2017 年度重庆市出版专项基金资助栏目　　DOI:10.11721/cqnuj20180102

运筹学与控制论

向量优化中 Gerstewitz 非线性标量化函数的拟内部性质*

朱　巧，徐威娜，赵克全

(重庆师范大学数学科学学院，重庆 401331)

摘要:【目的】研究 Gerstewitz 非线性标量化函数的性质对于刻画向量优化问题的解有重要意义。【方法】在序锥拟内部非空的条件下对 Gerstewitz 非线性标量化函数的性质进行了研究。【结果】给出了这类非线性标量化函数的一些新性质并建立了向量优化问题有效点的非线性标量化结果。【结论】指出这类非线性标量化函数在序锥的拓扑内部非空条件下的一些结果不能推广到拟内部情形。

关键词:向量优化;Gerstewitz 非线性标量化函数;拟内部;非线性标量化;有效点

中图分类号:O221.6　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2018)01-0011-04

1 预备知识

非线性标量化方法在向量优化问题解的性质研究中扮演着十分重要的作用。Gerth 和 Weidner 在文献[1]中提出了 Gerstewitz 非线性标量化函数并建立了相应的非凸分离定理,获得了向量优化问题解的一些非线性标量化结果。这类非线性标量化函数的性质及相应的非凸分离定理已经广泛应用于向量优化问题解性质的研究中[2-7]。特别地,2011 年 Flores-Bazan 和 Hernandez[5] 利用 Gerstewitz 非线性标量化函数建立了向量优化问题近似解的一些非线性标量化定理。2015 年赵克全等人[7] 利用 Gerstewitz 非线性标量化函数获得了基于改进集而定义的向量优化问题的近似有效解和近似弱有效解的非线性标量化结果。

近年来,各种广义内部工具已经被应用于数值与向量优化问题解的性质研究中,取得了一系列研究成果[8-13]。特别地,2016 年,夏远梅等人[10] 研究了改进集的一些拟内部性质,进而获得了拟内部意义下基于改进集而定义的近似弱有效解的线性标量化结果。2016 年,赵克全等人[13] 建立了广义内部条件下基于 Gerstewitz 非线性标量化函数的非凸分离定理,给出了向量优化问题弱有效解的一些非线性标量化性质。

最近,Nishizawa 等人[14] 在序锥的拓扑内部非空条件下,研究了 Gerstewitz 非线性标量化函数的一些性质,建立了非线性择一性定理,进而获得了向量优化问题的有效解和弱有效解的非线性标量化结果。受文献[2,13-14]中研究工作的启发,本文在序锥的拟内部非空条件下研究了 Gerstewitz 非线性标量化函数的一些新性质,推广了拓扑内部意义下的一些结果到拟内部情形,并通过反例指出 Gerstewitz 非线性标量化函数在序锥的拓扑内部非空条件下的某些结果不能推广到拟内部情形,进而建立了向量优化问题有效解的非线性标量化结果。

假定 Y 是实分离局部凸拓扑线性空间,A 是 Y 中的非空子集。集合 A 的锥包定义为 $\mathrm{cone}A=\{\alpha a\mid\alpha\geqslant 0, a\in A\}$,称凸锥 A 是点的,如果 $A\cap(-A)=\{0\}$;称凸锥 A 是真的,如果 $A\neq Y$。非空凸子集 A 的拟内部定义为 $\mathrm{qi}A=\{y\in Y\mid \mathrm{cl\ cone}(A-y)=Y\}$。

Gerth 和 Weidner[1] 提出了 Gerstewitz 非线性标量化函数 $h_C(y;k)$,定义为:

$$h_C(y;k)=\inf\{t\in\mathbf{R}\mid y\in tk-C\},\ \forall k,y\in Y。$$

2 Gerstewitz 非线性标量化函数的拟内部性质

本节在凸锥 C 的拟内部非空条件下给出 Gerstewitz 非线性标量化函数 $h_C(y;k)$的一些性质。

* **收稿日期**:2017-02-28　　**修回日期**:2017-09-25　　**网络出版时间**:2018-01-18 15:21

资助项目:国家自然科学基金重点项目(No.11431004);国家自然科学基金面上项目(No.11671062;No.11271391);重庆市基础与前沿研究计划项目(No.cstc2015jcyjA00027);重庆市教委科学技术研究项目(No.KJ1500303);重庆市研究生科研创新项目(No.CYS17174)

第一作者简介:朱巧,女,研究方向为多目标优化理论与方法,E-mail:cqmathqz@163.com;**通信作者**:赵克全,教授,E-mail:kequanz@163.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20180118.1521.004.html

定理1 假定凸锥 C 的拟内部非空且 $y\in Y$,$A\subset Y$。则:

i) 如果存在 $k\in \mathrm{qi}C$ 满足 $h_C(y;k)<0$,则 $y\in -\mathrm{qi}C$;

ii) 如果存在 $k\in \mathrm{qi}C$ 满足 $h_C(y;k)\leqslant 0$,则 $y\in -\mathrm{cl}C$;

iii) 如果存在 $k\in \mathrm{qi}C$ 满足 $\inf\limits_{y\in A}h_C(y;k)<0$,则 $A\cap(-\mathrm{qi}C)\neq\varnothing$;

iv) 如果存在 $k\in \mathrm{qi}C$ 满足 $\sup\limits_{y\in A}h_C(y;k)<0$,则 $A\subset -\mathrm{qi}C$;

v) 如果 A 是紧集且存在 $k\in \mathrm{qi}C$ 满足 $\inf\limits_{y\in A}h_C(y;k)\leqslant 0$,则 $A\cap(-\mathrm{cl}C)\neq\varnothing$;

vi) 如果存在 $k\in \mathrm{qi}C$ 满足 $\sup\limits_{y\in A}h_C(y;k)\leqslant 0$,则 $A\subset -\mathrm{cl}C$。

证明 i) 假设存在 $k\in \mathrm{qi}C$ 满足 $h_C(y;k)<0$,即存在 $t_0<0$ 使得 $y\in t_0k-C$。因为 C 是凸锥,则由文献[12]中命题2.5(iv)和(v)可得:

$$y\in t_0k-C=-(-t_0k+C)\subset-(C+\mathbf{R}_{++}k)\subset-(C+\mathrm{qi}C)=-2\left(\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}\mathrm{qi}C\right)\subset-\mathrm{qi}C。$$

ii) 若存在 $k\in \mathrm{qi}C$ 满足 $h_C(y;k)<0$,则由定理1的i)知,$y\in-\mathrm{qi}C\subset-C\subset-\mathrm{cl}C$。若存在 $k\in \mathrm{qi}C$ 满足 $h_C(y;k)=0$,即对任意 $\varepsilon=\frac{1}{n}$,存在 $t_n\in\{t\in\mathbf{R}\mid y\in tk-C\}$ 使得 $h_C(y;k)\leqslant t_n<h_C(y;k)+\frac{1}{n}$,且 $y\in t_nk-C$。当 $n\to\infty$ 时,有 $t_n\to 0$,故 $y\in-\mathrm{cl}C$。

iii) 若存在 $k\in \mathrm{qi}C$ 满足 $\inf\limits_{y\in A}h_C(y;k)<0$,即存在 $y_0\in A$ 使得 $h_C(y_0;k)<0$。由定理1的i)可知 $y_0\in-\mathrm{qi}C$。故 $A\cap(-\mathrm{qi}C)\neq\varnothing$。

iv) 若存在 $k\in \mathrm{qi}C$ 满足 $\sup\limits_{y\in A}h_C(y;k)<0$,即对任意的 $y\in A$ 都有 $h_C(y;k)<0$。由定理1的i)可知 $y\in-\mathrm{qi}C$。故 $A\subset-\mathrm{qi}C$。

v) 若存在 $k\in \mathrm{qi}C$ 满足 $\inf\limits_{y\in A}h_C(y;k)<0$,则由定理1的iii)可知 $A\cap(-\mathrm{qi}C)\neq\varnothing$。若存在 $k\in \mathrm{qi}C$ 满足 $\inf\limits_{y\in A}h_C(y;k)=0$,则对任意 $\varepsilon=\frac{1}{n}$,存在 $t_n\in\mathbf{R}$,$y_n\in A$ 使得 $\inf\limits_{y\in A}h_C(y;k)\leqslant t_n<\inf\limits_{y\in A}h_C(y;k)+\frac{1}{n}$,且 $y_n\in t_nk-C$。当 $n\to\infty$ 时,有 $t_n\to 0$。由 A 是紧集,$y_n\in A$,则不妨设 $y_n\to y_0$,且 $y_0\in A$。又由 $y_n-t_nk\in-C$ 且 $y_n-t_nk\to y_0(n\to\infty)$,故 $y_0\in-\mathrm{cl}C$。

vi) 如果存在 $k\in \mathrm{qi}C$ 满足 $\sup\limits_{y\in A}h_C(y;k)\leqslant 0$,即对任意的 $y\in A$ 有 $h_C(y;k)\leqslant 0$,由定理1的ii)可知,$y\in-\mathrm{cl}C$。故 $A\subset-\mathrm{cl}C$。 证毕

定理2 假定凸锥 C 的拟内部非空且 $y,\bar{y}\in Y$,$A\subset Y$。则:

i) 如果 $y\in-\mathrm{cl}C$,则对任意的 $k\in \mathrm{qi}C$ 都满足 $h_C(y;k)\leqslant 0$;

ii) 如果 $y\in\bar{y}+\mathrm{cl}C$,则对任意的 $k\in \mathrm{qi}C$ 都满足 $h_C(y;k)\geqslant h_C(\bar{y};k)$;

iii) 如果 $A\cap(-\mathrm{cl}C)\neq\varnothing$,则对任意的 $k\in \mathrm{qi}C$ 都满足 $\inf\limits_{y\in A}h_C(y;k)\leqslant 0$;

iv) 如果 $A\subset-\mathrm{cl}C$,则对任意的 $k\in \mathrm{qi}C$ 都满足 $\sup\limits_{y\in A}h_C(y;k)\leqslant 0$。

证明 i) 假设 $y\in-\mathrm{cl}C$,即存在 $y_n\in-C$ 使得 $y_n\to y(n\to\infty)$。对任意的 $k\in \mathrm{qi}C$ 都有 $y_0\in 0k-C$,从而有 $h_C(y_n;k)\leqslant 0$。又因为 $y_n\to y$,所以 $h_C(y;k)\leqslant 0$。

ii) 如果 $y\in\bar{y}+\mathrm{cl}C$,则存在 $c_0\in\mathrm{cl}C$ 使得 $\bar{y}=y-c_0$,也即是 $-c_0\in-\mathrm{cl}C$。对任意的 $k\in \mathrm{qi}C$,由 h_C 的次可加性及定理2的i)可知 $h_C(\bar{y};k)\leqslant h_C(y;k)+h_C(-c_0;k)\leqslant h_C(y;k)$。

iii) 如果 $A\cap(-\mathrm{cl}C)\neq\varnothing$,即存在 $y_0\in A\cap(-\mathrm{cl}C)$。由定理2的i)可知,对任意的 $k\in \mathrm{qi}C$ 有 $h_C(y_0;k)\leqslant 0$。故 $\inf\limits_{y\in A}h_C(y_0;k)\leqslant 0$。

iv) 如果 $A\subset-\mathrm{cl}C$,即对任意的 $y\in A$,有 $y\in-\mathrm{cl}C$。由定理2的i)可知,对任意的 $k\in \mathrm{qi}C$ 有 $h_C(y;k)\leqslant 0$。故 $\sup\limits_{y\in A}h_C(y;k)\leqslant 0$。 证毕

注1 若 $\mathrm{int}C\neq\varnothing$,则 $\mathrm{int}C=\mathrm{qi}C$,故定理1的i)~vi)分别退化为文献[14]中引理2.1的ii)、引理2.2的ii)、命题2.1的ii)、命题2.2的ii)、命题2.3的ii)和命题2.4的ii)。

注2 若 $\mathrm{int}C\neq\varnothing$,则 $\mathrm{int}C=\mathrm{qi}C$,此时定理2的i)~iv)分别退化为文献[14]中引理2.2的i)、引理2.4的ii)、命题2.3的i)和命题2.4的i)。

注3　下面的例子表明文献[14]中的引理2.1的i)不能推广到拟内部情形。

例1　令$Y=l^2$,$C=l_+^2=\{(y_n)\in Y \mid y_n\geqslant 0, n\in \mathbf{N}^+\}$。显然$C$是拟内部非空的凸锥且$\mathrm{qi}C=\{y\in Y \mid y_n>0, n\in \mathbf{N}^+\}$。取$\hat{k}=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4^2},\frac{1}{4^3},\cdots\right)$,$y_0=\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6^2},\frac{1}{6^3},\cdots\right)$。

进而有$\hat{k}\in \mathrm{qi}C$且$-y_0\in -\mathrm{qi}C$。易证$h_C(-y_0;\hat{k})\geqslant 0$。事实上,要证$h_C(-y_0;\hat{k})\geqslant 0$,即证对任意的$t<0$,$-y_0\notin t\hat{k}-C$。假设存在$t_0<0$使得$-y_0\in t_0\hat{k}-C$,即存在$c_0\in C$且$c_0\geqslant 0$使得$-y_0=t_0\hat{k}-c_0$。从而对任意的$n\in \mathbf{N}^+$,有$-\frac{1}{6^n}\leqslant t_0\left(\frac{1}{4^n}\right)$,即$\left(\frac{4}{6}\right)^n\geqslant -t_0>0$,当$n$充分大时将导致矛盾。

注4　下面的例子表明文献[14]中的命题2.1i)不能推广到拟内部情形。

例2　考虑例1中的Y和C。取$\hat{y}=\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4^2},-\frac{1}{4^3},\cdots\right)$。显然$\hat{y}\in -\mathrm{qi}C$。令$A=\{\hat{y}\}$。$A\cap(-\mathrm{qi}C)\neq\varnothing$。取$\hat{k}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\cdots\right)$,则$\hat{k}\in \mathrm{qi}C$。易证$h_C(\hat{y};\hat{k})\geqslant 0$。

定理3　设C是真点闭凸锥,$y,\overline{y}\in Y$,则有:

i) 如果$y\in \mathrm{qi}C$,则对任意的$k\in \mathrm{qi}C$,都有$h_C(y;k)>0$;

ii) 如果存在$k\in \mathrm{qi}C$满足$h_C(y;k)>h_C(\overline{y};k)$,则$h_C(y-\overline{y};k)>0$。

证明　i) 由$y\in \mathrm{qi}C\subset C$可证$y\notin -\mathrm{cl}C$。事实上,如果$y\in -\mathrm{cl}C$,由$C$的闭性可知$y\in -C$。又由$y\in \mathrm{qi}C\subset C$及$C$是点锥可知,$0=y\in \mathrm{qi}C$,即$\mathrm{cl\,cone}(C)=C=Y$矛盾。由$y\notin -\mathrm{cl}C$及定理1中ii)的逆否命题可得$h_C(y;k)>0$。

ii) 如果存在$k\in \mathrm{qi}C$使得$h_C(y;k)>h_C(\overline{y};k)$,由定理2中ii)的逆否命题可知,$y-\overline{y}\notin -\mathrm{cl}C$。再由定理1中ii)的逆否命题知$h_C(y-\overline{y};k)>0$。　证毕

3 有效点的非线性标量化性质

本节主要利用Gerstewitz非线性标量化函数的拟内部性质给出集值向量优化问题有效点的非线性标量化性质。

假定X是实线性空间,Y和Z为实分离局部凸拓扑线性空间,C和D分别为Y和Z中拟内部非空的真凸锥。给定集值映射$F:X\to 2^Y$,$G:X\to 2^Z$,考虑下面的集值向量优化问题:

$$(\mathrm{VOP})\ \min\nolimits_C F(x),\quad \text{s.t. } G(x)\cap(-D)\neq\varnothing$$

其中可行域$V=\{x\in X \mid G(x)\cap(-D)\neq\varnothing\}$。设$k\in \mathrm{qi}C$,考虑下面的标量化问题:

$$(\mathrm{P}_{k,C})\ \min_{x\in V}\varphi_C^F(x;k),$$

其中$\varphi_C^F(x;k)=\inf\{h_C(y;k) \mid y\in F(x)\}$。

定义1[14]　称$x_0\in V$为(VOP)的有效解,如果存在$y_0\in F(x_0)$,对任意的$x\in V$都不存在$y\in F(x)$满足$y_0\in y+C\backslash\{0_Y\}$,即$F(V)\cap(y_0-C\backslash\{0_Y\})\neq\varnothing$。

定义2[14]　称x_0为$(\mathrm{P}_{k,C})$的严格最优解,如果对任意的$x\in V\backslash\{x_0\}$,有$\varphi_C^F(x;k)>\varphi_C^F(x_0;k)$。

注5　设$k\in \mathrm{qi}C$,$x_0\in V$,$y_0\in F(x_0)$。称(x_0,y_0)是$(\mathrm{P}_{k,C})$的严格最优点当且仅当对任意的$y\in F(V)\backslash\{y_0\}$,都有$h_C(y;k)>h_C(y_0;k)$。

定理4　如果存在$k\in \mathrm{qi}C$使得$(\overline{x},\overline{y})$是标量化问题$(\mathrm{P}_{k,C})$的严格最优点,则$(\overline{x},\overline{y})$是集值向量优化问题(VOP)的有效点。

证明　假设$(\overline{x},\overline{y})$不是(VOP)的有效点,即存在$y_0\in F(x)$满足$\overline{y}\in y_0+C\backslash\{0_Y\}$使得$F(V)\cap(\overline{y}-C\backslash\{0_Y\})=\varnothing$。由$k\in \mathrm{qi}C$及定理2的ii)可知,$h_C(\overline{y};k)\geqslant h_C(y_0;k)$。再由注5可知,$(\overline{x},\overline{y})$不是$(\mathrm{P}_{k,C})$的严格最优解。导致矛盾。　证毕

定理5　设$\overline{x}\in V$,$\overline{y}\in F(\overline{x})$,$F$是$V$上的紧值函数且$C$是闭凸锥。$(\overline{x},\overline{y})$是(VOP)的有效点当且仅当存在$k\in \mathrm{qi}C$使得对任意的$y\in F(V)\backslash\{\overline{y}\}$,有$h_C(y-\overline{y};k)>0$。

证明　必要性。设$(\overline{x},\overline{y})$是(VOP)的有效点。设对任意的$k\in \mathrm{qi}C$,存在$y_0\in F(V)\backslash\{\overline{y}\}$满足$h_C(y_0-\overline{y};k)\leqslant 0$。

由定理1的ii)及 C 的闭性可知，$y_0-\overline{y}\in -\mathrm{cl}C=-C$。又因为 $y_0\in F(V)\setminus\{\overline{y}\}$，所以 $y_0\in \overline{y}-C\setminus\{0_Y\}$。故 $y_0\in (\overline{y}-C\setminus\{0_Y\})\cap F(V)\neq\varnothing$，即 $(\overline{x},\overline{y})$ 不是(VOP)的有效点。导致矛盾。

充分性。假设 $(\overline{x},\overline{y})$ 不是有效点，即存在 $y_0\in F(V)$ 满足 $y_0-\overline{y}\in -C\setminus\{0_Y\}$。则 $y_0\in F(V)\setminus\{\overline{y}\}$。因为 C 是闭的，则 $y_0-\overline{y}\in -\mathrm{cl}C\setminus\{0_Y\}$。由定理2的 i)可知，对任意的 $k\in \mathrm{qi}C$ 有 $h_C(y_0-\overline{y};k)\leqslant 0$。这与条件矛盾。 证毕

注6 若 $\mathrm{int}C\neq\varnothing$，则 $\mathrm{int}C=\mathrm{qi}C$，此时定理4和定理5分别退化为文献[14]中的定理4.3和定理4.4。

参考文献：

[1] GERTH C,WEIDNER P.Nonconvex separation theorems and some applications in vector optimization[J].Journal of Optimization Theory And Applications,1990,67(2):297-320.

[2] GOPFERT A,RIAHI H,TAMMER C,et al.Variationalmethods in partially ordered spaces[M].New York:Springer-Verlag,2003.

[3] CHEN G Y,HUANG X X,YANG X Q.Vector optimization[M].Berlin:Springer,2005.

[4] TAMMER C,ZALINESCU C.Lipschitz properties of the scalarization function andapplications[J].Optimization,2010,59(2):305-319.

[5] FLORES-BAZAN F,HERNANDEZ E.A unified vector optimization problem:completescalarizations and applications[J].Optimization,2011,60(12):1399-1419.

[6] 夏远梅，赵克全.向量优化中ε-真有效解的非线性标量化性质[J].运筹学学报，2014，18(4):58-64.
XIA Y M,ZHAO K Q.Nonlinear scalarization characterizations for ε-properly ecient solutions invector optimization[J].Operations Research Transactions,2014,18(4):58-64.

[7] ZHAO K Q,XIA Y M,YANG X M.Nonlinearscalarization characterizations of E-efficiency in vector optimization[J].Taiwanese Journal of Mathematics,2015,19(2):455-466.

[8] BORWEIN J M,LEWISA S.Partially finite convex programming,part I quasi relative interiors and duality theory[J].Mathematical Programming,1992,57(1):15-48.

[9] ZHOU Z A,YANG X M.Optimality conditions of generalized subconvexlike set-valued optimization problems based on the quasi-relative interior[J].Journal of Optimization Theory and Applications,2011,150(2):327-340.

[10] XIA Y M,ZHANG W L,ZHAO K Q.Characterizations of improvement sets via quasi interior and applications in vector optimization[J].Optimization Letters,2016,10(4):769-780.

[11] 赵克全，夏远梅.凸锥的一个广义内部性质[J].应用数学学报，2016，39(2):289-297.
ZHAO K Q,XIA Y M.A Characterization of convex cone via generalized interior[J].Acta Mathmaticas Applicatae Sinica (Chinese Series),2016,39(2):289-297.

[12] BOT R I,CSETNEK E R,WANKA G.Regularity conditions via quasi-relative interior in convex programming[J].SIAM Journal on Optimization,2008,19(1):217-233.

[13] 赵克全，戎卫东，杨新民.新的非线性分离定理及其在向量优化中的应用[J].中国科学:数学，2017，47(4):533-544.
ZHAO K Q,RONG W D,YANG X M.New nonlinear separation theorems and applications in vector optimization[J].Scientia Sinica Mathematica,2017,47(4):533-544.

[14] NISHIZAWA S,ONODSUKA M,TANAKA T.Alternative theorems for set-valued maps based on a nonlinear scalarization[J].Pacific Journal of Optimization,2005,1(1):147-159.

Operations Research and Cybernetics

Properties of Gerstewitz Nonlinear Scalarization Function via Quasi Interiors in Vector Optimization

ZHU Qiao, XU Weina, ZHAO Kequan

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [**Purposes**]It is important to study the properties of Gerstewitz nonlinear scalarization functions for characterizing the solutions of vector optimization problems. [**Methods**]Under the condition of nonemptiness of quasi interior of the ordering cone, its properties are studied. [**Finding**]Some new properties are given for the Gerstewitz nonlinear scalarization function and nonlinear scalarization result of efficient point is established for vector optimization problems. [**Conclusion**]The fact that some results via nonemptiness of topological interior of the ordering cone can not generalize to the quasi interior case is pointed for the Gerstewitz nonlinear scalarization function.

Keywords: vector optimization; Gerstewitz nonlinear scalarization function; quasi interior; nonlinear scalarization; efficient point

(责任编辑 黄 颖)