DOI:10.11721/cqnuj20180214

一类具有斑块效应的脉冲传染病模型的稳定性和持久性研究*

张兰珠，陈　成，杨志春

(重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331)

摘要:【目的】斑块效应和非线性传染率对传染病模型研究具有重要的现实意义，基于此研究建立一个斑块环境下具有脉冲接种和非线性传染率为$\frac{\beta SI}{1+\alpha I}$的 SIR 传染病模型。【方法】利用脉冲微分比较原理、线性化方法、Floquet 定理以及线性微分方程基解矩阵的谱理论的性质等相关理论。【结果】获得了疾病灭绝周期解全局渐近稳定的充分条件，并利用持续性理论、庞加莱映射以及不可约矩阵的性质，给出系统一致持久的充分条件。【结论】通过$R_0<1$时，无病周期解是全局渐近稳定的；$R^*>1$时，系统是一致持久的。

关键词:斑块环境;SIR 传染病模型;脉冲接种;周期性;稳定性;持久性

中图分类号:O175.12　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2018)02-0081-06

传染病问题是当今世界面临的重大问题，天花、禽流感、SARS、麻疹等疾病影响人类健康，给人类带来很多的不幸和损失。因此，弄清楚传染病的发病机理与传播规律，并进行相应的预防和控制，显得非常迫切。利用数学模型，特别是脉冲微分方程来建立传染病的数学模型，成为研究传染病的发病机理和传播规律的一种重要手段。

由于传染率对传染病的影响非常重要，最近具有形如$\frac{\beta SI}{1+\alpha I}$及由它变形的非线性传染率传染病模型吸引了许多学者关注。Xin 等人[1]建立了具有非线性传染率$\frac{\beta SI}{1+pI^q}$的 SEIS 模型，得到了该系统的一致持久存在性。Ruan 等人[2]引入了形如$\frac{\beta SI^p}{1+pI^q}$传染率的传染病模型，给出疾病灭绝和持久的充分条件。Li 等人[3]研究了具有非线性传染率为$\frac{\beta SI}{1+k_1 I}$的脉冲免疫接种 SIRSV 模型，得到了这一模型无病周期解的全局渐近稳定和系统持续生存的充分条件。显然，进一步研究该类非线性传染率的传染病模型是必要的。

同时，为了对传染病进行控制，常常在给定的时间点进行预防接种。由于接种通常在某个固定时刻进行，由脉冲微分方程描述的脉冲接种传染病及动力学行为成为一个研究热点。Chen 等人[4]研究了具有垂直和水平传染的 SIR 传染病模型，在脉冲接种的情况下，对系统周期解进行了分析。Pei[5]提出了脉冲接种和隔离的 SI 时滞模型，结果也证明了脉冲接种和隔离能够有效地控制传染性疾病。Wei[6]建立了 SVEIR 传染病时滞模型，分析了模型在脉冲接种下的动力学行为，结果证明了脉冲接种对消除疾病是一个有效的方法。

另一方面，由于空间的差异性，不同区域或斑块因为地理环境等不同，导致生物有不同的出生率、死亡率，而区域间往往存在种群间的扩散。因此，具有斑块效应的传染病模型的研究受到了一些学者的关注。Wang 等人[7-8]提出了在两个或多个斑块间进行扩散的传染病模型，获得疾病一致持久和灭绝的阈值条件。Wang 等人[10]建立了具有周期系数和斑块效应的传染病模型，获得了周期解稳定性和持久性的充分条件。Yang 等人[9]研究了 n 个斑块扩散的具有脉冲接种的 SIR 传染病模型，通过 Floquet 理论和比较原理得出疾病灭绝和一致持续性的的经济阈值，最后数值模拟两个斑块模型的阈值。目前，对具有非双线性传染率和斑块效应的脉冲传染

* **收稿日期**:2017-02-07　　**修回日期**:2017-12-06　　**网络出版时间**:2018-03-23 15:54

资助项目:国家自然科学基金(No.11471061);重庆市自然科学基金(No.CQCSTC2014JCYJA40004);重庆市高校创新团队计划(No.CXTDG201602008);重庆市研究生科研创新项目(No.CYS17184)

第一作者简介:张兰珠，女，研究方向为微分方程与动力系统，E-mail: 1479027550@qq.com;**通信作者**:杨志春，教授，E-mail: yangzhch@126.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20180323.1554.026.html

病模型及其动力学研究仍然没有文献报道。

本文主要是对斑块环境下具有脉冲接种和非线性传染率的 SIR 传染病模型进行定性分析,给出该类系统疾病灭绝和系统持久的充分条件,推进前人相关工作。

1 模型的建立与准备

基于以上讨论,建立一类新的斑块环境下具有脉冲接种和非线性传染率的 SIR 传染病模型:

$$\begin{cases}\left.\begin{aligned}&S_i'(t)=m_i-\frac{\beta_i S_i(t)I_i(t)}{1+\alpha I_i(t)}-\mu_i S_i(t)+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}S_j(t),\\&I_i'(t)=\frac{\beta_i S_i(t)I_i(t)}{1+\alpha I_i(t)}-(\mu_i+g_i)I_i(t)+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}I_j(t),\\&R_i'(t)=g_iI_i(t)-\mu_iR_i(t)+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}R_j(t),\end{aligned}\right\}t\neq nT,n\in\mathbf{N},i=1,2,\cdots,n,\\\left.\begin{aligned}&S_i(nT^+)=(1-p_i)S_i(nT),\\&I_i(nT^+)=I_i(nT),\\&R_i(nT^+)=R_i(nT)+p_iS_i(nT)。\end{aligned}\right\}t=nT,n\in\mathbf{N},i=1,2,\cdots,n,\end{cases}\tag{1}$$

其中 $S_i(t)$,$I_i(t)$,$R_i(t)$分别表示第 i 个斑块 t 时刻易感染者、感染者、移出者的数量;m_i 为第 i 个斑块的易感染者的输入率;β_i 为第 i 个斑块的传播系数;μ_i 为第 i 个斑块的死亡率;g_i 为第 i 个斑块的恢复率;$\frac{\beta_i S_i(t)I_i(t)}{1+\alpha I_i(t)}$ $(i=1,2,\cdots,n)$为非线性传染率;根据生物意义,不妨假设 m_i,β_i,μ_i,$g_i(i=1,2,\cdots,n)$,$\alpha\geqslant 0$ 均为非负常数;$0\leqslant p_i<1$ 表示第 i 个斑块的成功接种率;T 表示脉冲接种时间间隔长度;$-a_{ii}$,$-b_{ii}$,$-c_{ii}\geqslant 0$ 表示第 i 个斑块的种群迁入率;a_{ij},b_{ij},$c_{ij}\geqslant 0$ 分别表示第 j 个斑块到第 i 个斑块的易感染种群、感染种群和移出种群的扩散率($i\neq j$);假设$(a_{ij})_{n\times n}$,$(b_{ij})_{n\times n}$,$(c_{ij})_{n\times n}$是不可约的,且满足:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ji}=0,\sum_{j=1}^{n}b_{ji}=0,\sum_{j=1}^{n}c_{ji}=0,\forall\, 1\leqslant i\leqslant n。\tag{2}$$

令 $N(t)=\sum_{i=1}^{n}N_i(t)=\sum_{i=1}^{n}(S_i(t)+I_i(t)+R_i(t))$,有 $\dot N(t)=\sum_{i=1}^{n}m_i-\sum_{i=1}^{n}\mu_i\dot N_i(t)\leqslant m-\mu\dot N(t)$,其中 $m=\max\{m_1,m_2,\cdots,m_n\}$,$\mu=\min\{\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n\}$。

易知集合 $\Omega=\left\{(S_i,I_i,R_i)\in R^3\mid S_i\geqslant 0,I_i\geqslant 0,R_i\geqslant 0,0\leqslant N(t)\leqslant N^*,N^*=\frac{m}{\mu}\right\}$是系统(1)的正向不变集且最终有界。对于 $u,v\in\mathbf{R}^n$,当 $u\geqslant v$,则 $u-v\in\mathbf{R}_+^n$;当 $u>v$,则 $u-v\in\mathbf{R}_+^n\setminus\{0\}$;当 $u\gg v$,则 $u-v\in\operatorname{int}(\mathbf{R}_+^n)$。设 $\mathbf{A}(t)$是左端分段连续函数且是具有 ω-周期的 $n\times n$ 矩阵,$\omega>0$。并且 $\mathbf{A}(t)$是合作的不可约的。令 $\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{A}(\cdot)}(t)$是线性微分方程 $\dot x=\mathbf{A}(t)x$ 基解矩阵,$r(\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{A}(\cdot)}(\omega))$是 $\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{A}(\cdot)}(\omega)$的谱半径,则由矩阵理论可知,存在 $\boldsymbol{v}^*\gg 0$ 是 $r(\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{A}(\cdot)}(\omega))$相对于 $\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{A}(\cdot)}(\omega)$的特征向量。

引理 1[10] $\mu=\frac{1}{\omega}\ln r(\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{A}(\cdot)}(\omega))$,则存在一个正的 ω-周期函数 $v(t)$使得 $e^{\mu t}v(t)$是 $\dot x=\mathbf{A}(t)x$ 的一个解。

不失一般性,考虑如下 $2n$ 维系统:

$$\begin{cases}\left.\begin{aligned}&S_i'(t)=m_i-\frac{\beta_i S_i(t)I_i(t)}{1+\alpha I_i(t)}-\mu_i S_i(t)+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}S_j(t),\\&I_i'(t)=\frac{\beta_i S_i(t)I_i(t)}{1+\alpha I_i(t)}-(\mu_i+g_i)I_i(t)+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}I_j(t),\end{aligned}\right\}t\neq nT,n\in\mathbf{N},i=1,2,\cdots,n,\\\left.\begin{aligned}&S_i(nT^+)=(1-p_i)S_i(nT),\\&I_i(nT^+)=I_i(nT)。\end{aligned}\right\}t=nT,n\in\mathbf{N},i=1,2,\cdots,n。\end{cases}\tag{3}$$

令 $I_i(t)=0$,$i=1,2,\cdots,n$,则:

$$\begin{cases}\mathbf{S}'(t)=m+(\mathbf{A}-\mathbf{U})\mathbf{S}(t),t\neq nT,n\in\mathbf{N},\\\mathbf{S}(nT^+)=(\mathbf{E}-\mathbf{P})\mathbf{S}(nT),t=nT,n\in\mathbf{N}。\end{cases}\tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{S}(t)=(S_1(t),S_2(t),\cdots,S_n(t))^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，$\boldsymbol{U}=\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$，$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，$\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(p_1,p_2,\cdots,p_n)$。

易证得，系统(4)存在无病周期解使得 $\widetilde{\boldsymbol{S}}(t+T)=\widetilde{\boldsymbol{S}}(t)$，其中 $\widetilde{\boldsymbol{S}}(t)=(\widetilde{S}_1(t),\cdots\widetilde{S}_n(t))^{\mathrm{T}}$，且

$$\widetilde{\boldsymbol{S}}(t)=-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U})^{-1}m+\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U})(t-nT)}[((\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P})^{-1}-\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U})T})^{-1}(\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U})T}-\boldsymbol{E})+\boldsymbol{E}](\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U})^{-1}m。$$

引理 2[12]　令 $\boldsymbol{\tau}>0$，$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$，$\boldsymbol{L}=(l_{ij})_{n\times n}$ 是一个 Laplacian 矩阵，则有 $\boldsymbol{1}\mathrm{e}^{-\hat{d}\boldsymbol{\tau}}\leqslant\boldsymbol{1}\mathrm{e}^{-(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{D})\boldsymbol{\tau}}\leqslant\boldsymbol{1}\mathrm{e}^{-\widetilde{d}\boldsymbol{\tau}}$，其中 $\widetilde{d}=\min\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$，$\hat{d}=\max\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$。

2 无病周期解的稳定性分析

引理 3　系统(4)的无病周期解 $\widetilde{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{t})$ 是全局渐近稳定的。

证明　令 $\boldsymbol{W}(t,s)=\prod\limits_{s<nt<t}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P})\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U})(t-s)}$，为系统(4)齐次方程的 Cauchy 矩阵，齐次方程的单值矩阵为 $\boldsymbol{W}(T,0)=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P})\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U})T}$。则系统(4)的每一个解 $S(t)$ 可以被表示为：$S(t)=\boldsymbol{W}(t,0)\boldsymbol{S}(0)+\int_0^t\boldsymbol{W}(t,s)m\,\mathrm{d}s$。则有 $\boldsymbol{S}(t)-\widetilde{\boldsymbol{S}}(t)=\boldsymbol{W}(t,0)(\boldsymbol{S}(0)-\widetilde{\boldsymbol{S}}(0))$，其中 $\widetilde{\boldsymbol{S}}(0)=((\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P})^{-1}-\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U})T})^{-1}(\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U})T}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U})^{-1}m$。假设 $t\in(nT,(n+1)T]$，则 $\boldsymbol{W}(t,0)=((\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P})\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U})T})^n\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U})(t-nT)}$。得 $|\boldsymbol{W}(t,0)|=|((\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P})\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U})T})|^n\cdot|\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U})(t-nT)}|$。由引理 2 与 $|\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U})(t-nT)}|$ 的有界性得，当 $n\to\infty$，$t\to\infty$ 时，$|\boldsymbol{W}(t,0)|\to0$。因为线性方程 $x=\boldsymbol{W}(t,0)y$ 有一个非平凡解，其中 $\boldsymbol{x}=(S_1(t)-\widetilde{S}_1(t),\cdots,S_n(t)-\widetilde{S}_n(t))^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(S_1(0)-\widetilde{S}_1(0),\cdots,S_n(0)-\widetilde{S}_n(0))^{\mathrm{T}}$，并且当 $t\to\infty$ 时，$|\boldsymbol{W}(t,0)|\to0$，从而 $\boldsymbol{S}(t)-\widetilde{\boldsymbol{S}}(t)\to\boldsymbol{0}$。因此，系统(4)的无病周期解 $\widetilde{\boldsymbol{S}}(t)$ 是全局渐近稳定的。　证毕

接下来将研究系统(3)无病周期解 $(\widetilde{\boldsymbol{S}}(t),0)$ 的全局渐近稳定性。

定义　$\boldsymbol{F}(t)=\begin{pmatrix}\beta_1\widetilde{S}_1(t) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \beta_2\widetilde{S}_2(t) & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \beta_n\widetilde{S}_n(t)\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}\mu_1+g_1-b_{11} & -b_{12} & \cdots & -b_{1n}\\ -b_{21} & \mu_2+g_2-b_{22} & \cdots & -b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -b_{n1} & -b_{n2} & \cdots & \mu_n+g_n-b_{nn}\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{F}(t)$ 和 $\boldsymbol{V}$ 分别是 n-维系统 $I_i'=\dfrac{\beta_iS_i(t)I_i(t)}{1+\alpha I_i(t)}$ 与系统 $I_i'=-(\mu_i+g_i)I_i+\sum\limits_{j=1}^{n}b_{ij}I_j$，$i=1,2,\cdots,n$，在无病周期解 $(\widetilde{\boldsymbol{S}}(t),0)$ 处对应的 Jacobian 矩阵。令 $\boldsymbol{M}(t)=\boldsymbol{F}(t)-\boldsymbol{V}$，有如下定理。

定理 1　若 $R_0=r(\boldsymbol{\Phi}_{(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{V})(\cdot)}(T))<1$，则系统(3)无病周期解 $(\widetilde{\boldsymbol{S}}(t),0)$ 是全局渐近稳定的。

证明　令 $s_i(t)=S_i(t)-\widetilde{S}_i(t)$，$i_i(t)=I_i(t)$，则系统(3)的在无病周期解 $(\widetilde{\boldsymbol{S}}(t),0)$ 处的 Taylor 展开，忽略高阶项得：

$$\begin{cases}\boldsymbol{Z}'(t)=\boldsymbol{J}(t)\boldsymbol{Z}(t),t\neq nT,n\in\mathbf{N},\\ \boldsymbol{Z}(nT^+)=Q\boldsymbol{Z}(nT),t=nT,n\in\mathbf{N},\end{cases}\tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{Z}(t)=(\boldsymbol{s}(t),\boldsymbol{i}(t))$，$\boldsymbol{s}(t)=(s_1(t),s_2(t),\cdots,s_n(t))^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{i}(t)=(i_1(t),i_2(t),\cdots,i_n(t))^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{G}=\mathrm{diag}(g_1,g_2,\cdots,g_{1n})$，$\boldsymbol{J}(t)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U} & -\boldsymbol{F}(t)\\ 0 & \boldsymbol{F}(t)-\boldsymbol{V}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P} & 0\\ 0 & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}$。

记 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 为 $\boldsymbol{Z}'(t)=\boldsymbol{J}(t)\boldsymbol{Z}(t)$ 的基解矩阵，则 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U})t} & *\\ 0 & \boldsymbol{\Phi}_{(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{V})(\cdot)}(t)\end{pmatrix}$。得系统(5)的单值矩阵为 $\boldsymbol{Q\Phi}(t)=\begin{pmatrix}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P})\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U})t} & *\\ 0 & \Phi_{(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{V})(\cdot)}(t)\end{pmatrix}$，这里 * 表示相应的矩阵块，且对方程求解不影响，下面不再对这部分进行讨论。

由 Floquet 定理、引理 2 和 $r(\boldsymbol{\Phi}_{(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{V})(\cdot)}(t))<1$ 得无病周期解为局部稳定的。

由系统(3)的第 1、3 个方程得：

$$\begin{cases}S'_i(t)\leqslant m_i-\mu_iS_i(t)+\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}S_j(t),t\neq nT,\\S_i(nT^+)=(1-p_i)S_i(nT),t=nT。\end{cases}$$

利用脉冲微分方程的比较定理,对任意小的$\varepsilon>0$,存在$t_1>0$,当$t>t_1$时,都有:

$$\boldsymbol{S}(t)<\boldsymbol{x}(t)<\tilde{\boldsymbol{x}}(t)+\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}=\tilde{\boldsymbol{S}}(t)+\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}},t>t_1,\tag{6}$$

其中$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}=(\underbrace{\varepsilon,\varepsilon,\cdots,\varepsilon}_{n})^{\mathrm{T}}$,并且

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t)=\tilde{\boldsymbol{S}}(t)=-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U})^{-1}m+\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U})(t-nT)}[((\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P})^{-1}-\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U})T})^{-1}(\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U})T}-\boldsymbol{E})+\boldsymbol{E}](\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U})^{-1}m。$$

由系统(3)得:

$$\begin{aligned}I'_i(t)&\leqslant\frac{\beta_i(\tilde{S}_i(t)+\varepsilon)I_i(t)}{1+\alpha I_i(t)}-(\mu_i+g)_iI_i(t)+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}I_j(t)\leqslant\\&\beta_i(\tilde{S}_i(t)+\varepsilon)I_i(t)-(\mu_i+g_i)I_i(t)+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}I_j(t),t\geqslant t_1。\end{aligned}\tag{7}$$

令$\boldsymbol{Y}(t)=(y_1(t),y_2(t),\cdots,y_n(t))^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$,取脉冲比较方程

$$\boldsymbol{Y}'(t)=(\boldsymbol{F}(t)-\boldsymbol{V}+\varepsilon\boldsymbol{D})\boldsymbol{Y}(t)=(\boldsymbol{M}(t)+\varepsilon\boldsymbol{D})\boldsymbol{Y}(t),t\geqslant t_1。\tag{8}$$

由引理1知,存在一个正的T-周期函数$\boldsymbol{v}(t)=(v_1(t),v_2(t),\cdots,v_n(t))^{\mathrm{T}}$使得$\mathrm{e}^{\mu_1t}\boldsymbol{v}(t)$是系统(8)的一个解,其中$\mu_1=\frac{1}{T}\ln(r(\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{M}(\cdot)+\varepsilon\boldsymbol{D}}(T)))$。故存在$t_2\geqslant t_1$和一个较小的数$\alpha>0$,使得$\boldsymbol{Y}(t_2)\leqslant\alpha\boldsymbol{v}(0)$。由比较定理得$\boldsymbol{I}(t)\leqslant\boldsymbol{Y}(t)\leqslant\alpha\mathrm{e}^{\mu_1(t-t_2)}\boldsymbol{v}(t-t_2)$,$t\geqslant t_2$。由于$r(\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{M}(\cdot)}(T))<1$,则可以选择任意小的$\varepsilon>0$,使得对$\varepsilon$连续的$r(\boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{M}(\cdot)+\varepsilon\boldsymbol{D}}(T))<1$,则有$\mu_1<0$,故有$\lim\limits_{t\to\infty}I(t)=0$。即对任给的$\varepsilon>0$,存在$t_3\geqslant t_2$,当$t>t_3$时,有$I(t)<\varepsilon$。

由系统(3)的第1、3个方程得:

$$\begin{cases}S'_i(t)\geqslant m_i-\varepsilon\beta_iS_i(t)-\mu_iS_i(t)+\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}S_j(t),t\neq nT,n\in\mathbf{N},\\S_i(nT^+)=(1-p_i)S_i(nT),t=nT,n\in\mathbf{N}。\end{cases}$$

根据比较定理,对任意的$\eta>0$,存在$t_4\geqslant t_3$,当$t\geqslant t_4$时,都有

$$\boldsymbol{S}(t)\geqslant\boldsymbol{u}(t)>\tilde{\boldsymbol{u}}(t)-\tilde{\boldsymbol{\eta}},t>t_4,\tag{9}$$

其中$\tilde{\boldsymbol{\eta}}=(\underbrace{\eta,\eta,\cdots,\eta}_{n})$,并且

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{u}}(t)=&-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U}-\varepsilon\boldsymbol{D})^{-1}m+\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U}-\varepsilon\boldsymbol{D})(t-nT)}[((\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P})^{-1}-\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U}-\varepsilon\boldsymbol{D})T})^{-1}(\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U}-\varepsilon\boldsymbol{D})T}-\boldsymbol{E})+\boldsymbol{E}]\cdot\\&(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U}-\varepsilon\boldsymbol{D})^{-1}m。\end{aligned}$$

由(6)式和(9)式可得$\tilde{\boldsymbol{u}}(t)-\tilde{\boldsymbol{\eta}}<\boldsymbol{S}(t)<\tilde{\boldsymbol{S}}(t)+\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$。由$\varepsilon$与$\eta$的任意性,故有$\lim\limits_{t\to\infty}\boldsymbol{S}(t)=\tilde{\boldsymbol{S}}(t)$。于是当$r\left(\boldsymbol{\Phi}_{(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{V})(\cdot)}(t)\right)<1$时,系统(3)的$T$-周期解$(\tilde{\boldsymbol{S}}(t),0)$是全局吸引的,再由无病$T$-周期解是局部稳定的,可得系统(3)的无病$T$-周期解$(\tilde{\boldsymbol{S}}(t),0)$是全局渐近稳定的。 证毕

3 系统持久性分析

定理2 如果$R^*=r\left(\boldsymbol{\Phi}_{\left(\frac{1}{1+\alpha N^*}\boldsymbol{F}-\boldsymbol{V}\right)(\cdot)}(T)\right)>1$,则存在一个正数$\eta>0$,使得对系统(3)所有满足初值$(S^0,I^0)\in\mathbf{R}_+^n\times\mathrm{int}(\mathbf{R}_+^n)$的解$(\boldsymbol{S}(t),\boldsymbol{I}(t))$满足$\lim\limits_{t\to\infty}\inf S_i(t)\geqslant\eta$,$\lim\limits_{t\to\infty}\inf I_i(t)\geqslant\eta$,$i=1,2,\cdots,n$。

证明 由上述结论只需证明$\lim\limits_{t\to\infty}\inf I_i(t)\geqslant\eta$成立。定义$X=\mathbf{R}_+^{2n}$,$X_0=\mathbf{R}_+^n\times\mathrm{int}(\mathbf{R}_+^n)$,$\partial X_0=X/X_0$。令$P:\mathbf{R}_+^{2n}\to\mathbf{R}_+^{2n}$是系统(3)相应的庞加莱映射,即$P(x^0)=u(T^+;x^0)$,$\forall x^0\in\mathbf{R}_+^{2n}$,其中$u(0,x^0)$是系统(3)的唯一解且$u(0,x^0)=x^0$。首先证明$P$在$(X_0,\partial X_0)$上一致持久的。令$f(t):X\to X$是系统(3)的解半流,它是分段连续函数。因此,$f(t)$在区间$(nT,(n+1)T](n\in\mathbf{N})$上是连续的,并且$f(nT^+)=\lim\limits_{t\to nT^+}f(t)$存在。由系统(3)知,$X$和$X_0$是正不变集,$\partial X_0$在$X$中是相对闭集。此外,当系统(3)的非负解都最终有界时,系统(3)在$\mathbf{R}_+^n$上是点

耗散的，令 $M_\partial=\{(S^0,I^0)\in\partial X_0:P^m(S^0,I^0)\in\partial X_0,\forall m\geqslant 0\}$。

现在证明

$$M_\partial=\{(S,0):S\geqslant 0\}。\tag{10}$$

显然，$\{(S,0):S\geqslant 0\}\subseteq M_\partial$，如果 $(S^0,I^0)\in M_\partial$，将证明对所有 $k=1,2,\cdots$，都有 $I(kT^+;S^0,I^0,R^0)\equiv 0$ 成立。假设不成立，则存在整数 m 和 k_0 使得 $I_m(k_0T^+)>0$。令 $\{1,2,\cdots,n\}=Q_1\cup Q_2$，其中 $Q_1=\{j:I_j(k_0T^+)=0\}$，$Q_2=\{i:I_i(k_0T^+)>0\}$。

由 M_∂ 的定义可知，Q_1 和 Q_2 为非空集合。对任意 $j\in Q_1$，由矩阵 $(b_{ij})_{n\times n}$ 的不可约性知，存在一个 $i\in Q_2$，使得 $b_{ji}>0$，有 $I'_j(k_0T^+)=\dfrac{\beta_jS_j(k_0T^+)I_j(k_0T^+)}{1+\alpha I_j(k_0T^+)}-(\mu_j+g_j)I(k_0T^+)+\sum\limits_{i=1}^{n}b_{ji}I_i(k_0T^+)\geqslant b_{ji}I_i(k_0T^+)>0$。即存在一个 $\varepsilon_1>0$，对任意 $j\in Q_1$ 和 $t\in(k_0T,k_0T+\varepsilon_1)$ 都有 $I_j(t)>0$。记 $I_i(k_0T^+)>0,i\in Q_2$，再定义一个 $\varepsilon_2>0$，对任意 $i\in Q_2$ 和 $t\in(k_0T,k_0T+\varepsilon_2)$ 都有 $I_i(t)>0$。则对 $t\in(k_0T,k_0T+\varepsilon_1)\cap(k_0T,k_0T+\varepsilon_2)$，有 $I(t)>0$。此外 $I'_i(t)\geqslant-(\mu_i+g_i)I_i(t)+b_{ii}I_i(t),t\neq nT$。设 $\lambda_i=\mu_i+g_i-b_{ii}$，则 $I_i(t)\geqslant \mathrm{e}^{-\lambda_i(t-t_0)}I_i(t_0^+),\forall t_0\geqslant 0$。对 $\bar t\in(k_0T,k_0T+\varepsilon_1)\cap(k_0T,k_0T+\varepsilon_2)$，则有 $I((k+1)T^+)=I_i(\bar t)\mathrm{e}^{-\lambda_i((k+1)T-\bar t)}>0$。则与 $P^m(S^0,I^0)\in X_0,\forall m\geqslant 0$ 和 $(S^0,I^0)\in M_\partial$ 矛盾。由于 X_0 的正不变性和(10)式，则映射 P 在 M_∂ 中存在一个不动点 M_1，其中 $M_1=(S^*(0),0)$。

现在假设，存在充分小的 $m_1>0$，使得

$$\lim_{t\to\infty}\sup\max\{I_i(t)\}\geqslant m_1,i=1,2,\cdots,n。\tag{11}$$

如果假设(11)式不成立，则存在一个 t_1 使得 $\{I_i(t)\}<m_1,t\geqslant t_1$。则有：

$$\begin{cases}S'_i(t)\geqslant m_i-\beta_i m_1S_i(t)-\mu_iS_i(t)+\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}S_j(t),t\neq nT,n\in\mathbf{N},\\ S_i(nT^+)=(1-p_i)S_i(nT),t=nT,n\in\mathbf{N}。\end{cases}$$

由比较原理做类似于定理 1 中证明，存在 $t_2\geqslant t_1$ 和充分小的 $\varepsilon>0$ 使得对 $t\geqslant t_2$ 有 $S_i(t)\geqslant\widetilde S_i(t)-\varepsilon$。

因此，当 $t\geqslant t_2$，由系统(3)的第 2 个方程及引理 1 得：

$$I'_i(t)\geqslant\frac{\beta_i(\widetilde S_i(t)-\varepsilon)I_i(t)}{1+\partial I_i(t)}-(\mu_i+g_i)I_i(t)+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}I_j(t)\geqslant$$
$$\frac{\beta_i(\widetilde S_i(t)-\varepsilon)I_i(t)}{1+\alpha N^*}-(\mu_i+g_i)I_i(t)+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}I_i(t),t\neq nT。$$

做比较方程得 $\boldsymbol{I}'(t)\geqslant\left(\dfrac{1}{1+\alpha N^*}\boldsymbol{F}(t)-\boldsymbol{V}-\varepsilon\boldsymbol{D}\right)\boldsymbol{I}(t),t\neq nT$。

在区间 $(nT,(n+1)T]$ 上积分得 $\boldsymbol{I}((n+1)T)\geqslant\boldsymbol{\Phi}_{\left(\frac{1}{(1+\alpha N^*)}\boldsymbol{F}-\boldsymbol{V}-\varepsilon\boldsymbol{D}\right)(\cdot)}(t)\boldsymbol{I}(nT^+)$。因为 $\alpha\geqslant 0,r\left(\boldsymbol{\Phi}_{(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{V})(\cdot)}(t)\right)>1$ 和 $\boldsymbol{I}(nT^+)>0$，故对于足够小的 $\varepsilon>0$ 使得 $r\left(\boldsymbol{\Phi}_{\left(\frac{1}{(1+\alpha N^*)}\boldsymbol{F}-\boldsymbol{V}-\varepsilon\boldsymbol{D}\right)(\cdot)}(T)\right)>1$，有 $\boldsymbol{I}(t)\to\infty,t\to\infty$ 成立，与引理 2 矛盾。

系统(3)在 X 上是点耗散的，映射 P 是全局吸引的。对于系统(3)，当 $\boldsymbol{I}(t)=0$ 时，$\widetilde S(t)$ 在 $\mathbf{R}_+^n\backslash\{0\}$ 上是全局吸引的。由前面讨论知，M_1 在 X 上是唯一孤立不变集，$W^s(M_1)\cap X_0=\varnothing$，其中 $W^s(M_1)=\{x\in X:\lim\limits_{k\to\inf}d(P^k(x),M_1)\}$。显然，$M_\partial$ 中的每一个轨道都收敛于 M_1，且 M_1 在 M_∂ 中是非循环的。由文献[11]中的定理 1.3.1 知 P 相对于 $(X_0,\partial X_0)$ 是一致持久的。因此，存在足够大的 N^* 和 $0<\bar\varepsilon\ll 1$ 使得

$$P^k(S^0,I^0)=(\boldsymbol{S}(kT^+),\boldsymbol{I}(kT^+))>\bar\varepsilon\boldsymbol{1},k>N^*。$$

对于系统(3)的任意解 $(\boldsymbol{S}(t),\boldsymbol{I}(t))$，由(11)式得，对 $t\in(kT,(k+1)T),k>N^*$，有

$$I_i(t)\geqslant\mathrm{e}^{-\lambda_i(t-kT)}I_i(kT^+):=\mathrm{e}^{-\lambda T}\bar\varepsilon>0。$$

则系统(3)在 $(X_0,\partial X_0)$ 上是一致持久的。　　证毕

参考文献：

[1] 辛京奇，王文娟，张凤琴.带有非线性传染率的传染病模型[J].高校应用数学学报，2007，22(4)：391-396.
XIN J Q，WANG W J，ZHANG F Q. An epidemic model with nonlinear incidence rate[J]. Applied Mathematics A Journal of Chinese Universities，2007，22(4)：391-396.

[2] RUAN S G，WANG W D. Dynamical behavior of an epidemic model with a nonlinear incidence rate[J]. Journal of Differential Equations，2003，188(1)：135-163.

[3] 李海霞，贾建文.一类具有非线性传染率的脉冲免疫接种的SIRSV模型[J].数学的实践与认识，2011，41(21)：148-154.
LI H X，JIA J W. The SIRSV epidemic model with nonlinear contact rate and pulse vaccination[J]. Mathematics in Practice and Theory，2011，41(21)：148-154.

[4] CHEN L S. The effect of constant and pulse vaccination on SIR epidemic model with horizontal and vertical transmission [J]. Mathematical and Computer Modeling，2002，36：1039-1057.

[5] PEI Y Z，LIU S Y，LI C G，et al. The dynamics of an impulsive delay SI model with variable coefficients [J]. Applied Mathematical Modelling，2009，33(6)：2766.

[6] WEI H M，JIANG Y，SONG X Y，et al. Global attractivity and permanence of a SVEIR epidemic model with pulse Vaccination and time delay[J]. J Comp and Applied Math，2009，229(1)：302-312.

[7] WANG W D，MULONE G. Threshold of disease transmission in a patch environment[J]. J Math Anal Appl，2003，285：321-335.

[8] WANG W D，ZHAO X Q. An epidemic model in a patchy environment[J]. Math Biosci，2004，190：97-112.

[9] YANG Y P，XIAO Y N. The effects of population dispersal and pulse vaccination on disease control[J]. Math Comput Modelling，2010，52：1591-1604.

[10] WANG W D，ZHAO X Q. Threshold dynamics for compartmental epidemic models in periodic environments[J]. J Dyn Diff Equat，2008，20：699-717.

[11] Zhao X Q. Dynamical system in population Biology[M]. New York：Spring-Verlag，2003.

[12] 黄玲智.斑块环境脉冲生物动力系统的稳定性与持久性[D].重庆：重庆师范大学，2016.
HANG L Z. Stability and permanence of impulsive biological dynamical systems in Patchy environment[D]. Chongqing：Chongqing Normal University，2016.

The Study of the Stability and Persistence of a Kind of Pulse Infectious Disease Model with Patch Effect

ZHANG Lanzhu，CHEN Cheng，YANG Zhichun

(College of Mathematics Sciences，Chongqing Normal University，Chongqing 401331，China)

Abstract：[**Purposes**]It is of great practical significance to study the epidemic model based on patchy environment effect and nonlinear infection rate. In this paper，a SIR epidemic model with impulsive vaccination and nonlinear incidence rate of $\frac{\beta SI}{1+\alpha I}$ over patchy environment is established，and the dynamics of disease extinction and persistence are investigated respectively. [**Methods**]By using the Impulsive-type comparison principle，Linearization method，theorem and the properties of fundamental solution matrix，some sufficient conditions for the stability of extinct-periodic solutions of the system are given. [**Results**]Furthermore，by using the small parameter perturbation，Poincare map，properties of irreducible matrices and persistent theories，the sufficient conditions for the permanence of the system diseases are obtained. [**Conclusions**] By using $R_0 < 1$，disease-free periodic solutions are globally asymptotically stable；$R^* > 1$，the system is consistent and durable.

Keywords：patchy environment；SIR epidemic model；pulse vaccination；periodicity；stability；persistence

(责任编辑　许　甲)