2018 年 3 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Mar. 2018
第 35 卷 第 2 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 35 No. 2

DOI:10.11721/cqnuj20180212

具有乘法右适当断面的右富足半群的同余*

王爱法, 王丽丽

(重庆理工大学 理学院, 重庆 400054)

摘要:【目的】研究具有乘法右适当断面的右富足半群 S 的基于子半群 M, R 为构件的结构。【方法】引入用 M, R 上的同余作成的同余对的概念,给出了 S 上的相应的同余刻划。【结果】用给出同余刻划方法描述了半群 S 上的好同余和半群 S 上的所有好同余的集合作成的同余格。【结论】所得结果丰富和推广了正则半群上的一些相关结果。

关键词:右适当半群;右正规带;同余

中图分类号:O152.7 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2018)02-0077-04

1 预备知识

同余理论是半群理论一个重要课题,正如 Howie[1] 指出:一个半群的结构定理是否真正令人满意在于它能否保证给出一个同余的明确描述。人们对正则半群关于这方面的研究有极大地兴趣并得到了关于同余理论的大量结果[2-4]。1982 年,Blyth 和 McFadden[5] 首次引入了正则半群的乘法逆断面概念,并给出此类半群的结构定理。随后,El-Qallali[6] 给出了适当断面的定义,并得到了具有适当断面的正则半群的结构定理。在此基础上,文献[7-8]分别研究了含有逆断面和拟理想逆断面的正则半群的同余。富足半群是正则半群的一个推广且以正则半群为它的真子类。因此,研究富足半群的同余是一件很自然的事情,但是这方面的研究要比正则半群的同余复杂的多。由于富足半群的每个元素不是都有逆元,因而在富足半群与正则半群的研究上存在许多不同。例如,正则半群的同态像仍然是正则半群,但是富足半群却不具有这样的性质。然而这样的性质在半群研究中有非常重要的作用,所以需要对具有这样性质的好同态(同余)花费更多的精力去研究。有许多学者对这方面的研究非常感兴趣并取得了一些结果[7-9]。特别地,Chen 和 Guo[10-13] 分别研究了含有适当断面的富足半群的子类。Hu 和 Guo[13] 给出了具有乘法右适当断面的右富足半群的结构定理。本文首先构造具有乘法右适当断面的右富足半群的同余。在此基础上,得到了具有乘法右适当断面的右富足半群的好同余,并证明了此类半群上的所有好同余的集合构成一个完备格。

设 S 为半群,对任意元素 $a\in S$,如果 S 的主右理想 aS^1 是一个投射(作为一个右 S-系),则称 S 为右主投射半群。容易看到半群 S 为右主投射半群的充分必要条件是 S 的每一个 L^*-类包含一个幂等元。对偶地,可以定义左主投射半群。在半群 S 上,定义关系 R^* 为:aR^*b 当且仅当对所有的 $x,y\in S^1$,$xa=ya\Leftrightarrow xb=yb$。对偶地可定义 L^*。由 R^* 和 L^* 的定义易得 R^* 是左同余,L^* 是右同余。若 a 和 b 是 S 中的正则元,则 aR^*b 当且仅当 aRb。设 S 为半群,若 S 的每一个 L^*-类含有一个幂等元,则称 S 为右富足半群。容易看到右富足半群即为右主投射半群。对偶地可定义左富足半群。由文献[7]知,若 S 既是左富足半群又是右富足半群,则称 S 为富足半群。

设 S 为半群,用 $E(S)$ 表示由 S 中的所有幂等元组成的集合。若右富足半群 S 的子集 $E(S)$ 是半格,则称 S 为右适当半群[14]。对偶地可定义左适当半群。若半群 S 既是左适当半群又是右适当半群,则称 S 为适当半群。由定义可得,左(右)适当半群的每一个 R^* (L^*)-类有且只有一个幂等元,用 a^+ (a^*)表示此半群中 R_a^* (L_a^*)-类的幂等元。

* **收稿日期:**2017-01-05 **修回日期:**2018-03-05 **网络出版时间:**2018-03-23 15:54

资助项目:国家自然科学基金(No.11571278);重庆市教委科学技术研究项目(No.KJ1600930)

第一作者简介:王爱法,男,讲师,博士研究生,研究方向为代数学,E-mail:wangaf@cqut.edu.cn;**通信作者:**王丽丽,副教授,E-mail:wllaf@163.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20180323.1554.024.html

设 S 为右富足半群,U 为 S 的右富足子半群。若对于所有的 $a\in U$,存在 $f\in E(U)$ 使得 $f\in R_a^*(S)$,则称 U 是 S 的 $*$-子半群。若对于右富足半群 S 的任意的元素 a,存在唯一的 $a^{\#}\in E(S)\cap L_a^*$,使得 $a=a^{\#}a$,则称 S 是强右富足半群。设 S° 是 S 右适当 $*$-子半群,E° 是 S° 的幂等元半格。若对任意的 $x\in S$,存在唯一的 $x^\circ\in S^\circ$ 和 $f\in E(S)$ 使得 $x=x^\circ f$,则称 S° 是 S 的右适当断面,这里 $fR^*x^{\circ *}$ 且 $x^{\circ *}\in E^\circ$。在这种情况下,f 由 x 唯一确定,用 f_x 表示 f。若右适当断面 S° 是强的,则称它为 S 的强右适当断面。若对任意的 $x\in S$ 和 $e\in E^\circ$,都有 $f_x e\in E^\circ$,则称右适当断面 S° 是 S 的乘法右适当断面。

引理 1[15] 设 $e\in E(S)$,$a\in S$,则 $eR^*a(eL^*a)$ 当且仅当 $ea=a(ae=a)$,并且对于所有的 $x,y\in S^1$,有 $xa=ya\Rightarrow xe=ye(ax=ay\Rightarrow ex=ey)$。

引理 2[15] 设 S 是右适当半群,则对于所有的 $a,b\in S$,有 $(ab)^*=(a^*b)^*$。

假设:Y 是半格;M 是以幂等元集 Y 为半格的强右适当半群;R 是具有强半格分解 $[Y;R_\alpha,\varphi_{\alpha,\beta}]$ 的右正规带,对任意的 $\alpha\in Y$,R_α 是一个右零带。

在 $W(M,R,Y;\varphi)=\{(m,x)\in M\times R\mid xRm^*\}$ 上定义乘法为 $(m,x)(n,y)=(mn,y\varphi_{n^*,(mn)^*})$。容易验证按照这样定义的乘法是有意义的,并且 $W(M,R,Y;\varphi)$ 对上面的乘法封闭。

称 $W(M,R,Y;\varphi)$ 为强右适当半群 M 和右正规带 R 的拟织积,用 W 来表示它。

引理 3[13] 强右适当半群 M 和右正规带 R 的拟织积是具有与 M 同构的乘法强拟适当断面的右富足半群。反之,每一个这样的半群都可以按照上述方式来构造。

引理 4[13] 在半群 W 中,有:1) $(m,x)L^*(m^*,x)$;2) $(m,x)R^*(m^+,x)$。

2 主要结果

设 M 是以幂等元集 Y 为半格的强右适当半群,R 是具有强半格分解 $[Y;R_\alpha,\varphi_{\alpha,\beta}]$ 的右正规带,ρ^M 为 M 上的同余,π^R 为 R 上的同余。若条件

C1) $\rho^M|_Y=\pi^R|_Y$,

C2) $(\forall s,t\in R)(\forall m,x,u\in M)s\pi^R t\Rightarrow s\varphi_{x^*,(mx)^*}\rho^R t\varphi_{u^*,(mu)^*}$,

C3) $(\forall l\in R)(\forall m,x,u\in M)x\rho^M u\Rightarrow l\varphi_{m^*,(xm)^*}\pi^R l\varphi_{m^*,(um)^*}$

成立,则称 (ρ^M,π^R) 为 W 上的同余对。

在 W 上定义二元关系 $\rho^{(\rho^M,\pi^R)}$ 为:$(x,s)\rho^{(\rho^M,\pi^R)}(u,t)\Leftrightarrow x\rho^M u,s\pi^R t$。

定理 1 设 W 为形如引理 3 中含有乘法强拟适当断面的右富足半群,(ρ^M,π^R) 为 W 上的同余对,则 $\rho^{(\rho^M,\pi^R)}$ 是 W 上的同余。反之,W 上的每一个同余都可以按照上述方式来构造。

证明 显然 $\rho^{(\rho^M,\pi^R)}$ 是 W 上的等价关系,只需证 $\rho^{(\rho^M,\pi^R)}$ 是 W 上的同余。假设 $(x,s),(u,t),(m,l)\in W$,且 $(x,s)\rho^{(\rho^M,\pi^R)}(u,t)$,则 $x\rho^M u,s\pi^R t$。由 $s\pi^R t$ 和条件 C2) 可得对任意的 $x,u,m\in M$ 都有 $s\varphi_{x^*,(mx)^*}\rho^R t\varphi_{u^*,(mu)^*}$。因为 ρ^M 是同余,故 $mx\rho^M mu$。又因为 $s\varphi_{x^*,(mx)^*}R(mx)^*$ 和 $t\varphi_{u^*,(mu)^*}R(mx)^*$。从而可得:

$$(mx,s\varphi_{x^*,(mx)^*})\rho^{(\rho^M,\pi^R)}(mu,t\varphi_{u^*,(mu)^*}),$$

即 $(m,l)(x,s)\rho^{(\rho^M,\pi^R)}(m,l)(u,t)$。因此 $\rho^{(\rho^M,\pi^R)}$ 是 W 上的左同余。

另一方面,由 $x\rho^M u$ 和条件 C3) 可得对任意的 $l\in R$,都有 $l\varphi_{m^*,(xm)^*}\pi^R l\varphi_{m^*,(um)^*}$。因为 ρ^M 是同余,所以 $xm\rho^M um$。又因为 $l\varphi_{m^*,(xm)^*}R(xm)^*$ 和 $l\varphi_{m^*,(um)^*}R(um)^*$,所以 $(xm,l\varphi_{m^*,(xm)^*}),(um,l\varphi_{m^*,(um)^*})\in W$。从而有 $(xm,l\varphi_{m^*,(xm)^*})\rho^{(\rho^M,\pi^R)}(um,l\varphi_{m^*,(um)^*})$,即 $(x,s)(m,l)\rho^{(\rho^M,\pi^R)}(u,t)(m,l)$。故 $\rho^{(\rho^M,\pi^R)}$ 是 W 上的右同余。因此,$\rho^{(\rho^M,\pi^R)}$ 是 W 上的同余。

反之,假设 ρ 是 W 上的同余。在 M 和 R 上分别定义二元关系 ρ_M 和 ρ_R 为:

$$(\forall x,u\in M)x\rho_M u\Leftrightarrow(x,x^*)\rho(u,u^*);(\forall s,t\in R)s\pi_R t\Leftrightarrow(x^*,s)\rho(u^*,t),$$

这里 $x,u\in M,sRx^*,tRu^*$。

因为 ρ 是 W 上的同余,所以 ρ_M,ρ_R 分别是 M 和 R 上的等价关系。设 $(x,s),(u,t),(p,o),(m,l)\in W$。若

$x\rho_M u$,$p\rho_M m$,则$(x,x^*)\rho(u,u^*)$,$(p,p^*)\rho(m,m^*)$。从而$(x,x^*)(p,p^*)\rho\rho(u,u^*)(m,m^*)$。因此$(xp,p^*\varphi_{p^*,(xp)^*})\rho(um,m^*\varphi_{m^*,(um)^*})$。所以 $xp\rho_M um$。因此,ρ_M 为 M 上的同余。

若 $s\pi_R t$,$o\pi_R l$,则存在 $x,u\in M$ 使得 sRx^*,tRu^* 且有$(x^*,s)\rho(u^*,t)$和$(p^*,o)\rho(m^*,l)$。从而可得$(x^*,s)(p^*,o)\rho(u^*,t)(m^*,l)$。因此$(x^*p^*,o\varphi_{p^*,(x^*p^*)^*})\rho(u^*m^*,l\varphi_{m^*,(u^*m^*)^*})$。故 $so\pi_R tl$。从而,π_R 为 R 上的同余。

显然 $\rho^M|_Y=\pi^R|_Y$,故条件 C1)成立。

设 $x\rho^M u$,则$(x,x^*)\rho(u,u^*)$。从而$(x,x^*)(m,l)\rho(u,u^*)(m,l)$,即$(xm,l\varphi_{m^*,(xm)^*})\rho(um,l\varphi_{m^*,(um)^*})$。因此 $l\varphi_{m^*,(xm)^*}\pi^R l\varphi_{m^*,(um)^*}$。故条件 C3)成立。

设 $s,t\in R$,$x,u\in M$ 使得$(x^*,s)\rho(u^*,t)$。从而对任意的$(m,l)\in W$ 有$(x^*,s)(m,l)\rho(u^*,t)(m,l)$,即$(x^*m,l\varphi_{m^*,(x^*m)^*})\rho(u^*m,l\varphi_{m^*,(u^*m)^*})$,因此 $l\varphi_{m^*,(xm)^*}\ \pi_R l\varphi_{m^*,(um)^*}$,故条件 C2)成立。

由以上的证明可得(ρ_M,ρ_R)是 W 上的同余对。

显然 $\rho^{(\rho_M,\pi_R)}$是 W 上的同余。对任意的$(x,s)(u,t)\in W$,若$(x,s)\rho^{(\rho_M,\pi_R)}(u,t)$,则 $x\rho_M u$,$s\pi_R t$。因此有$(x,x^*)\rho(u,u^*)$,$(x^*,s)\rho(u^*,t)$。从而$(x,x^*)(x^*,s)\rho(u,u^*)(x,t)$,即$(x,s)\rho(u,t)$。故 $\rho^{(\rho_M,\pi_R)}\subseteq\rho$。而 $\rho\subseteq\rho^{(\rho_M,\pi_R)}$是显然的,所以 $\rho^{(\rho_M,\pi_R)}=\rho$。　　证毕

如果由半群 S 到半群 T 的同态 φ 保持 L^*-类和 R^*-类(即对任意的 $a,b\in S$,如果$(a,b)\in L^*$,则$(a\varphi,b\varphi)\in L^*$,且如果$(a,b)\in R^*$,则$(a\varphi,b\varphi)\in R^*$),则称 φ 为好同态。设 ρ 是半群 S 上的同余,如果由 ρ 诱导的 S 到 S/ρ 上的同态 $\rho^{\perp}$ 是好同态,则称 ρ 为好同余。记 S 上的好同余的集合为 $GC(S)$。容易验证,对任意的$(x,s)(u,t)\in W$,$(x,s)L^*(u,t)$ 等价于 xL^*u,因此,由定理 1 有下面的推论。

推论 1　$\rho^{(\rho^M,\pi^R)}$是 W 上的好同余的充分必要条件是 ρ^M 是 M 上的好同余。

若 W 上的同余对(ρ^M,π^R)中的 ρ^M 为 M 上的好同余,则称(ρ^M,π^R)为 W 上的好同余对。用 $GCP(W)$表示 W 上好同余对的全体。

引理 5　若(ρ_1^M,π_1^R),$(\rho_2^M,\pi_2^R)\in GCP(W)$,则 $\rho^{(\rho_1^M,\pi_1^R)}\subseteq\rho^{(\rho_2^M,\pi_2^R)}\Leftrightarrow\rho_1^M\subseteq\rho_2^M$,$\pi_1^R\subseteq\pi_2^R$。

证明　充分性是显然的,下面证必要性。

假设 $\rho^{(\rho_1^M,\pi_1^R)}\subseteq\rho^{(\rho_2^M,\pi_2^R)}$,$x\rho_1^M u$。由定理 1 的证明可得$((x,x^*)(u,u^*))\in\rho^{(\rho_1^M,\pi_1^R)}\subseteq\rho^{(\rho_2^M,\pi_2^R)}$。从而 $x\rho_2^M u$,因此 $\rho_1^M\subseteq\rho_2^M$。同理可证 $\pi_1^R\subseteq\pi_2^R$。　　证毕

在 $GCP(W)$上定义关系“$\leqslant$”为:$(\rho_1^M,\pi_1^R)\leqslant(\rho_2^M,\pi_2^R)\Leftrightarrow\rho_1^M\subseteq\rho_2^M$,$\pi_1^R\subseteq\pi_2^R$。

显然“$\leqslant$”是 $GCP(W)$上的偏序。由定理 1 和引理 5 可得 $GC(W)$和 $GCP(W)$作为格是同构的。

命题 1　设 $\Omega\subseteq GC(W)$,$T_\rho=(\rho^M,\rho^R)$(其中 $\rho\in\Omega$),则 $T_{(\bigcap_{\rho\in\Omega}\rho)}=(\bigcap\limits_{\rho\in\Omega}\rho^M,\bigcap\limits_{\rho\in\Omega}\rho^R)$,$T_{(\overset{g}{\bigvee}_{\rho\in\Omega}\rho)}=(\overset{g}{\bigvee}\limits_{\rho\in\Omega}\rho^M,\overset{g}{\bigvee}\limits_{\rho\in\Omega}\rho^R)$。这里,$\rho\overset{g}{\vee}\eta$ 表示包含好同余 ρ 和 η 的最小的好同余。

证明　第一个等式显然成立,因此只需证明第二个等式。

设 $x,u\in M$,使得 $x(\overset{g}{\bigvee}\limits_{\rho\in\Omega}\rho)^M u$,则 $i=(x,x^*)\overset{g}{\bigvee}\limits_{\rho\in\Omega}\rho(u,u^*)=j$。从而存在 $\rho_i\in\Omega$ 和 $a_i=(x_i,x_i^*)\in W$,使得 $i\rho_1 a_1\rho_2 a_2\cdots a_{n-1}\rho_n j$。因此 $i\rho_1^M a_1\rho_2^M a_2\cdots a_{n-1}\rho_n^M j$,故$(\overset{g}{\bigvee}\limits_{\rho\in\Omega}\rho)^M\subseteq\overset{g}{\bigvee}\limits_{\rho\in\Omega}\rho^M$。而 $\overset{g}{\bigvee}\limits_{\rho\in\Omega}\rho^M\subseteq(\overset{g}{\bigvee}\limits_{\rho\in\Omega}\rho)^M$ 是显然的,所以$(\overset{g}{\bigvee}\limits_{\rho\in\Omega}\rho)^M=\overset{g}{\bigvee}\limits_{\rho\in\Omega}\rho^M$。

接下来假设 $s\in R_{x^*}$,$t\in R_{u^*}$,使得 $s(\overset{g}{\bigvee}\limits_{\rho\in\Omega})^R t$,则 $s=(x^*,s)\overset{g}{\bigvee}\limits_{\rho\in\Omega}\rho(u^*,t)=t$。从而存在 $s_i=(x_i^*,s_i)\in W$ 和 $\rho_i\in\Omega$,使得 $s\rho_1 s_1\rho_2 s_2\cdots s_{n-1}\rho_n t$,因此 $s\rho_1^R s_1\rho_2^R s_2\cdots s_{n-1}\rho_n^R t$。故$(\overset{g}{\bigvee}\limits_{\rho\in\Omega}\rho)^R\subseteq\overset{g}{\bigvee}\limits_{\rho\in\Omega}\rho^R$,而 $\overset{g}{\bigvee}\limits_{\rho\in\Omega}\rho^R\subseteq(\overset{g}{\bigvee}\limits_{\rho\in\Omega}\rho)^R$ 是显然的,所以$(\overset{g}{\bigvee}\limits_{\rho\in\Omega}\rho)^R=\overset{g}{\bigvee}\limits_{\rho\in\Omega}\rho^R$。　　证毕

结合上面的结果可得到下面的定理。

定理 2　设 W 是形如引理 3 中的半群,则 $GCP(W)$在文中定义的偏序下是完备格,且 $GC(W)$和 $GCP(W)$

作为完备格是同构的。

参考文献：

[1] HOWIE J M. An introduction to semigroup theory[M]. London: Academic Press, 1967.

[2] TANG X L, WANG L M. Congruences on regular semigroups with inverse transversals[J]. Comm Algebra, 1995, 23(11): 4157-4171.

[3] WANG L M. On congruence lattice of regular semigroups with Q-inverse transversals[J]. Semigroup Forum, 1995, 50(1): 141-160.

[4] WANG L M, TANG X L. Congruence lattices of regular semigroups with inverse transversals[J]. Comm Algebra, 1998, 26(4): 1234-1255.

[5] BLYTH T S, Mc FADDEN R B. Regular semigroups with a multiplicative inverse transversal[J]. Proc Roy Soc Edinburgh, 1982, 92(3/4): 253-270.

[6] El-QALLALI A. Abundant semigroups with a multiplicative type transversal[J]. Semigroup Forum, 1993, 47(1): 327-340.

[7] GUO X J, LIU A Q. Congruences on abundant semigroups associated with Green's *-relations [J]. Period Math Hung, 2017, 75(1): 14-28.

[8] WANG A F, WANG L L. *-congruences on abundant semi-groups with SQ-adequate transversals[J]. Acta Math Hung, 2013, 141(4): 358-365.

[9] ZHANG T J, TIAN Z J, SHI Y B. Good congruences on abundant semigroups with PSQ-adequate transversals[J]. Semigroup Forum, 2014, 89(2): 462-468.

[10] CHEN J F. Abundant semigroups with adequate transversals[J]. Semigroup Forum, 2000, 60(1): 67-79.

[11] GUO X J. Abundant semigroups with a multipicative adequate transversal[J]. Acta Math Sin, 2002, 18(2): 229-244.

[12] GUO X J, Wang L M. Idempotent-connected abundant semigroups which are disjoint unions of quasi-ideal adequate transversals[J]. Comm Algebra, 2002, 30(4): 1779-1800.

[13] HU Y H, GUO X J. Right pp semigroups with multiplicative right adequate transversals[J]. Chin Quart J of Math, 2011, 26(3): 366-371.

[14] FOUNTAIN J. Adequate semigroups[J]. Proc Edinburgh Math Soc, 1979, 22(2): 113-125.

[15] FOUNTAIN J. Abundant semigroups[J]. Proc London Math Soc, 1982, 44(1): 103-129.

Congruences on Right Abundant Semigroups with Multiplicative Right Adequate Transversals

WANG Aifa, WANG Lili

(School of Sciences, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China)

Abstract: [**Purposes**]Right abundant semigroups was studied with multiplicative right adequate transversals on the basic of the structure related to the build bricks M and R. [**Methods**]The so-called congruence pair was obtained based on the structure theorem, so that it produces a congruence on S abstractly. [**Findings**]The good congruence and the lattice of the set of all good congruences on S were also described here. [**Conclusions**]The related results for regular semigroups are enriched and extended.

Keywords: right adequate semigroup; right normal band; congruence

（责任编辑 黄 颖）