2017 年度重庆市出版专项基金资助栏目

运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20180202

利用半无限规划的离散化方法求解半定规划问题*

席鸣晓，罗洪林

(重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331)

摘要:【目的】对半定规划的强对偶定理以及求解半定规划近似解的算法进行讨论。【方法】利用求解半无限规划的近似解的离散化思想,及线性规划的强对偶定理。【结果】得到了半定规划强对偶定理一种新的证明方法以及求解半定规划近似解的离散化算法,给出了该算法的数值实验结果。【结论】为半定规划问题提供了一种新的近似求解算法。

关键词:半定规划;半无限规划;离散化方法;强对偶定理

中图分类号:O221.2　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2018)02-0021-07

分别记 $\mathbf{R}^m$,S^n,S^n_+ 和 S^n_{++} 为 m 维向量空间、n 阶对称矩阵空间、n 阶半定矩阵锥和 n 阶正定矩阵锥。对 $\boldsymbol{X}\in S^n$,$\boldsymbol{X}\geqslant\mathbf{0}$ 和 $\boldsymbol{X}>\mathbf{0}$ 分别表示 $\boldsymbol{X}$ 为对称半正定矩阵和对称正定矩阵。考虑如下形式的半定规划问题(P):

$$\begin{aligned}&\min\quad \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},\\&\text{s.t.}\quad F(\boldsymbol{x})\geqslant 0。\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{c},\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^m$, $F(\boldsymbol{x})=F_0+\sum_{i=1}^{m}x_iF_i$, $F_i\in S^n$,$i=0,1,\cdots,m$ 且 $F_i(i=1,\cdots,m)$线性无关。记 val(P)为问题(P)的最优目标函数值。

半定规划也称为带有半正定锥约束的线性规划,退化情形包括线性规划。半定规划广泛地存在于系统与控制理论、金融工程、量子化学、信号处理[1-4]等诸多领域。半定规划的多项式内点算法为求解组合优化领域的某些中小规模的 NP 难问题(如著名的旅行商问题[5]和最大割问题[6])提供了有效的解决途径。从 20 世纪 90 年代初期至今,半定规划一直是优化领域的一个热门研究课题。

半定规划的对偶理论在半定规划的理论研究和算法设计中都扮演着十分重要的角色。半定规划的对偶除了常见的拉格朗日对偶和共轭对偶以外,具有代表性的还包括 Ramma 等人提出的广义拉格朗日 slater 对偶[7]和极小锥对偶[8]。本文主要从算法的角度考察半定规划的拉格朗日对偶。

半定规划问题(P)的拉格朗日对偶模型为(D):

$$\begin{aligned}&\max\quad -\mathrm{tr}\boldsymbol{F}_0\boldsymbol{Z}\\&\text{s.t.}\quad \mathrm{tr}\boldsymbol{F}_i\boldsymbol{Z}=c_i,i=1,\cdots,m,\\&\qquad\quad \boldsymbol{Z}\geqslant\mathbf{0}。\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{tr}\boldsymbol{AB}:=\langle\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\rangle=:\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}$,$\boldsymbol{Z}\in S^n$,记 val(D)为问题(D)的最优目标函数值。称问题(D)可行是指其可行域非空,即:存在 $\boldsymbol{Z}\geqslant\mathbf{0}$ 使得 $\mathrm{tr}\boldsymbol{F}_i\boldsymbol{Z}=c_i$,$i=1,\cdots,m$;称问题(D)严格可行是指存在 $\boldsymbol{Z}>\mathbf{0}$ 使得 $\mathrm{tr}\boldsymbol{F}_i\boldsymbol{Z}=c_i$,$i=1,\cdots,m$同时成立。

内点算法是求解中小规模的半定规划问题的有效求解算法之一。基于半定规划的原始对偶模型的一阶最优性条件(KKT 条件)建立的可行中心路径或者不可行中心路径,提出了各种不同的可行内点算法和不可行内点算法。最近,杨洋等人[9]利用不可行中心路径给出了一种宽领域不可行内点算法。但是,内点算法都需要存储和分解牛顿矩阵,这将占用大量的内存空间且十分耗时。在 2002 年,Helmberg[10]指出,在一般的计算机处理

* **收稿日期**:2017-07-01　**修回日期**:2017-12-05　**网络出版时间**:2018-03-23　15:54

资助项目:国家自然科学基金(No.11601050; No.11431004);重庆市自然科学基金(No.KJ1600316; No.cstc2016jcyjA0116)

第一作者简介:席鸣晓,男,研究方向为最优化理论与算法,E-mail:15038cqnu@sina.com;**通信作者**:罗洪林,副教授,E-mail:1071025013@fudan.edu.cn

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20180323.1553.006.html

系统上通过合理的等待时间,用内点算法能有效求解的半定规划问题的矩阵变量 $n\leqslant 200$,约束个数 $m\leqslant 3\ 000$。截至2013年,Huang 等人[11]指出目前的内点算法一般可以有效求解的中小规模的半定规划的矩阵变量 $n\leqslant 1\ 000$,约束个数 $m\leqslant 10\ 000$。

本文将为半定规划提供一种新的近似求解算法,该算法摆脱了对于牛顿矩阵的存储和分解。

2005年,Yang[12]建立了半定规划问题(P)与半无限规划问题(P_2)之间的等价关系,并利用半无限规划的离散化方法证明了在原始半定规划(P)可行和对偶半定规划(D)严格可行的假设条件下的强对偶定理。受 Yang 的启发,本文进一步考虑了对偶半定规划问题(D)的离散化方法,并利用该离散化思想给出了其他两个半定规划问题的强对偶定理的证明,即:

1) 如果原始半定规划(P)严格可行,对偶半定规划(D)可行,则 val(P)=val(D),且对偶半定规划(D)的最优解 $\boldsymbol{Z}^*$ 可达。

2) 如果问题(P)和(D)都严格可行,则 val(P)=val(D)。且问题(P)的最优解 $\boldsymbol{x}^*$ 和问题(D)的最优解 $\boldsymbol{Z}^*$ 都可达。

1 半定规划的离散化方法

本节给出对偶半定规划(D)的离散化方法以及它的最优解与离散化问题(D_3)的最优解之间的误差刻画。为了半定规划的离散化过程描述的完整性,首先引入 Yang[12]关于原始半定规划问题(P)的离散化过程。

第1步,利用$\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^m \mid F(\boldsymbol{x})\geqslant 0\}$与$\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^m \mid \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}F(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}\geqslant 0,\ \forall\,\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n\}$的等价性,将问题(P)等价地转化为如下形式的优化问题(P_1):

$$\begin{aligned} \min\quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\quad & \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}F(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}\geqslant 0, \\ & \boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n。\end{aligned}$$

第2步,将集合$\{\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n \mid \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}F(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}\geqslant 0\}$正则化为$\{\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n \mid \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}F(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}\geqslant 0,\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=1\}$,则问题($P_1$)可等价地表示为如下的线性半无限规划问题($P_2$):

$$\begin{aligned} \min\quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\quad & \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}(\boldsymbol{y})\geqslant 0, \\ & \boldsymbol{y}\in Y,\end{aligned}$$

其中 $Y=\{y\in\mathbf{R}^n \mid \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=1\}$,$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}F_1\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}F_2\boldsymbol{y},\cdots,\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}F_m\boldsymbol{y})$,$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}F_0\boldsymbol{y}$。

记 $X^P(Y):=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^m \mid \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}(\boldsymbol{y})\geqslant 0,\boldsymbol{y}\in Y\}$。问题($P_2$)关于 $\kappa\in\mathbf{R}$ 的下水平集定义为

$$L_{\geqslant}(X^P(Y),c,\kappa):=\{\boldsymbol{x}\in X^p(Y)\mid c^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\leqslant\kappa\}。$$

第3步,选取有限网格 $Y_d\subset Y$ 离散化问题(P_2),得到一个线性规划问题(P_3):

$$\begin{aligned} \min\quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\quad & \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}(\boldsymbol{y})\geqslant 0, \\ & \boldsymbol{y}\in Y_d。\end{aligned}$$

网格 Y_d 与集合 Y 的 Hausdorrff 距离定义为 $d_{Y_d}:=\mathrm{dist}(Y_d,Y):=\max\limits_{y\in Y}\min\limits_{\hat{y}\in Y_d}\|y-\hat{y}\|$。记:

$$X^P(Y_d):=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^m \mid \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}(\boldsymbol{y})\geqslant 0,\boldsymbol{y}\in Y_d\}。$$

通过上述离散化方法可以将问题(P)近似地转换为线性规划问题(P_3)进行近似求解,求解的精度取决于网格 Y_d 的取法[12]。

众所周知,不论是半定规划还是线性规划,研究其对偶理论的主要动机之一就是为了降低问题求解的难度,即相较于原问题,当对偶问题的求解更加容易时,在强对偶定理的理论支撑下,可以通过求解它的对偶问题而获得原问题的解。基于此,下面利用 Dattorro 在文献[13]中的第239式:

$$S_+^n=\left\{\sum_{j=1}^{\infty}b_j\boldsymbol{z}^j(\boldsymbol{z}^j)^{\mathrm{T}}\ \Big|\ \boldsymbol{z}^j\in\mathbf{R}^n,b_j\geqslant 0,j=1,2,\cdots\right\},\tag{1}$$

将半定矩阵锥 S_+^n 等价地表示为极点和所有极方向的凸包。下面给出对偶半定规划问题(D)离散化过程。

第1步,利用(1)式将对偶半定规划问题(D)等价地转化为如下形式的优化问题(D_1):

$$\begin{aligned}\min\quad & \mathrm{tr}\boldsymbol{F}_0\boldsymbol{Z}\\ \text{s.t.}\quad & \mathrm{tr}\boldsymbol{F}_i\boldsymbol{Z}=c_i,i=1,\cdots,m,\\ & \boldsymbol{Z}=\sum_{j=1}^{\infty}b_j\boldsymbol{z}^j(\boldsymbol{z}^j)^{\mathrm{T}},\\ & b_j\geqslant 0,j=1,2,\cdots,\\ & \boldsymbol{z}^j\in\mathbf{R}^n,j=1,2\cdots。\end{aligned}$$

第 2 步，通过 $b_j\geqslant 0(j=1,2,\cdots)$ 的适当选取（仍然记为 $b_j\geqslant 0,j=1,2,\cdots$），将向量 $\boldsymbol{z}^j\in\mathbf{R}^n,j=1,2,\cdots$ 单位化，则问题（D_1）可等价地转换为（D_2）：

$$\begin{aligned}\min\quad & \sum_{j=1}^{\infty}b_j(\boldsymbol{z}^j)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_0\boldsymbol{z}^j\\ \text{s.t.}\quad & \sum_{j=1}^{\infty}b_j(\boldsymbol{z}^j)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_i\boldsymbol{z}^j=c_i,i=1,\cdots,m,\\ & b_j\geqslant 0,j=1,2,\cdots,\\ & \boldsymbol{z}^j\in Z',\end{aligned}$$

其中集合 $Z':=\{\boldsymbol{z}\in\mathbf{R}^n\mid\|\boldsymbol{z}\|=1\}=Y$。记 $B^D(Z):=\left\{b_j\geqslant 0\mid\sum_{j=1}^{\infty}b_j(\boldsymbol{z}^j)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_i\boldsymbol{z}^j=c_i,i=1,\cdots,m,\boldsymbol{z}^j\in Z'\right\}$。问题（$\mathrm{D}_2$）关于 $\lambda\in\mathbf{R}$ 的下水平集定义为：

$$L_{\geqslant}(B^D(Z),\boldsymbol{F}_0,\lambda):=\left\{b_j\in B^D(Z)\mid\sum_{j=1}^{\infty}b_j(\boldsymbol{z}^j)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_0\boldsymbol{z}^j\leqslant\lambda\right\}。$$

第 3 步，选取有限网格 $Z_k\subset Z'$，不妨设 Z_k 含有 k 个向量 $\boldsymbol{z}^1,\boldsymbol{z}^2,\cdots,\boldsymbol{z}^k$，则与之对应的 k 个非负实数为 $b_1,b_2,\cdots,b_k$，现通过该网格离散化问题（D_2）得到一个线性规划问题（D_3）：

$$\begin{aligned}\min\quad & \sum_{j=1}^{k}b_j(\boldsymbol{z}^j)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_0\boldsymbol{z}^j\\ \text{s.t.}\quad & \sum_{j=1}^{k}b_j(\boldsymbol{z}^j)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_i\boldsymbol{z}^j=c_i,i=1,\cdots,m,\\ & b_j\geqslant 0,j=1,2,\cdots,k,\\ & \boldsymbol{z}^j\in Z_k。\end{aligned}$$

网格 Z_k 与集合 Z 的 Hausdorff 距离定义为 $d_{Z_k}:=\mathrm{dist}(Z_k,Z):=\max\limits_{z\in Z}\min\limits_{\hat{z}\in Z_k}\|z-\hat{z}\|$。记

$$B^D(Z_k):=\{b_j\geqslant 0\mid\sum_{j=1}^{k}b_j(\boldsymbol{z}^j)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_i\boldsymbol{z}^j=c_i,i=1,\cdots,m,\boldsymbol{z}^j\in Z_k\}。$$

为了利用离散化方法证明半定规划的强对偶定理，需要建立如下几个结论。

命题 1　如果问题（P）严格可行，问题（D）可行，那么对任意给定的 $\lambda\in\mathbf{R}$，水平集 $L_{\geqslant}(B^D(Z),\boldsymbol{F}_0,\lambda):=\{b_j\in B^D(Z)\mid\sum_{j=1}^{\infty}b_j(\boldsymbol{z}^j)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_0\boldsymbol{z}^j\leqslant\lambda\}$ 有界。

证明　假设存在一个 $\lambda_0\in\mathbf{R}$ 使得水平集 $L_{\geqslant}(B^D(Z),\boldsymbol{F}_0,\lambda_0):=\{b_j\in B^D(Z)\mid\sum_{j=1}^{\infty}b_j(\boldsymbol{z}^j)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_0\boldsymbol{z}^j\leqslant\lambda_0\}$ 无界，则存在非负数列 $\{b_j\}\subset L_{\geqslant}(B^D,\boldsymbol{F}_0,\lambda_0)$ 满足：

$$\lim_{j\to\infty}b_j=+\infty,\tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}b_j(\boldsymbol{z}^j)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_0\boldsymbol{z}^j\leqslant\lambda_0。\tag{3}$$

且 $\boldsymbol{z}^j\in Z'=\{\boldsymbol{z}\in\mathbf{R}^n\mid\|\boldsymbol{z}\|=1\}=Y$。对任意给定的 $\boldsymbol{y}\in Y$，则存在序列 $\{\boldsymbol{v}^j\}$ 满足：

$$\boldsymbol{z}^j=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}^j,\tag{4}$$

且 $\lim\limits_{j\to\infty}\boldsymbol{v}^j=0$。由（2）式，令 $b_j:=a_j+t_j$ 满足：

$$\lim_{j\to\infty}a_j=0,t_j>0,j=1,2,\cdots,\lim_{j\to\infty}t_j=\infty。\tag{5}$$

由级数收敛的必要条件和(3)式可得:$\lim\limits_{j\to\infty} b_j(\boldsymbol{z}^j)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_0\boldsymbol{z}^j=0$,再结合(4)式及(5)式可推得:

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_0\boldsymbol{y}=0,\ \forall\ \boldsymbol{y}\in Y。\tag{6}$$

另一方面,由对偶问题(D)的可行性及其与问题(D_2)的等价性可知,存在 $\bar{b}_j\geqslant 0,\bar{z}^j\in Z'$满足:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\bar{b}_j(\bar{\boldsymbol{z}}^j)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_i\bar{\boldsymbol{z}}^j=c_i,i=1,\cdots,m,\tag{7}$$

令 $\bar{b}_j:=\bar{a}_j+\bar{t}_j$ 满足:

$$\lim_{j\to\infty}\bar{a}_j=0,\bar{t}_j>0,j=1,2,\cdots。\tag{8}$$

因为 $\bar{z}^j\in Z'=Y$,则对任意给定的 $\boldsymbol{y}\in Y$,存在序列$\{\bar{v}^j\}$满足:

$$\bar{\boldsymbol{z}}^j=\boldsymbol{y}+\bar{v}^j,\tag{9}$$

且$\lim\limits_{j\to\infty}\bar{v}^j=0$。由级数收敛的必要条件和(7)式可得:$\lim\limits_{j\to\infty}\bar{b}_j(\bar{z}^j)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_i\bar{z}^j=0,i=1,\cdots,m$。
再结合(8),(9)式可得:

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_i\boldsymbol{y}=0,\ \forall\ \boldsymbol{y}\in Y,i=1,2,\cdots,m。\tag{10}$$

所以由(6),(10)式可得:$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_0\boldsymbol{y}+\sum\limits_{i=1}^{m}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_i\boldsymbol{y}=0,\ \forall\ \boldsymbol{y}\in Y$。

由于问题(P)与问题(P_2)等价,不难发现上式与半定规划问题(1)的严格可行性假设矛盾。 证毕

由于问题(D)的严格可行性必蕴含其可行性,则由命题1可得如下推论。

推论1 如果半定规划(P)和(D)都严格可行,那么对任意给定的$\lambda\in\mathbf{R}$,水平集 $L_{\geqslant}(B^D(Z),\boldsymbol{F}_0,\lambda):=\{b_j\in B^D(Z)\mid\sum\limits_{j=1}^{\infty}b_j(\boldsymbol{z}^j)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_0\boldsymbol{z}^j\leqslant\lambda\}$ 有界。

推论2 如果半定规划(P)和(D)都严格可行,那么对任意给定的$\kappa\in\mathbf{R}$,水平集 $L_{\geqslant}(X^P(Y),\boldsymbol{c},\kappa):=\{\boldsymbol{x}\in X^P(Y)\mid\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\leqslant\kappa\}$有界。

证明 由文献[12]中的引理1和半定规划(P)的严格可行性蕴含问题的可行性得结论成立。 证毕

如下两个命题揭示了:用离散化方法可以求得半定规划问题(P)和(D)满足任意精度的近似解。

命题2 如果半定规划问题(P)严格可行,规划(D)可行,那么对任意给定的$\varepsilon>0$,存在$\delta_\varepsilon>0$,使得$d_{Z_k}<\delta_\varepsilon$,且对于问题($\mathrm{D}_3$)的每个解$\boldsymbol{Z}_k^*$,都存在规划(D)的一个解$\boldsymbol{Z}^*$,使得$\|\boldsymbol{Z}_k^*-\boldsymbol{Z}^*\|<\varepsilon$。

证明 因为问题(P)与(P_2)等价,规划(D)与(D_2)等价,由命题1及文献[15]中的定理4.4可证。 证毕

类似地,可以利用推论2和命题2以及文献[15]中的定理4.4可以证明下面这个命题。

命题3 如果半定规划问题(P)和(D)都严格可行,那么:i) 对任意的$\varepsilon>0$,存在$\delta_\varepsilon>0$,使得$d_{Y_d}<\delta_\varepsilon$,且对于($\mathrm{P}_3$)的每个解$\boldsymbol{x}_d^*$,存在(P)的一个解$\boldsymbol{x}^*$满足$\|\boldsymbol{x}_d^*-\boldsymbol{x}^*\|<\varepsilon$。ii) 对任意的$\varepsilon>0$,存在$\delta_\varepsilon>0$,使得$d_{Z_k}<\delta_\varepsilon$,且对于问题($\mathrm{D}_3$)的每个解$\boldsymbol{Z}_k^*$,存在规划(D)的一个解$\boldsymbol{Z}^*$满足 $\|\boldsymbol{Z}_k^*-\boldsymbol{Z}^*\|<\varepsilon$。

2 强对偶定理的离散化证明方法

当半定规划(P)和(D)满足一定条件时,能够推出对偶间隙 val(P)-val(D)=0,则称为半定规划的强对偶定理。2005年,Yang[12]通过原始半定规划(P)的离散化方法证明了:在原始半定规划(P)可行和对偶半定规划(D)严格可行的假设条件下的强对偶定理。下面利用对偶半定规划问题(D)的离散化方法重新给出半定规划的另外两个强对偶定理的证明,进而为半定规划问题(P)或(D)离散化求解算法提供理论依据。

定理1 如果原始半定规划(P)严格可行,对偶半定规划(D)可行,则 val(P)=val(D),且规划(D)的最优解$\boldsymbol{Z}^*$可达。

证明 由命题1可知,对于任意给定的$\lambda\in\mathbf{R}$,可知水平集 $L_{\geqslant}(B^D(Z),\boldsymbol{F}_0,\lambda)$ 是有界闭的,则水平集$L_{\geqslant}(B^D(Z),\boldsymbol{F}_0,\lambda)$是紧集且当$\lambda$充分大时非空。因此,规划(D)的最优解可以在可行域中取到。现定义网格$Z_k=\{\boldsymbol{z}^1,\boldsymbol{z}^2,\cdots,\boldsymbol{z}^k\}$,则($\mathrm{D}_3$)可以等价地表示成如下形式的线性规划问题($\mathrm{D}_4$):

$$\begin{aligned}\min\quad&\tilde{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b},\\ \text{s.t.}\quad&\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c},\\ &\boldsymbol{b}\geqslant\boldsymbol{0}。\end{aligned}$$

其中：$\tilde{c}:=((z^1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_0z^1,\cdots,(z^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_0z^k)^{\mathrm{T}}$，$b:=(b_1,\cdots,b_k)^{\mathrm{T}}$，$c:=(c_1,\cdots,c_m)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}(z^1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_1z^1 & \cdots & (z^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_1z^k\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ (z^1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_mz^1 & \cdots & (z^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_mz^k\end{pmatrix}$。

记(D_4)的最优目标函数值为 $\mathrm{val}(Z_k)$，也即问题(D_3)的最优目标函数值。线性规划问题(D_4)的拉格朗日对偶问题为(D_5)：

$$\begin{aligned}\min\quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},\\ \text{s.t.}\quad & \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}_j)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}(\boldsymbol{y}_j)\geqslant 0,\\ & \boldsymbol{y}_j\in Y_k,j=1,\cdots,k。\end{aligned}$$

$Y_k=\{\boldsymbol{y}_j\in\mathbf{R}^n\mid\boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_j=1,j=1,\cdots,k\}$，$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}_j)=(\boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{y}_j,\cdots,\boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_m\boldsymbol{y}_j)$，$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{y}_j)=\boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_0\boldsymbol{y}_j$，$j=1,\cdots,k$。记问题($D_5$)的最优目标函数值为 $\mathrm{val}(x_k)$。

由半定规划的弱对偶定理有：

$$\mathrm{val}(\mathrm{P})\geqslant\mathrm{val}(\mathrm{D})。\tag{11}$$

令 $\boldsymbol{Z}^*$ 是问题(D)的最优解。由命题 2，通过不同网格 Z_k 的选取，可以生成点列$\{\boldsymbol{Z}_k^*\}$(离散化问题(D_3)的最优解)，使得：

$$\lim_{d_{Z_k}\to 0}\boldsymbol{Z}_k^*=\boldsymbol{Z}^*\tag{12}$$

因此，对于充分小的 d_{Z_k}，$\mathrm{val}(Z_k)$有界。所以由线性规划的强对偶定理，有：

$$\mathrm{val}(Z_k)=\mathrm{val}(x_k)。\tag{13}$$

由于(P)的可行解包含(D_5)的可行解，则有：

$$\mathrm{val}(\mathrm{P})\leqslant\mathrm{val}(x_k),\tag{14}$$

结合(12)，(13)和(14)式，令 $d_{Y_k}\to 0$ 可得：

$$\mathrm{val}(\mathrm{P})\leqslant\mathrm{val}(\mathrm{D})\ 。\tag{15}$$

综合(11)，(15)式得 $\mathrm{val}(\mathrm{P})=\mathrm{val}(\mathrm{D})$。 证毕

定理 2 如果规划(P)和(D)都严格可行，则 $\mathrm{val}(\mathrm{P})=\mathrm{val}(\mathrm{D})$。且规划(P)的最优解 $\boldsymbol{x}^*$ 和规划(D)的最优解 $\boldsymbol{Z}^*$ 都可达。

证明 由推论 1 和推论 2 可知，对任意给定的 $\kappa,\lambda\in\mathbf{R}$，水平集 $L_{\geqslant}(X^P(Y),c,\kappa)$ 和 $L_{\geqslant}(B^D(Z),\boldsymbol{F}_0,\lambda)$是有界闭的，则 $L_{\geqslant}(X^P(Y),c,\kappa)$，$L_{\geqslant}(B^D(Z),\boldsymbol{F}_0,\lambda)$是紧集且分别当 κ，λ 充分大时非空。因此，规划(P)和(D)的最优解可以在各自的可行域中取到。

现定义网格 $Z_k=\{z^1,z^2,\cdots,z^k\}$，则问题($D_3$)可以等价地表示成如下形式的线性规划问题($D_6$)：

$$\begin{aligned}\min\quad & \tilde{\boldsymbol{c}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b},\\ \text{s.t.}\quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c},\\ & \boldsymbol{b}\geqslant\boldsymbol{0}。\end{aligned}$$

其中 $\tilde{c}:=((z^1)^{\mathrm{T}}F_0z^1,\cdots,(z^k)^{\mathrm{T}}F_0z^k)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}:=(b_1,\cdots,b_k)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{c}:=(c_1,\cdots,c_m)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}(z^1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_1z^1 & \cdots & (z^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_1z^k\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ (z^1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_mz^1 & \cdots & (z^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_mz^k\end{pmatrix}$，记问题($D_6$)的最优目标函数值为 $\mathrm{val}(Z_k)$，也即问题(D_3)的最优目标函数值。线性规划问题(D_6)的拉格朗日对偶问题为(D_7)：

$$\begin{aligned}\min\quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},\\ \text{s.t.}\quad & \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(y_j)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}(y_j)\geqslant 0,\\ & \boldsymbol{y}_j\in Y_k,j=1,\cdots,k。\end{aligned}$$

$Y_k=\{\boldsymbol{y}_j\in\mathbf{R}^n\mid\boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_j=1,j=1,\cdots,k\}$，$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}_j)=(\boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{y}_j,\cdots,\boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_m\boldsymbol{y}_j)$，$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{y}_j)=\boldsymbol{y}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_0\boldsymbol{y}_j$，$j=1,\cdots,k$。记问题($D_7$)的最优目标函数值为 $\mathrm{val}(x_k)$。令 $\boldsymbol{x}^*$ 是(P)的最优解，Z^* 是(D)的最优解。由命题 3，通过不同网格 Y_k，Z_k 的选取，可以生成点列$\{\boldsymbol{x}_k^*\}$(离散化问题(P_3)的最优解)，$\{\boldsymbol{Z}_k^*\}$(离散化问题(D_3)的最优解)，使得：

$$\lim_{d_{Y_k}\to 0}\boldsymbol{x}_k^*=\boldsymbol{x}^*,\tag{16}$$

$$\lim_{d_{Z_k}\to 0} \boldsymbol{Z}_k^* = \boldsymbol{Z}^*。\tag{17}$$

因此,对于充分小的 d_{Y_k},$\mathrm{val}(x_k)$有界,对于充分小的 d_{Z_k},$\mathrm{val}(Z_k)$有界。所以由线性规划的强对偶定理,有:

$$\mathrm{val}(Z_k)=\mathrm{val}(x_k)。\tag{18}$$

结合(16),(17)和(18)式,令 $d_{Y_k}\to 0$,$d_{Z_k}\to 0$ 可得:val(P)=val(D)。 证毕

3 半定规划的离散化算法及数值实验结果

受文献[14-15]的启发,下面给出半定规划的离散化算法的具体实现步骤。

算法1 半定规划问题(P)的离散化算法:

第1步,将半定规划原问题(P)转化为与其等价的半无限规划问题(P_2);

第2步,选取 $Y:=\{\boldsymbol{y}\in[-1,1]^n \mid \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=1\}$;

第3步,选取网格 $Y_d\subseteq Y$:将箱子约束$[-1,1]^n$ 的每条边视为一个区间,等分每个区间成 $2h+1$ 等份,节点为$\left\{-1+\frac{2i}{2h+1}, i=0,1,\cdots,2h+1\right\}$,其中 h 为自然数。于是得到$[-1,1]^n$ 的一个格点集,记为 Y_d。设格点数为 g,则 $g=(2h+2)^n$,为了缩短计算时间和减少约束条件,选取 Y_d 中的边界点,此时的格点数目为 g',则 $g'=(2h+2)^n-(2h)^n$;

第4步,利用有限网格将半无限规划问题(P_2)近似地转化为线性规划问题(P_3),并利用 Matlab 中的 Linpro 函数求解这个线性规划问题,得出最优值。

注 该离散化算法的实质是采用网格的方式将线性半无限规划问题近似地转化为线性规划问题进行求解,而网格搜索算法本身只能处理较小规模的问题且十分耗时。因此,该算法目前还只能有效计算较小规模的半定规划问题。但是,该算法区别于所有的内点算法,无需存储和分解牛顿矩阵,整个计算过程不需占用大量的内存空间。下面分别利用 CVX[16] 的 SDPT3 算法和上面的离散化算法考察具体的数值实验结果。取 $h=10$,根据设计的算法步骤,比较 CVX[16] 的 SDPT3 算法和离散化算法的数值结果,如表1所示。用 Matlab R2013a 编程实现算法。该数值实验是利用 Matlab R2013a 在 1.3 GHz 处理器和 8 GB 内存的笔记本电脑上进行测试的。

算例1

$$\min \quad x_1+x_2$$

$$\text{s.t.}\quad x_1\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}\geqslant 0。$$

算例2

$$\min \quad x_1+x_2$$

$$\text{s.t.}\quad x_1\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&3&0\\3&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\geqslant 0。$$

算例3

$$\min \quad x_1,$$

$$\text{s.t.}\quad x_1\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\geqslant 0。$$

表1 SDPT3 算法与离散化算法数值结果比较

Tab. 1 Comparison of numerical experiment results between SDPT3 and discretization algorithms

算例	SDPT3 算法的最优值	离散化算法的最优值
算例1	1.000 0	1.000 0
算例2	4.000 0	3.997 7
算例3	−0.666 7	−0.667 0

参考文献:

[1] YAO D,ZHANG S Z,ZHOU X Y.:Stochastic linear-quadratic control via semidefinite programming[J].SIAM Journal on Control and Optimization,2001,40(3):801-823.

[2] DALAKOURAS G V,KWON R H,PARDALOS P M. Semidefinite programming approaches for bounding asian option prices[M].Computational Methods in Financial Engineering:Essays in Honour of Manfred Gilli. Berlin/Heidelberg:Springer,2008:103-116.

[3] DING Y C,GE D D,WOLKOWICZ H.On equivalence of SDP relaxiations for quadratic matrix programming[J]. Mathematics of Operations Research,2011,36(1):88-104.

[4] BISWAS P,TOH K C,YE Y.A distributed SDP approach for large-scale noisyanchor-free graph realization with applications to molecular conformation[J].SIAM Journal on Scientific Computing,2008,30(3):1251-1277.

[5] KLERK E D,PASECHNIK D V,SOTIROV R.On Semidefinite programming relax relaxations of the traveling salesman problem[J].Social Science Electronic Publishing,

2009,19(4):1559-1573.

[6] GRIPPO L, PALAGI L, PICCIALLI V. An unconstrained minimization method for solving low-rank SDP relaxations of the maxcut problem[J]. Mathematical Programming, 2011,126(1):119-146.

[7] RAMANA M V. An exact duality theory for semidefinite programming and its complexity implications[J]. Mathematical Programming,1997,77(1):129-162.

[8] RAMANA M V, TUNCXELZ L, WOLKOWICZ H. Strong duality for semidefinite programming[J]. SIAM Journal on Optimization,1997,7(3):641-662.

[9] 杨洋,罗洪林,罗慧林.关于半定规划的一种宽邻域不可行内点算法的注记[J].运筹学学报,2016,20(2):79-87.
YANG Y, LUO H L, LUO H L. A note on a wide neighborhood infeasible interiorpoint algorithm for semidefinite programming[J]. Operations Research Transactions, 2016, 20(2):79-87.

[10] HELMBERG C. Invited Review, Semidefinite programming [J]. European Journal of Operational Research, 2002,137(3): 461-482.

[11] HUANG A Q, XU C X. A trust region method for solving semidefinite programs[J]. Computation Optimization and Applications,2013,55(1):49-71.

[12] YANG Q Z. A new proof of the strong duality theorem for semidefinite programming[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2005,303(2):622-626.

[13] DATTORRO J. Convex optimization and euclidean distence geometry[M]. California: Meboo Publishing USA, 2005:100-102.

[14] HETTICH R, KORTANEK K. Semi-infinite programming: theory, methods, and application[J]. SIAM Review, 1993,35(3):380-429.

[15] HETTICH R. An implementation of a discretization method for semi-infinite programming[J]. Mathematical Programming,1986,34(3):354-361.

[16] GRANT M, BOYD S. The CVX users Guide[EB/OL]. (2013-03-01)[2017-06-25]. http://cvxr.com/cvx/(221).

Operations Research and Cybernetics

Solving Semidefinite Programs via Discretization Method for Solving Semiinfinite Programming Problems

XI Mingxiao, LUO Honglin

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [**Purposes**] A new approximate algorithm for solving semidefinite programs and a new method for proving the strong duality theorem of the semidefinite programming problems are proposed. [**Methods**] Via discretization method, a semi-infinite program is equivalently reformulated into another semi-infinite programming problem firstly. Then, the semidefinite programming problem is relaxed into a series of linear progra-programming problems. [**Findings**] The semidefinite programs' Lagrangian strong duality theorem by use of the linear programming problems' strong duality theorem are reproved. [**Conclusions**] A new approximate algorithm for solving semidefinite programs via a discretization method and some numerical experiment results are provided.

Keywords: semidefinite programs; semiinfinite programming problems; discretization method; strong duality theorem.

(责任编辑 黄 颖)