2017 年度重庆市出版专项基金资助栏目　　DOI:10.11721/cqnuj20180401

运筹学与控制论

关于误工的两个代理单机排序问题*

张新功[1]，陈秋宏[1]，王祥兵[2]

(1. 重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331；2. 贵州工程应用技术学院 经济与管理学院，贵州 毕节 551700)

摘要:【目的】研究与误工相关的两个代理单机排序问题。【方法】第一个代理工件的到达时间与工期满足一致关系，目标函数为总误工或最大误工。第二个代理工件可中断，目标函数为总误工工件个数，在模型确定的情况下结合 Lawler 算法或 EDD 规则确定一个最优排序规则，使得满足第二个代理目标可行的情况下，第一个代理的目标函数值最小。【结果】在上述模型最优排序规则确定的前提下，求出最优排序方案使得第一个代理的目标函数最小。【结论】提出了总误工问题的一个拟多项式时间动态规划算法，给出了最大误工问题时间复杂度的证明。

关键词:总误工；两个代理；一致性；最大误工

中图分类号:O223　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2018)04-0001-06

近些年来两个竞争代理问题在理论研究方向上热度非常高。两个竞争代理问题常常出现在需要协商和协调的工业环境下，某个代理要求越来越多，工厂需要平衡两个代理的权益，找出最优的解决方案使得两个代理权益相当。Agnetis 等人[1]最早提出了两个竞争代理的单机排序问题。这类问题简单描述为:有两个代理在一台机器上加工，它们都有各自的目标函数和工件集，并且每个代理都想最小化自己的目标函数。问题在于如何在一台机器上安排两个代理的工件的加工顺序使得这样的排序满足两个代理的要求。Leung 等人[2]研究了两个竞争代理在单台机器和恒同机上的排序问题，其中工件可中断并且带有到达时间，同时研究了代理 B 工件在固定区间加工的情形。

研究总误工问题论文层出不穷，该问题的意义在于能帮助工厂或者本企业判断是否有加工的必要，或者说在工业上最小化总误工问题能确定工件是否值得被加工，如果所有工件的总误工能控制在一定的范围内或者不超过预期值，工件的最优加工顺序将对两方有益。而总误工问题实际上和工件的完工时间联系密切，只有让工件尽快完工而又使得误工最小，才能将利益更大化。因此这样的模型对于工厂是否能够加工此批工件具有重要意义。

本文主要研究关于误工的两个代理单机排序问题，其中代理 A 的到达时间与工期具有一致关系，目标函数为总误工或最大误工，代理 B 的目标函数为总误工工件个数或者为关于完工时间的正则函数或者代理 B 所有工件排在固定区间。Lawler 等人[3]提出了单机问题下总误工问题的拟多项式时间算法，时间复杂度为 $O(n^4P)$。Tian 等人[4]研究了带有到达时间可中断情况下每个工件具有等长加工时间的总误工排序，Tian 等人[5]提出了一致关系下的可中断的最小化总误工问题，利用分块原则和 Lawler 算法给出了时间复杂度为 $O(n^4P)$的动态规划算法。Christos 等人[6]提出了最大误工以及平均误工的相关结论和最优排序规则。

本文研究的问题是将总误工和总误工工件个数相结合两个代理单机排序问题，在文献[6]的基础上进一步研究了关于最大误工的两个代理单机排序问题，给出了时间复杂度的证明。因为模型中给目标函数加上了到达时间与工期具有一致关系的限制，且另外一个目标函数具有到达时间和可中断的限制，这和文献[2]有本质区别，需要考虑总误工个数目标是否可行，是否可以中断。同样给出了拟多项式时间动态规划算法，并给出了算法证明以此说明算法的可行性。

---

* **收稿日期:**2017-11-28　**修回日期:**2018-06-15　**网络出版时间:**2018-07-26 16:50

资助项目:国家自然科学基金项目(No. 11571321;No. 71561007);贵州省教育厅人文社科基金重点项目(No. 14ZD007)

第一作者简介:张新功，男，教授，博士，研究方向为排序论，E-mail:zxg7980@163.com;**通信作者:**陈秋宏，女，E-mail:867707968@qq.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20180726.1649.002.html

1 问题描述与一般性质

本文考虑的问题描述如下：

在同一台机器上，有两个竞争代理A和B的工件加工，但是每个时间点只能加工一个工件。代理A和B有各自的工件集为J^A，J^B，假设代理A有n_1个工件，代理B有n_2个工件，那么$J^A=\{J_1^A,J_2^A,\cdots,J_{n_1}^A\}$，$J^B=\{J_1^B,J_2^B,\cdots,J_{n_2}^B\}$。令$X=\{A,B\}$，$p_j^X$，$r_j^X$，$d_j^X$分别表示工件$J_j^X$的加工时间、到达时间和工期。不失一般性，假设$p_j^X$为大于零的整数且$n=n_1+n_2$。

代理A工件到达时间与工期具有一致性，代理B工件可中断，设σ是一个可行排序，包含代理A和代理B的所有工件个数n。$C_j^X(\sigma)$，$T_j^X(\sigma)$，$U_j^X(\sigma)$分别表示工件J_j^X在可行排序σ下的完工、误工时间及工件是否误工。其中$T_j^X(\sigma)=\max\{C_j^X(\sigma)-d_j^X,0\}$，当$T_j^X(\sigma)=0$时，称工件$J_j^X$为提前完工工件；当$T_j^X(\sigma)=C_j^X(\sigma)-d_j^X$时，称工件$J_j^X$为误工工件，误工时间就为完工时间与工期的差。最大误工是指在代理A的误工工件中误工最大的工件，即$T_{\max}^A=\{T_j^A(\sigma),j\in J^A\}$。而$U_j^X(\sigma)$表示工件$J_j^X$在可行序列$\sigma$上是否误工，可表示为：

$$U_j^X(\sigma)=\begin{cases}1,若\ C_j^X(\sigma)>d_j^X\\0,若\ C_j^X(\sigma)\leqslant d_j^X\end{cases}。$$

当$U_j^X(\sigma)=0$时，表示工件J_j^X为提前完工；当$U_j^X(\sigma)=1$时，表示工件J_j^X为误工。

目标是在可行排序中找到最优序列使得代理B的目标函数不超过给定值的情况下，代理A的总误工或最大误工最小。本文考虑代理A的目标函数为总误工或最大误工，代理B的目标函数为总误工工件个数，关于完工时间的正则函数或者代理B工件排在固定区间加工。所有模型中代理A工件的到达时间与工期都满足一致性，即$r_i^A\leqslant r_j^A$，$d_i^A\leqslant d_j^A$，用(r_i^A,d_i^A)表示。利用Graham等人[7]提出的三参数法，本文研究的问题可以表示为：

$$1\mid(r_i^A,d_i^A);r_j^B,\mathrm{pmtn}^B\mid\sum T_i^A:\sum U_j^B,1\mid(r_i^A,d_i^A);r_j^B,\mathrm{pmtn}^B\mid T_{\max}^A:\sum U_j^B,$$

$$1\mid(r_i^A,d_i^A),\mathrm{pmtn}^A\mid T_{\max}^A:f_{\max}^B,1\mid(r_i^A,d_i^A),\mathrm{pmtn}^A;r_j^B,d_j^B\mid T_{\max}^A:\mathrm{fsbl}^B。$$

其中pmtn^B表示代理B的工件允许中断，$f_{\max}^B$表示代理B的目标函数是关于完工时间的正则函数，fsbl^B表示代理B工件排在固定区间是可行的。

定义1[4] ERD规则：所有工件$J_1,J_2,\cdots,J_n$按照到达时间r_j非减顺序排列的排序规则叫做最早到达时间优先原则，简称ERD规则，即所有工件遵循先到先排原则。

定义2[8] 一个块$B\subseteq N$被定义为从$r(B)=\min_{j\in B}\{r_j\}$开始到$t(B)=r(B)+p(B)\left(p(B)=\sum\limits_{i\in B}p_i\right)$加工没有空闲的最小工件集，使得每一个工件$i\notin B$的完工时间既不超过$r(B)(C_i\leqslant r(B))$，也不会在$t(B)$之前到达，即$r_i\geqslant t(B)$。

定义3[4] 一个子块$B_i\subset B$被定义为当块B中删除某些工件之后还能成为块的最小工件集；一个子块被称为最优的当且仅当B_i中的所有工件在$[r(B_i),t(B_i)]$加工时是一个最优的序列。

定义4[9] 中断EDD规则：对已经到达的工件$J_1,J_2,\cdots,J_n$按照工期d_j非减顺序排列，若新到达的工件具有更早的工期则中断当前加工工件，加工工期较早的工件，这种规则简称中断EDD规则。

定义5[9] SPT规则：将工件$J_1,J_2,\cdots,J_n$按照加工时间p_j非减顺序排列的排序规则叫做最短加工时间优先原则，简称SPT规则。

引理1[6] 问题$1\mid(r_i,d_i)\mid T_{\max}$按照EDD规则排列最优。

2 关于总误工问题

Tian等人[5]证明了问题$1\mid(r_i,d_i),\mathrm{pmtn}\mid\sum T_i$是一般意义下的NP-难的，并利用分块原则给出了此模型存在最优序列。如果工件不允许中断，那么问题$1\mid(r_i,d_i)\mid\sum T_i$有最优序列存在，因此有如下引理。

引理2[5] 假设块B中m个工件按照ERD规则排列(或者EDD，SPT规则)，工件k是所有工件中指标最大且满足$p_k=\max_{j\in B}\{p_j\}$的工件，块B划分成一些子块B_i，$i=1,\cdots,|B_i|$，令l是块B_1中最大指标，那么问题$1\mid(r_i,d_i)\mid\sum T_i$存在最优排序，若所有满足$j\leqslant k+\delta$但$j\neq k$的工件$j$排在工件$k$之前，所有满足$j>k+\delta$的工件$j$排在工件$k$的之后，其中$\delta$是整数并且$0\leqslant\delta<l-k$。

Leung 等人[2]证明了问题 $1\mid r_i^{\mathrm{A}},\mathrm{pmtn}^{\mathrm{B}};r_j^{\mathrm{B}},d_j^{\mathrm{B}},p_j^{\mathrm{B}}=d_j^{\mathrm{B}}-r_j^{\mathrm{B}}\mid \sum U_i^{\mathrm{A}}:\mathrm{fsbl}^{\mathrm{B}}$ 的时间复杂度为 $O(n_1^4+n_2\log n_2)$，此时间复杂度是在 Baptiste's 算法的基础上提出的，为了最小化 $\sum U_j^{\mathrm{B}}$，修订排序规则为中断的 EDD 规则即代理 A 的工件中断表示新到达的代理 A 工件具有更早的工期或者到了代理 B 的工件需要加工，所有代理 A 工件按照中断的 EDD 规则排列，有如下引理。

引理 3　问题 $1\mid r_j,\mathrm{pmtn}\mid \sum U_j$ 存在最优排序，其中所有提前完工工件按照中断的 EDD 规则排列，误工工件以任意序列排在最后。

证明　假设工件不按照中断 EDD 规则排列的序列记为 σ，有两个相邻工件加工，设为 J_i,J_j。工件 J_i 先到且在工件 J_j 前加工，$d_j<d_i$。此过程中不存在 $r_j>C_i(\sigma)$ 的情况。那么在 $r_j<C_i(\sigma)$ 的情况下，工件 J_j 中断工件 J_i 加工，设此序列为 σ'。若工件 J_i 中断后不误工，在序列 σ' 上，工件 J_j 的完工时间会提前，因此序列 σ' 并不比 σ 差；若工件 J_i 中断后误工且不超过总误工工件个数，那么工件 J_i 放序列最后加工，工件 J_j 或之后工件的完工时间会提前；若工件 J_i 中断后误工但超过总误工工件个数，此时不能中断。

综上所述，工件能被中断的情况只能是中断后不误工，或者误工但不超过固定值，因此按照中断 EDD 规则排列。　证毕

假设问题 $1\mid r_j,\mathrm{pmtn}\mid \sum U_j$ 最优序列下的总误工工件个数为 M，有如下定理。

引理 4　问题 $1\mid(r_i^{\mathrm{A}},d_i^{\mathrm{A}});r_j^{\mathrm{B}},\mathrm{pmtn}^{\mathrm{B}}\mid \sum T_i^{\mathrm{A}}:\sum U_j^{\mathrm{B}}\leqslant Q$ 中，Q 的取值范围为 $Q\in[M,n_2]$。

证明　假设所有代理 B 工件都排代理 A 所有工件之前，那么代理 B 工件按照中断 EDD 规则排列，此序列下的代理 B 总误工工件个数为 M，即 $Q_{\min}=M$。另一种情况是代理 B 工件都排代理 A 工件之后，代理 B 工件最大误工个数为 n_2，即 $Q_{\max}=n_2$。　证毕

引理 5　对于问题 $1\mid(r_i^{\mathrm{A}},d_i^{\mathrm{A}});r_j^{\mathrm{B}},\mathrm{pmtn}^{\mathrm{B}}\mid \sum T_i^{\mathrm{A}}:\sum U_j^{\mathrm{B}}\leqslant Q$，存在一个最优排序，代理 A 的任意两个工件之间没有代理 B 的误工工件。

证明　假设最优序列为 σ，若代理 A 两个工件 $J_i^{\mathrm{A}},J_j^{\mathrm{A}}$ 之间存在代理 B 的误工工件 J_m^{B}，工件 J_i^{A} 排在工件 J_j^{A} 之前：

1）若代理 B 的总误工工件个数不超过 Q，利用二交换法，使得工件 J_m^{B} 在工件 J_j^{A} 后加工，得到序列 σ'，在序列 σ' 上代理 B 的目标函数依旧可行，为了最小化 $\sum T_i^{\mathrm{A}}$，在序列 σ' 中工件 J_j^{A} 的完工时间提前，且代理 A 的总误工没有增加，因此序列 σ' 比 σ 效果好，与 σ 为最优序列矛盾；

2）若代理 B 的总误工工件个数超过 Q，为了满足代理 B 目标函数的可行性，只能将工件 J_m^{B} 和 J_i^{A} 互换位置，使得工件 J_m^{B} 在工件 J_i^{A} 前加工，此时工件 J_m^{B} 将不误工，代理 B 的误工工件个数不超过 Q，得到的序列记为 σ''，明显序列 σ'' 比序列 σ' 更优，与 σ 为最优序列矛盾。

综上所述，无论代理 B 的误工工件个数是否超过 Q，代理 A 的任意两个工件之间都没有代理 B 的误工工件。　证毕

基于以上引理，可以得到下面的定理。

定理 1　问题 $1\mid(r_i^{\mathrm{A}},d_i^{\mathrm{A}});r_j^{\mathrm{B}},\mathrm{pmtn}^{\mathrm{B}}\mid \sum T_i^{\mathrm{A}}:\sum U_j^{\mathrm{B}}\leqslant Q$ 存在一个最优序列，其中代理 A 的工件按照引理 2 排列，代理 B 误工工件以任意序列排在最后，否则按照中断的 EDD 规则排列。

证明　在满足代理 B 工件排序可行性的情况下代理 A 按照 ERD 规则排列为最优。为了最小化代理 A 的总误工，就要使代理 A 工件尽早完工。由于代理 A 工件的到达时间与工期具有一致性，因此按照 ERD 规则排列最优。

为了最小化总误工，且代理 B 的总误工工件个数不能超过 Q，代理 B 工件能被中断意味着中断之后不会误工或者误工不会超过总误工工件个数，那么中断的情况分为两种：代理 B 工件被新到达的带有更早工期的代理 B 工件中断或者被代理 A 工件中断，通过简单的二交换法可以证明代理 B 工件按照中断的 EDD 规则排列最优。　证毕

由定理 1 可知，这个问题一定存在一个最优排序，其中代理 A 工件按照引理 2 排列，代理 B 误工工件以任意序列排在最后，否则按照中断的 EDD 规则排列。Tian 等人[5]证明了问题 $1\mid(r_i,d_i),\mathrm{pmtn}\mid \sum T_i$ 是弱 NP-难

的,那么问题 $1\mid(r_i,d_i)\mid\sum T_i$ 也是弱NP-难的。接下来给出问题 $1\mid(r_i^{\mathrm{A}},d_i^{\mathrm{A}});r_j^{\mathrm{B}},\mathrm{pmtn}^{\mathrm{B}}\mid\sum T_i^{\mathrm{A}}:\sum U_j^{\mathrm{B}}\leqslant Q$ 的一个拟多项式时间算法和时间复杂度的证明。

定理2 问题 $1\mid(r_i^{\mathrm{A}},d_i^{\mathrm{A}});r_j^{\mathrm{B}},\mathrm{pmtn}^{\mathrm{B}}\mid\sum T_i^{\mathrm{A}}:\sum U_j^{\mathrm{B}}\leqslant Q$ 是拟多项式时间可解的,时间复杂度为 $O\left(n_1^4n_2^2Q\left(\sum p_i^{\mathrm{A}}+\sum p_j^{\mathrm{B}}\right)\right)$。

证明 假设代理A中的工件已经按照引理2排列,且有 $r_1^{\mathrm{A}}\leqslant r_2^{\mathrm{A}}\leqslant\cdots\leqslant r_{n_1}^{\mathrm{A}}$,代理B中的工件已经按照中断EDD规则排列,即有 $d_1^{\mathrm{A}}\leqslant d_2^{\mathrm{A}}\leqslant\cdots\leqslant d_{n_2}^{\mathrm{A}}$。

令 $T(t^{\mathrm{A}},B(J_i^{\mathrm{A}},J_j^{\mathrm{A}},J_k^{\mathrm{A}}),B(J_l^{\mathrm{B}},J_m^{\mathrm{B}}),q)$ 表示块 B 中的总误工,$B(J_i^{\mathrm{A}},J_j^{\mathrm{A}},J_k^{\mathrm{A}})$ 表示代理A工件在块 B 中加工的工件 $J_i^{\mathrm{A}},J_{i+1}^{\mathrm{A}},\cdots,J_j^{\mathrm{A}}$,其中不包含加工时间大于 p_k^{A} 的工件,而 $i\leqslant k\leqslant j$,$p_k^{\mathrm{A}}=\max\{p_h^{\mathrm{A}}\mid h\in B(J_i^{\mathrm{A}},J_j^{\mathrm{A}},J_k^{\mathrm{A}})\}$;$B(J_l^{\mathrm{B}},J_m^{\mathrm{B}})$ 表示代理B工件 $J_l^{\mathrm{B}},J_{l+1}^{\mathrm{B}},\cdots,J_m^{\mathrm{B}}$ 在块 B 中加工,共有 q 个误工工件,块 B 开始加工时间为 t。

为了最小化总误工,代理A工件 J_c^{A} 可中断代理B工件 J_i^{B},工件 J_i^{B} 中断后,或者误工,或者不误工,有以下3种情况:

1) 工件 J_i^{B} 中断后不误工,即 $r_i^{\mathrm{B}}+p_i^{\mathrm{B}}+p_c^{\mathrm{A}}-d_i^{\mathrm{B}}<0$,则:

$$T(t,B(J_i^{\mathrm{A}},J_j^{\mathrm{A}},J_k^{\mathrm{A}}),B(J_l^{\mathrm{B}},J_m^{\mathrm{B}}),q)=\min[T(t^{\mathrm{A}},B(J_i^{\mathrm{A}},J_{k'+\delta}^{\mathrm{A}},J_{k'}^{\mathrm{A}}),B(J_l^{\mathrm{B}},J_u^{\mathrm{B}}),q')+\max(0,C_{k'}^{\mathrm{A}}(\delta,u)-d_{k'}^{\mathrm{A}})+T(C_{k'}^{\mathrm{A}}(\delta,u),B(J_{k'+\delta+1}^{\mathrm{A}},J_j^{\mathrm{A}},J_{k'}^{\mathrm{A}}),B(J_{u+1}^{\mathrm{B}},J_m^{\mathrm{B}}),q-q')]。$$

2) 工件 J_i^{B} 中断后误工,即 $r_i^{\mathrm{B}}+p_i^{\mathrm{B}}+p_c^{\mathrm{A}}-d_i^{\mathrm{B}}>0$,由定理1知工件 J_i^{B} 应放序列最后加工,块 B 划分成两个子块 B_1,B_2。代理A在块 B_1,B_2 中的加工工件分别表示为 $B_1(J_i^{\mathrm{A}},J_{c-1}^{\mathrm{A}},J_{k_1}^{\mathrm{A}})$,$B_2(J_c^{\mathrm{A}},J_j^{\mathrm{A}},J_{k_2}^{\mathrm{A}})$,代理B在块 B_1,B_2 中的加工工件分别表示为 $B_1(J_l^{\mathrm{B}},J_{i-1}^{\mathrm{B}})$,$B_2(J_{i+1}^{\mathrm{B}},J_m^{\mathrm{B}})$,则:

$$T(t,B(J_i^{\mathrm{A}},J_j^{\mathrm{A}},J_k^{\mathrm{A}}),B(J_l^{\mathrm{B}},J_m^{\mathrm{B}}),q)=T(t,B(J_i^{\mathrm{A}},J_j^{\mathrm{A}},J_k^{\mathrm{A}}),B(J_l^{\mathrm{B}},J_m^{\mathrm{B}}),q-1)=T(t,B_1(J_i^{\mathrm{A}},J_{c-1}^{\mathrm{A}},J_{k_1}^{\mathrm{A}}),B_1(J_l^{\mathrm{B}},J_{i-1}^{\mathrm{B}}),q_1)+T(r_c^{\mathrm{A}},B_2(J_c^{\mathrm{A}},J_j^{\mathrm{A}},J_{k_2}^{\mathrm{A}}),B_2(J_{i+1}^{\mathrm{B}},J_m^{\mathrm{B}}),q_2),$$

其中 $q_1+q_2=q-1$。

3) 工件 J_i^{B} 中断后误工,但 $q=Q$,工件 J_i^{B} 不能放在序列最后加工,那么工件 J_i^{B} 不能被中断,修订工件 J_c^{A} 的到达时间为 $r_c^{\mathrm{A}}=C_i^{\mathrm{B}}$,则:

$$T(t,B(J_i^{\mathrm{A}},J_j^{\mathrm{A}},J_k^{\mathrm{A}}),B(J_l^{\mathrm{B}},J_m^{\mathrm{B}}),q)=T(t,B(J_i^{\mathrm{A}},J_j^{\mathrm{A}},J_k^{\mathrm{A}}),B(J_l^{\mathrm{B}},J_m^{\mathrm{B}}),q)+\sum(C_i^{\mathrm{B}}-r_c^{\mathrm{A}})。$$

其中 $C_k^{\mathrm{A}}(\delta,u)=\begin{cases}C_{k'}^{\mathrm{A}}(\delta,u),若\ q'<q\\ C_{k'}^{\mathrm{A}}(\delta,u)+\sum(C_i^{\mathrm{B}}-r_c^{\mathrm{A}}),若\ q'=q\end{cases}$。

综上所述,给出问题 $1\mid(r_i^{\mathrm{A}},d_i^{\mathrm{A}});r_j^{\mathrm{B}},\mathrm{pmtn}^{\mathrm{B}}\mid\sum T_i^{\mathrm{A}}:\sum U_j^{\mathrm{B}}\leqslant Q$ 的拟多项式时间算法。 证毕

算法1 初始条件:$T(t,\varnothing,\varnothing,0)=0$,$T(t,\varnothing,\{l\},0或1)=0$,$T(t,\{l\},\varnothing,0)=\max\{t+p_l^{\mathrm{A}}-d_l^{\mathrm{A}},0\}$。

递推函数:1) $r_i^{\mathrm{B}}+p_i^{\mathrm{B}}+p_c^{\mathrm{A}}-d_i^{\mathrm{B}}<0,q\leqslant Q$

$$T(t,B(J_i^{\mathrm{A}},J_j^{\mathrm{A}},J_k^{\mathrm{A}}),B(J_l^{\mathrm{B}},J_m^{\mathrm{B}}),q)=\min[T(t,B(J_i^{\mathrm{A}},J_{k'+\delta}^{\mathrm{A}},J_{k'}^{\mathrm{A}}),B(J_l^{\mathrm{B}},J_u^{\mathrm{B}}),q')+\max(0,C_{k'}^{\mathrm{A}}(\delta,u)-d_{k'}^{\mathrm{A}})+T(C_{k'}^{\mathrm{A}}(\delta,u),B(J_{k'+\delta+1}^{\mathrm{A}},J_j^{\mathrm{A}},J_{k'}^{\mathrm{A}}),B(J_{u+1}^{\mathrm{B}},J_m^{\mathrm{B}}),q-q')];$$

2) $r_i^{\mathrm{B}}+p_i^{\mathrm{B}}+p_c^{\mathrm{A}}-d_i^{\mathrm{B}}>0,q\leqslant Q$

$$T(t,B(J_i^{\mathrm{A}},J_j^{\mathrm{A}},J_k^{\mathrm{A}}),B(J_l^{\mathrm{B}},J_m^{\mathrm{B}}),q)=T(t,B(J_i^{\mathrm{A}},J_j^{\mathrm{A}},J_k^{\mathrm{A}}),B(J_l^{\mathrm{B}},J_m^{\mathrm{B}}),q-1)=[T(t,B_1(J_i^{\mathrm{A}},J_{c-1}^{\mathrm{A}},J_{k_1}^{\mathrm{A}}),B_1(J_l^{\mathrm{B}},J_{i-1}^{\mathrm{B}}),q_1)+T(r_c^{\mathrm{A}},B_2(J_c^{\mathrm{A}},J_j^{\mathrm{A}},J_{k_2}^{\mathrm{A}}),B_2(J_{i+1}^{\mathrm{B}},J_m^{\mathrm{B}}),q_2)];$$

3) $r_i^{\mathrm{B}}+p_i^{\mathrm{B}}+p_c^{\mathrm{A}}-d_i^{\mathrm{B}}>0,q=Q$

$$T(t,B(J_i^{\mathrm{A}},J_j^{\mathrm{A}},J_k^{\mathrm{A}}),B(J_l^{\mathrm{B}},J_m^{\mathrm{B}}),q)=T(t,B(J_i^{\mathrm{A}},J_j^{\mathrm{A}},J_k^{\mathrm{A}}),B(J_l^{\mathrm{B}},J_m^{\mathrm{B}}),q)+\sum(C_i^{\mathrm{B}}-r_c^{\mathrm{A}})。$$

最优值:$\min T(0,n_1,n_2,Q)$。

上述算法中,t 表示块 B 开始加工的时间,工件 $J_{k'}^{\mathrm{A}}$ 满足 $p_{k'}^{\mathrm{A}}=\max\{p_j^{\mathrm{A}}\mid j\in B(J_i^{\mathrm{A}},J_j^{\mathrm{A}},J_k^{\mathrm{A}})\}$,且 $C_{k'}^{\mathrm{A}}(\delta,u)=t+\sum\limits_{h\in B(J_i^{\mathrm{A}},J_{k'+\delta}^{\mathrm{A}},J_{k'}^{\mathrm{A}})}p_h^{\mathrm{A}}+\sum\limits_{j=1}^{u}p_j^{\mathrm{B}}$。

算法1的最优值是代理A和代理B工件在 t 时刻开始加工的所有排序可能的最小值,且满足代理B总误工工件个数 q 不超过 Q,在 $q\leqslant Q$ 的情况下,用上述算法得到 $T(t,B(J_i^{\mathrm{A}},J_j^{\mathrm{A}},J_k^{\mathrm{A}}),B(J_l^{\mathrm{B}},J_m^{\mathrm{B}}),q)$ 的最优值及最优序列。

在算法 1 中，工件集合 $B(J_i^{\mathrm{A}},J_j^{\mathrm{A}},J_k^{\mathrm{A}})$能在 $O(n_1^3)$内得到，开始加工时间点最多为 $\sum p_i^{\mathrm{A}}+\sum p_j^{\mathrm{B}}$，工件集合 $B(J_l^{\mathrm{B}},J_m^{\mathrm{B}})$能在 $O(n_2)$内得到，代理 A 最优序列需 $O(n_1)$，代理 B 总误工工件数 $q\leqslant Q$，因而原问题的时间复杂度为 $O\left(n_1^4n_2^2Q\left(\sum p_i^{\mathrm{A}}+\sum p_j^{\mathrm{B}}\right)\right)$。

3 关于最大误工问题

第二节考虑两个代理最小化总误工的模型，接下来将考虑两个代理最小化最大误工的问题。

定理 3　问题 $1\mid(r_i^{\mathrm{A}},d_i^{\mathrm{A}});r_j^{\mathrm{B}},\mathrm{pmtn}^{\mathrm{B}}\mid T_{\max}^{\mathrm{A}}:\sum U_j^{\mathrm{B}}\leqslant U$ 存在一个最优序列，其中代理 A 工件按照 EDD 规则排列，代理 B 误工工件以任意序列排在序列最后，否则按中断 EDD 规则排列。

证明　设最优序列为 σ，代理 A 工件按 EDD 规则排列，设工件为 $J_i^{\mathrm{A}},J_j^{\mathrm{A}}$ 为两个相邻代理 A 工件，且 $i<j$，$r_i^{\mathrm{A}}\leqslant r_j^{\mathrm{A}}$，$d_i^{\mathrm{A}}<d_j^{\mathrm{A}}$，工件集合 L^{B} 表示在工件 $J_i^{\mathrm{A}},J_j^{\mathrm{A}}$ 之间加工的代理 B 工件。把工件 $J_i^{\mathrm{A}},J_j^{\mathrm{A}}$ 交换后的序列记为 σ'，且 $r_i^{\mathrm{A}}=r_j^{\mathrm{A}}$，若 $r_i^{\mathrm{A}}<r_j^{\mathrm{A}}$，两个工件不能交换。在序列 σ' 中，若 $p_j^{\mathrm{A}}\leqslant p_i^{\mathrm{A}}$，不会使工件集合 L^{B} 的完工时间延后，但 $T_{\max}^{\mathrm{A}}$ 可能会增大，因而 σ' 并不比 σ 好；若 $p_j^{\mathrm{A}}>p_i^{\mathrm{A}}$，工件 J_j^{A} 可能导致代理 B 工件误工且 $T_{\max}^{\mathrm{A}}$ 可能会增大，那么序列 σ 最好。

综上所述，代理 A 工件按照 EDD 规则排列最优。代理 B 工件排列方式定理 1 已经给出。　证毕

定理 4　问题 $1\mid(r_i^{\mathrm{A}},d_i^{\mathrm{A}});r_j^{\mathrm{B}},\mathrm{pmtn}^{\mathrm{B}}\mid T_{\max}^{\mathrm{A}}:\sum U_j^{\mathrm{B}}\leqslant U$ 能在 $O(n_1\log n_1+n_2\log n_2)$内得到最优序列。

证明　假设代理 B 工件按 EDD 规则排列，记此序列为 σ_1；代理 A 工件按 EDD 规则排列，记此序列为 σ_2，现通过以下步骤把序列 σ_1,σ_2 合并在序列 σ 上。

1）若序列 σ_1,σ_2 上的工件加工时间不重合，那么把序列 σ_2 上的代理 A 工件放在 σ_1 上；

2）若序列 σ_1,σ_2 上的工件加工时间重合，若：

(i) 代理 A 工件加工未完成时代理 B 工件开始加工，且代理 A 工件不能中断，在序列 σ 上，若把代理 B 工件往后移使得代理 A 工件完工，而代理 B 工件又不误工或代理 B 工件后移导致误工但不超过给定值 U，那么代理 A 工件加工完成后再加工代理 B 工件或误工的代理 B 工件放序列最后加工；若代理 B 工件后移导致误工且超过给定值 U，那么代理 A 工件在代理 B 工件完工后开始加工，能在 $O(n_1\log n_1+n_2\log n_2)$内得到；

(ii) 代理 A 工件在代理 B 工件加工未完成时开始加工，代理 B 工件可中断。若中断代理 B 工件加工代理 A 工件使得代理 B 工件不误工或中断后代理 B 工件误工但不超过给定值 U，那么在序列 σ 上中断代理 B 工件使之不误工再加工代理 A 工件或误工的代理 B 放序列最后加工；若中断后代理 B 工件误工且总误工工件个数超过 U，代理 A 工件在代理 B 工件完工之后开始加工，时间复杂度为 $O(n_1\log n_1+n_2\log n_2)$。

在序列 σ 上，只需要处理代理 A 和代理 B 加工时间有重合的工件，而所有步骤都能在 $O(n_1\log n_1+n_2\log n_2)$ 内完成。　证毕

在工件的到达时间与工期一致的情况下，考虑两个代理排序的最小化最大误工问题，即 $1\mid(r_i^{\mathrm{A}},d_i^{\mathrm{A}}),\mathrm{pmtn}^{\mathrm{A}}\mid T_{\max}^{\mathrm{A}}:f_{\max}^{\mathrm{B}}\leqslant W$。Leung 等人[2]研究了最大延迟带有到达时间与可中断情况下的时间复杂度，因此有如下定理。

定理 5　问题 $1\mid(r_i^{\mathrm{A}},d_i^{\mathrm{A}}),\mathrm{pmtn}^{\mathrm{A}}\mid T_{\max}^{\mathrm{A}}:f_{\max}^{\mathrm{B}}$能在 $O(n_1\log n_1+n_2\log n_2)$时间内得到最优序列。

证明　代理 B 的目标函数不能超过 W，即 $f_{\max}^{\mathrm{B}}\leqslant W$。此函数是关于完工时间非减函数，只要满足代理 B 目标函数的可行性即可。由正则函数的逆函数可得工件的最大完工时间为 $C_j^{\mathrm{B}}=f_j^{B^{-1}}(W)$，满足 $f_j^{\mathrm{B}}(C_j^{\mathrm{B}})\leqslant W$，修订工件 J_j^{B} 的工期为$\overline{d_j^{\mathrm{B}}}=f_j^{B^{-1}}(W)$，把代理 B 工件以修订后的工期从后往前排列，时间复杂度为 $O(n_2\log n_2)$。此时把代理 A 工件插入序列，两个代理工件加工过程始终满足同一台机器只能加工一个工件，那么代理 A 工件可能会被代理 B 工件中断，即代理 A 工件按照中断 EDD 规则排列，时间复杂度为 $O(n_1\log n_1)$。　证毕

Leung 等人[2]研究了两个代理最大延迟的固定区间的问题，最大延迟和最大误工本质上没有区别，因而有如下定理：

定理 6　问题 $1\mid(r_i^{\mathrm{A}},d_i^{\mathrm{A}}),\mathrm{pmtn}^{\mathrm{A}};r_j^{\mathrm{B}},d_j^{\mathrm{B}}\mid T_{\max}^{\mathrm{A}}:\mathrm{fsbl}^{\mathrm{B}}$ 能在 $O(n_1^{n_2+1})$内得到解决，其中 n_2 是代理 B 的服务区间和时间窗口个数。

定理 6 的证明和 Leung 等人[2]对 $1\mid r_j^{\mathrm{A}},\mathrm{pmtn}^{\mathrm{A}};r_j^{\mathrm{B}},d_j^{\mathrm{B}}\mid L_{\max}^{\mathrm{A}}:\mathrm{fsbl}^{\mathrm{B}}$ 的证明类似。

4 总结

本文首先考虑了问题：$1\mid(r_i^A,d_i^A);r_j^B,\mathrm{pmtn}^B\mid\sum T_i^A:\sum U_j^B\leqslant Q$ 的最优排序规则和拟多项式时间动态规划算法。其次考虑了关于最大误工的复杂环境模型，给出问题 $1\mid(r_i^A,d_i^A);r_j^B,\mathrm{pmtn}^B\mid T_{\max}^A:\sum U_j^B\leqslant U$ 的最优排序规则和时间复杂度证明。以后可以将本文模型运用到平行机或者流水车间。

参考文献：

[1] AGNETIS A, MIRCHANDANI P B, PACCIARELLI D. Scheduling problems with two competing agents[J]. Operations Research, 2004, 52(2): 229-242.

[2] LEUNG J Y T, PINEDO M, WAN G H. Competitive two-agent scheduling and its applications[J]. Operations Research, 2010, 58(2): 458-469.

[3] LAWLER E L. A "pseudo-polynomial" algorithm for sequencing jobs to minimize total tardiness[J]. Annals of Discrete Mathematics, 1977, 1: 331-342.

[4] TIAN Z J, NG C T, CHENG T C E. An $O(n^2)$ algorithm for scheduling equal-length preemptive jobs on a single machine to minimize total tardiness[J]. Journal of Scheduling, 2006, 9: 343-364.

[5] TIAN Z J, NG C T, CHENG T C E. Preemptive scheduling of jobs with agreeable due dates on a single machine to minimize total tardiness[J]. Operations Research, 2009, 37: 368-374.

[6] KOULAMAS C, KYPARISIS G J. Single machine scheduling with release times, deadlines and tardiness objectives [J]. European Journal of Operational Research, 2001, 113: 447-453.

[7] GRAHAM P L, LAWLER E L, LENSTRA J K. Optimization and approximation in deterministic machine scheduling: a survey[J]. Annals of Discrete Mathematics, 1979: 287-326.

[8] BAKER K R, LAWLER E L, LENSTRA J K. Preemptive scheduling of a single machine to minimize maximum cost subject to release dates and precedence constraints[J]. Operations Research, 1983, 31: 381-386.

[9] PETER B. Scheduling algorithms[M]. New York: Springer-Verlag, 2007.

Operations Research and Cybernetics

Two-Agent Scheduling Problem about Tardiness on a Single Machine

ZHANG Xingong[1], CHEN Qiuhong[1], WANG Xiangbing[2]

(1. School of Mathematics Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331;

2. School of Economics & Management, Guizhou University of Engineering Science, Bijie Guizhou 551700, China)

Abstract: [**Purposes**]Two-agent scheduling problem about tardiness on a single machine is considered here. [**Methods**]The objective of the first agent is total tardiness or the maximum tardiness with agreeable due dates, while the second agent considers the number of tardy job with preemptive or the maximum coast function. The goal is to find an optimal scheduling in combination with the Lawler algorithm or the EDD rule in the case of model determination that minimize the objective of the first agent while keeping the second agent schedule all its job satisfy the second agent feasible. [**Findings**]The optimal scheduling is obtained to minimize the objective function of the first agent under the condition that the optimal schedule rules above is limited. [**Conclusions**] A dynamic programming algorithm is presented for the total tardiness scheduling problem and the maximum tardiness time complexity proofs are given here.

Keywords: total tardiness; two-agent; agreeable; the maximum tardiness

(责任编辑　黄　颖)