t \in \{0,1\}, t=1,\cdots,m$。

根据引理 1，可以只使用$\lceil \log_2 m \rceil$个二维变量来减少模型中的变量个数。

定理 3　对一个给定的整数 m，$0<m<N$，令 $h=\lceil \log_2 m \rceil$，$g_{p,t}$ 的值是二维的且满足 $1+\sum_{p=1}^{h} 2^{p-1} g_{p,t}=t, t=1,\cdots,m$。对一个正变量 $\Phi_i, i=1,\cdots,N$，二维向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_N) \in \{0,1\}^N$ 且有 $\sum_{i=1}^{N} x_i \leqslant m$，$\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_h) \in \{0,1\}^h$，非负向量 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_m) \in [0,\infty]^m$，有界向量 $\boldsymbol{y}=(y_{1,2},\cdots,y_{1,N},y_{2,3},\cdots,y_{N-1,N}) \in [0,1]^{N(N-1)/2}$，$\boldsymbol{z}=(z_{1,2,3},\cdots,z_{1,2,N},z_{2,3,4},\cdots,z_{N-2,N-1,N}) \in [0,1]^{N(N-1)(N-2)/6}$，$\boldsymbol{w}=(w_{1,2,3,4},\cdots,w_{1,2,3,N},w_{1,3,4,5},\cdots,w_{N-3,N-2,N-1,N}) \in [0,1]^{N(N-1)(N-2)(N-3)/24}$，若满足下面的线性系统：

$$\sum_{j>1}^{N} y_{i,j} + \sum_{j<i}^{N} y_{j,i} + \sum_{j>i}^{N}\sum_{k>j}^{N} z_{i,j,k} + \sum_{j<i}^{N}\sum_{k>i}^{N} z_{j,i,k} + \sum_{j<k}^{N}\sum_{k<i}^{N} z_{j,k,i} + \sum_{j>i}^{N}\sum_{k>j}^{N}\sum_{l>k}^{N} w_{i,j,k,l} + \sum_{j<i}^{N}\sum_{k>i}^{N}\sum_{l>k}^{N} w_{j,i,k,l} +$$

$$\sum_{j>k}^{N}\sum_{k<i}^{N}\sum_{l>i}^{N}w_{j,k,i,l}+\sum_{j<k}^{N}\sum_{k<l}^{N}\sum_{l<i}^{N}w_{j,k,l,i}=\Phi_i,i=1,\cdots,N, \tag{17}$$

$$\lambda_p=\sum_{t=1}^{m}g_{p,t}u_t,p=1,\cdots,h, \tag{18}$$

$$\sum_{t=1}^{m}u_t=1, \tag{19}$$

$$\sum_{i=1}^{N}x_i=\sum_{t=1}^{m}tu_t, \tag{20}$$

$$\sum_{t=1}^{m}\left[(t-1)+\frac{(t-1)(t-2)}{2}+\frac{(t-1)(t-2)(t-3)}{6}\right]u_t+M(x_i-1)\leqslant\Phi_i\leqslant$$
$$\sum_{t=1}^{m}\left[(t-1)+\frac{(t-1)(t-2)}{2}+\frac{(t-1)(t-2)(t-3)}{6}\right]u_t+M(1-x_i),i=1,\cdots,N, \tag{21}$$

$$\Phi_i\leqslant Mx_i,i=1,\cdots,N, \tag{22}$$

则有 $x_ix_j=y_{i,j}$,$x_ix_jx_k=z_{i,j,k}$,$x_ix_jx_kx_l=w_{i,j,k,l}$,且 $i,j,k,l=1,\cdots,N,i<j<k<l$。

证明 根据(18),(19)式及引理1,向量 $\boldsymbol{u}$ 是二维变量。此外,由于定理2的条件存在,所以(19)~(22)式可以将非线性项转化为 Φ_i。又由于定理1,可得 $x_ix_j=y_{i,j}$,$x_ix_jx_k=z_{i,j,k}$,$x_ix_jx_kx_l=w_{i,j,k,l}$ 对 $i,j,k,l=1,\cdots,N,i<j<k<l$ 成立。 证毕

定理3表明,如果所选项目的个数限制为 $\sum_{i=1}^{N}x_i\leqslant m$,那么可以使用$\lceil\log_2 m\rceil$个0-1变量,$\frac{N(N-1)}{2}+\frac{N(N-1)(N-2)}{6}+\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{24}$个有界变量,$N$个非负变量以及$4N+2+\lceil\log_2 m\rceil$个线性等式约束将乘积项 x_ix_j,$x_ix_jx_k$ 和 $x_ix_jx_kx_l$ 转化为 $y_{i,j}$,$z_{i,j,k}$ 和 $w_{i,j,k,l}$。

根据定理3,可以将初始模型转化为一个线性混合0-1规划问题,由此得到模型4。

模型4 $\max \sum_{i=1}^{N}r_ix_i+\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}r_{i,j}y_{i,j}+\sum_{i=1}^{N-2}\sum_{j=i+1}^{N-1}\sum_{k=j+1}^{N}r_{i,j,k}z_{i,j,k}+\sum_{i=1}^{N-3}\sum_{j=i+1}^{N-2}\sum_{k=j+1}^{N-1}\sum_{l=k+1}^{N}r_{i,j,k,l}w_{i,j,k,l}$

s.t. (5),(17)~(22)式。

其中,$M=(m-1)+\frac{(m-1)(m-2)}{2}+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6}$,$x_i\in\{0,1\}$,$i=1,\cdots,N$,$y_{i,j},z_{i,j,k},w_{i,j,k,l}\geqslant0$,$i,j,k,l=1,\cdots,N,i<j<k<l$。

表1归纳了重构模型2、转化模型3和模型4所需0-1变量、连续变量和线性约束的个数。

比较这3个不同模型,可知:

1) 3个模型的0-1变量和连续变量的个数是同阶的。

2) 为了确保 $y_{i,j}=x_ix_j$,$z_{i,j,k}=x_ix_jx_k$ 且 $w_{i,j,k,l}=x_ix_jx_kx_l$,重构模型2使用了大量的线性非紧不等式约束((6)~(8)式),而转化模型使用了 N 个线性等式约束。正如Kettani和Oral[22]指出的,混合整数规划中的不等式约束通常会影响计算效率,因为许多约束是无效的。

因此,在解决大规模PPSP问题时,可以推知转化模型的运行效率比重构模型高很多。在第3节将会通过具体的数值实验来验证这一想法。

3 算例分析

本节分为两个部分:1) 第一部分给出了一个简易示例,用于展示新技术的转化过程;2) 为了客观地比较解决大规模问题时的计算效率,第二部分即通过具体的数值实验来验证。实验参数的基本信息和结果也体现在第二部分。所有的算例均在配备了Intel(R) Core(TM) i7-4720hq @2.60 GHz处理器,12 GB RAM和Windows 10(64位)操作系统的计算机上运行,并通过GAMS的混合整数规划求解器BARON求解,所有算例的计算时间均限定在10 800 s内。

表 1 不同模型的规模比较

Tab. 1 The size comparison of different models

模型	0-1 变量个数	连续变量个数	线性等式约数个数	线性不等式约数个数
模型 2	N	$\frac{N(N-1)}{2}+\frac{N(N-1)(N-2)}{6}+\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{24}$	1	$S+\frac{3N(N-1)}{2}+\frac{2N(N-1)(N-2)}{3}+\frac{5N(N-1)(N-2)(N-3)}{24}$
模型 3	N	$\frac{N(N-1)}{2}+\frac{N(N-1)(N-2)}{6}+\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{24}$	$1+N$	S
模型 4	$N+\lceil \log_2 m \rceil$	$\frac{N(N-1)}{2}+\frac{N(N-1)(N-2)}{6}+\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{24}+m+N$	$N+2+\lceil \log_2 m \rceil$	$S+3N$

3.1 一个简易示例

为了较清楚地展示本文提出的技术，先考虑一个 4 阶的小例子。假设 $S=2,N=5$，且只有项目 1,2,3,4 具有相互关系作用，即当项目 1,2,3,4 被同时选择并执行时产生相互作用。由此，可得初始模型如下：

$$\begin{aligned}
\max\quad & 3x_1+2x_2+6x_3+x_4+6x_5+2x_1x_2x_3x_4,\\
\text{s.t.}\quad & 30x_1+25x_2+50x_3+15x_4+10x_5-30x_1x_2x_3x_4\leqslant 100,\\
& 20x_1+30x_2+60x_3+20x_4+8x_5-20x_1x_2x_3x_4\leqslant 100,\\
& x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\leqslant 4,\\
& x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\in\{0,1\}。
\end{aligned}$$

利用本文的线性化技术，需要使用连续变量 $\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ 和 $\boldsymbol{w}$。考虑到基数约束，可以得到模型 $3'\left(\sum_{i=1}^{N}x_i=4\right)$ 和模型 $4'\left(\sum_{i=1}^{N}x_i\leqslant 4\right)$ 具体如下。

模型 $3'$

$$\begin{aligned}
\max\quad & 3x_1+2x_2+6x_3+x_4+6x_5+2w_{1,2,3,4},\\
\text{s.t.}\quad & 30x_1+25x_2+50x_3+15x_4+10x_5-30w_{1,2,3,4}\leqslant 100,\\
& 20x_1+30x_2+60x_3+20x_4+8x_5-20w_{1,2,3,4}\leqslant 100,\\
& x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=4,
\end{aligned}$$

$$y_{1,2}+y_{1,3}+y_{1,4}+y_{1,5}+z_{1,2,3}+z_{1,2,4}+z_{1,2,5}+z_{1,3,4}+z_{1,3,5}+z_{1,4,5}+w_{1,2,3,4}+w_{1,2,3,5}+w_{1,2,4,5}+w_{1,3,4,5}=7x_1,$$
$$y_{2,3}+y_{2,4}+y_{2,5}+y_{1,2}+z_{2,3,4}+z_{2,3,5}+z_{2,4,5}+z_{1,2,3}+z_{1,2,4}+z_{1,2,5}+w_{2,3,4,5}+w_{1,2,3,4}+w_{1,2,3,5}+w_{1,2,4,5}=7x_2,$$
$$y_{3,4}+y_{3,5}+y_{1,3}+y_{2,3}+z_{3,4,5}+z_{1,3,4}+z_{1,3,5}+z_{2,3,4}+z_{2,3,5}+z_{1,2,3}+w_{1,3,4,5}+w_{2,3,4,5}+w_{1,2,3,4}+w_{1,2,3,5}=7x_3,$$
$$y_{4,5}+y_{1,4}+y_{2,4}+y_{3,4}+z_{1,4,5}+z_{2,4,5}+z_{3,4,5}+z_{1,2,4}+z_{1,3,4}+z_{2,3,4}+w_{1,2,4,5}+w_{1,3,4,5}+w_{2,3,4,5}+w_{1,2,3,4}=7x_4,$$
$$y_{1,5}+y_{2,5}+y_{3,5}+y_{4,5}+z_{1,2,5}+z_{1,3,5}+z_{1,4,5}+z_{2,3,5}+z_{2,4,5}+z_{3,4,5}+w_{1,2,3,5}+w_{1,2,4,5}+w_{1,3,4,5}+w_{2,3,4,5}=7x_5。$$

在模型 $3'$ 中，x,y,z 和 w 的个数分别是 5,10,10 和 5；0-1 变量、连续变量和线性约束的个数分别是 5,25 和 8(其中有 6 个等式约束和 2 个不等式约束)。

模型 $4'$

$$\begin{aligned}
\max\quad & 3x_1+2x_2+6x_3+x_4+6x_5+2w_{1,2,3,4},\\
\text{s.t.}\quad & 30x_1+25x_2+50x_3+15x_4+10x_5-30w_{1,2,3,4}\leqslant 100,\\
& 20x_1+30x_2+60x_3+20x_4+8x_5-20w_{1,2,3,4}\leqslant 100,
\end{aligned}$$

$$y_{1,2}+y_{1,3}+y_{1,4}+y_{1,5}+z_{1,2,3}+z_{1,2,4}+z_{1,2,5}+z_{1,3,4}+z_{1,3,5}+z_{1,4,5}+w_{1,2,3,4}+w_{1,2,3,5}+w_{1,2,4,5}+w_{1,3,4,5}=\Phi_1,$$
$$y_{2,3}+y_{2,4}+y_{2,5}+y_{1,2}+z_{2,3,4}+z_{2,3,5}+z_{2,4,5}+z_{1,2,3}+z_{1,2,4}+z_{1,2,5}+w_{2,3,4,5}+w_{1,2,3,4}+w_{1,2,3,5}+w_{1,2,4,5}=\Phi_2,$$

$$y_{3,4}+y_{3,5}+y_{1,3}+y_{2,3}+z_{3,4,5}+z_{1,3,4}+z_{1,3,5}+z_{2,3,4}+z_{2,3,5}+z_{1,2,3}+w_{1,3,4,5}+w_{2,3,4,5}+w_{1,2,3,4}+w_{1,2,3,5}=\Phi_3,$$
$$y_{4,5}+y_{1,4}+y_{2,4}+y_{3,4}+z_{1,4,5}+z_{2,4,5}+z_{3,4,5}+z_{1,2,4}+z_{1,3,4}+z_{2,3,4}+w_{1,2,4,5}+w_{1,3,4,5}+w_{2,3,4,5}+w_{1,2,3,4}=\Phi_4,$$
$$y_{1,5}+y_{2,5}+y_{3,5}+y_{4,5}+z_{1,2,5}+z_{1,3,5}+z_{1,4,5}+z_{2,3,5}+z_{2,4,5}+z_{3,4,5}+w_{1,2,3,5}+w_{1,2,4,5}+w_{1,3,4,5}+w_{2,3,4,5}=\Phi_5,$$
$$\lambda_1=g_{1,1}u_1+g_{1,2}u_2+g_{1,3}u_3+g_{1,4}u_4,$$
$$\lambda_2=g_{2,1}u_1+g_{2,2}u_2+g_{2,3}u_3+g_{2,4}u_4,$$
$$u_1+u_2+u_3+u_4+u_5=1,$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=u_1+2u_2+3u_3+4u_4,$$
$$u_2+3u_3+7u_4+7(x_1-1)\leqslant\Phi_1\leqslant u_2+3u_3+7u_4+7(1-x_1),$$
$$u_2+3u_3+7u_4+7(x_2-1)\leqslant\Phi_2\leqslant u_2+3u_3+7u_4+7(1-x_2),$$
$$u_2+3u_3+7u_4+7(x_3-1)\leqslant\Phi_3\leqslant u_2+3u_3+7u_4+7(1-x_3),$$
$$u_2+3u_3+7u_4+7(x_4-1)\leqslant\Phi_4\leqslant u_2+3u_3+7u_4+7(1-x_4),$$
$$u_2+3u_3+7u_4+7(x_5-1)\leqslant\Phi_5\leqslant u_2+3u_3+7u_4+7(1-x_5),$$
$$\Phi_1\leqslant 7x_1,\Phi_2\leqslant 7x_2,\Phi_3\leqslant 7x_3,\Phi_4\leqslant 7x_4,\Phi_5\leqslant 7x_5。$$

在模型4′中,x,y,z和w的个数分别是5,10,10和5;u,λ和Φ的个数分别是4,2和5;0-1变量、连续变量和线性约束的个数分别是7,34和26(其中有9个等式约束和17个不等式约束)。

3.2 大规模案例的数值实验结果

上一节小型案例是一个特殊情况,下面用不同规模的案例来验证技术的实用性。

首先,给出关于资源的相关数据:1)可用资源种类的总数S设定为5;2)资源需求$d^s_{i,j}$,$d^s_{i,j,k}$和$d^s_{i,j,k,l}$的值分别是在区间[10,50],[30,80],[50,100]及[80,150]上均匀分布的随机整数,且$i,j,k,l=1,\cdots,N$,$i<j<k<l$,$s=1,\cdots,5$;3)每种资源总量b_s的值是在区间$[0.2R_s,0.8R_s]$上均匀分布的一个随机整数,$s=1,\cdots,5$,其中R_s等于资源需求的最大值与项目总数的乘积。

其次,收益参数数$r_{i,j}$,$r_{i,j,k}$和$r_{i,j,k,l}$是在区间[10,50],[−30,100],[−60,150]和[−100,200]上均匀分布的随机整数,$i,j,k,l=1,\cdots,N$,$i<j<k<l$,$s=1,\cdots,5$。

最后给出(N,m)的3种组合见表2。

考虑到有基数限制的模型,本文将数值实验分为两组。第一组为基数约束为等式的情形,即有$\sum_{i=1}^{N}x_i=m$,第二组为基数约束为不等式约束的情形,即有$\sum_{i=1}^{N}x_i\leqslant m$。两组数值实验的计算结果见表3。对于每一组不同的$(N,m)$,一共进行30次计算,由此,总共得到90组数值实验数据。表3中的符号“—”说明对于该组数据,本文所使用的程序不能在规定时间内得出结果。

表2 3种类型的实验案例

Tab. 2 Three types of test with different (N, m)

实验类型	测试次数	(N, m)
小型PPSP	30	(10,3)
中型PPSP	30	(15,5)
大型PPSP	30	(20,7)

高效地求解PPSP模型是本文的主要目的。根据表3的数据,可以明显看出重构模型和转化模型之间的约束数量和效率区别。

以表3中的大型PPSP为例,模型2和模型3包含的0-1变量、连续变量、线性等式约束以及线性不等式约束的个数分别为(20,6 175,1,29 360),(20,6 175,21,5)。可以看出,两个模型中0-1变量和连续变量的数目是相同的;线性等式约束的数目虽然不同,但是差距并不是十分明显;而线性不等式约束的数目则差异巨大,模型2的不等式约束个数是模型3的5 872倍。而表3中模型2线性不等式约束的个数是模型4的451倍。基于上述分析,可以推想转化模型3和4的求解效率比重构模型2更高。数值实验的结果也验证了这一点。

由表3可知,模型2和模型3在求解小型PPSP时差距并不明显。但是,当N和m的值增加时,求解时间的差距变得十分显著。在求解中型PPSP时,不同模型所需的平均时间的差距已十分突出——模型2平均需要80.194 s才能得出结果,而模型3仅需3.039 s就可以给出最优解。值得指出的是,在求解大型PPSP时,重构模型2并不能在限定的时间内求出最优解,而模型3的求解时间是461.992 s,远远小于限定的求解时间10 800 s。

表 3　模型 2 和模型 3、模型 4 的实验结果对比

Tab. 3　Numerical results for different models

案例类型	模型	0-1 变量	连续变量	线性等式约束	线性不等式约束	平均 CPU 时间/s	CPU 时间标准差/s
小型 PPSP	模型 2	10	375	1	1 670	0.651	0.126
	模型 3	10	375	11	5	0.259	0.061
	模型 4	12	388	14	35	0.423	0.193
中型 PPSP	模型 2	15	1 925	1	8 965	80.194	15.344
	模型 3	15	1 925	16	6	3.039	0.484
	模型 4	18	1 945	20	50	3.514	0.567
大型 PPSP	模型 2	20	6 175	1	29 360	—	—
	模型 3	20	6 175	21	5	461.992	37.375
	模型 4	23	6 202	25	65	332.125	38.859

当基数约束为不等式时，不同模型都能很快求解出小型 PPSP 的最优解，这与表 3 的结果类似。模型 2 在求解另外两个类型的 PPSP 时花费的时间都明显比转化模型多。其中在求解中型 PPSP 时，模型 2 花费的时间接近模型 4 的 25 倍。同样的，模型 2 并不能在规定的时间内求解出大型 PPSP 的最优解，而模型 4 的求解时间是 332.125 s，也远远小于限定的求解时间 10 800 s。

由表 3 可以得到如下结论：

1）对于所有能够求解的算例，模型 2 和模型 3、模型 4 均可以得到相同的最优解；

2）相比于模型 2，模型 3、模型 4 使用了更少的线性不等式约束，从而加快了求解效率；

3）不同模型所需求解时间有较大差异。即使是（N，m）的少量增加，模型 2 求解所花费的时间也要比模型 3、模型 4 多得多，甚至不能在规定时间内给出结果。

4 结论

本文提出了一种新型线性化技术用于求解项目组合选择问题（Project portfolio selection problem，PPSP）。Glover 的技术是较为实用和有效的方法，但是变量和约束都太多。比较 Glover 的重构模型和本文的转化模型，可以看出，模型 2 算法的复杂度为 $O(N^4)$，而转化模型的复杂度仅为 $O(N)$。本文的数值计算结果同样表明，转化模型（模型 3 和 4）运算速度远快于重构模型（2），特别是在求解大型 PPSP 问题时表现的更为明显。此外，转化模型还可以更为有效地处理更高阶的项目组合选择问题。

参考文献：

[1] 郭文旌，胡奇英.不确定终止时间的多阶段最优投资组合[J].管理科学学报，2005，8(2)：13-19.
GUO W J，HU Q Y. Multi-period portfolio optimization when exit time is uncertain[J].Journal of Management Sciences in China，2005，8(2)：13-19.

[2] 秦学志，吴冲锋.模糊随机风险偏好下的证券投资组合选择方法[J].管理科学学报，2003，6(4)：73-76.
QIN X Z，WU C F.Portfolio selection method under investor's fuzzy stochastic risk preference[J].Journal of Management Sciences in China，2003，6(4)：73-76.

[3] CHRISTER C，FULLER R，HEIKKILA M，et al.A fuzzy approach to R&D project portfolio selection[J].International Journal of Approximate Reasoning，2006，44(44)：93-105.

[4] TUZKAYA U R，YOLVER E.R&D project selection by integrated gray analytic network process and grey relational analysis an implementation for home appliances company [J].Journal of Aeronautics and Space Technologies，2015，8(2)：35-41.

[5] 安会刚，郭鹏，马贤娣.考虑相互影响的 R&D 项目组合选择模型研究[J].科学学与科学技术管理，2007，28(3)：10-13.
AN H G，GUO P，MA X T.Research on selection model of R&D project portfolio with interaction[J].Science of Science and Management of S&T，2007，28(3)：10-13.

[6] WEINGARTNER H M.Capital budgeting of interrelated projects：survey and synthesis[J].Management Science，1966，12(7)：485-516.

[7] NEMHAUSER G L，ULLMANN Z.Discrete dynamic programming and capital allocation[J].Management Science，1969，15(15)：494-505.

[8] CARRAWAY R L，SCHMIDT R L.An improved discrete

dynamic programming algorithm for allocating resources among interdependent projects[J]. Management Science, 1991,37(9):1195-1200.

[9] WIBOWO A, KOCHENDOERFER B. Selecting BOT/PPP infrastructure projects for government guarantee portfolio under conditions of budget and risk in the Indonesian context[J]. Journal of Construction Engineering and Management, 2011, 137(7):512-522.

[10] WANG Q, KILGOUR D M, HIPEL K W. Numerical methods to calculate fuzzy boundaries for brownfield redevelopment negotiations[J]. Group Decision & Negotiation, 2014, 24(3):515-536.

[11] CHO W, SHAW M J, KWON D H. The effect of synergy enhancement on information technology portfolio selection [J]. Information Technology and Management, 2013, 14 (2):125-142.

[12] LI H L, HUANG Y H, FANG S C. A logarithmic method for reducing binary variables and inequality constraints in solving task assignment problems[J]. Informs Journal on Computing, 2013, 25(4):643-653.

[13] COFFIN M A, TAYLOR B W. R & D project selection and scheduling with a filtered beam search approach[J]. IIE Transactions, 1996, 28(2):167-176.

[14] GUTJAHR W J, KATZENSTEINER S, REITER P. Competence-driven project portfolio selection, scheduling and staff assignment[J]. Central European Journal of Operations Research, 2008, 16(3):281-306.

[15] LI H L, HUANG Y H, FANG S C. Linear reformulation of polynomial discrete programming for fast computation [J]. Informs Journal on Computing, 2017, 29(1):108-122.

[16] FOX G E, BAKER N R, BRYANT J L. Economic models for R and D project selection in the presence of project interactions[J]. Management Science, 1984, 30(7):890-902.

[17] GHASEMZADEH F, ARCHER N, IYOGUN P. A zero-one model for project portfolio selection and scheduling [J]. Journal of the Operational Research Society, 1999, 50 (7):745-755.

[18] WATTERS L J. Reduction of integer polynomial programming problems to zero-one linear programming problems [J]. Operations Research, 1967, 15(6):1171-1174.

[19] GLOVER F, WOOLSEY E. Converting the 0-1 polynomial programming problem to a 0-1 linear program[J]. Operations Research, 1974, 22(1):180-182.

[20] COOPER R G, EDGETT S J, KLEINSCHMIDT E J. New problem, new solution: making portfolio management more effective[J]. Research Technology Management, 2000, 43(2):18-33.

[21] ENGLUND R L, GRAHAM R J. From experience: linking projects to strategy[J]. Journal of Production and Innovation Management, 1999, 16(1):52-64.

[22] KETTANI O, ORAL M. Equivalent formulations of nonlinear integer problems for efficient optimization[J]. Management Science, 1990, 36(1):115-119.

Operations Research and Cybernetics

Efficient Linearization Technology for Project Portfolio Selection Problem with Interdependency

LI Xingmei[1], ZHANG Youzhong[1], LÜ Zhijian[2]

(1. School of Economies and Management, North China Electric Power University, Beijing 102206;
2. Beijing Institute of Science and Technology Information, Beijing 100044, China)

Abstract: [**Purposes**]Higher-order project portfolio selection problem with interdependency is often formulated as an integer polynomial programming problem. By utilizing the conventional method, we need to use a huge number of inequality constraints. However, a huge number of non-tight inequality constraints may cause a heavy computational burden. This study proposed an efficient method to solve this problem. [**Methods**]Higher-order project portfolio selection model is converted into a mixed zero-one programming problem, and a novel linearization method is proposed to use tight equality constraints instead of a huge number of non-tight inequality constraints. Then the branch-and-bound scheme to obtain an optimal solution is adopted. [**Findings**]By conducting lots of numerical experiments, it displayed different computational efficiency of different models. [**Conclusions**]The results show that the new linearization method can further improve the computational efficiency of higher-order project portfolio selection problem.

Keywords: higher-order project portfolio selection; interdependency; mixed 0-1 programming problem

（责任编辑　黄　颖）