2017 年度重庆市出版专项基金资助栏目　DOI:10.11721/cqnuj20180407

运筹学与控制论

预(拟)不变凸性的一些等价刻画及应用*

杨 玉 红
(长江师范学院 数学与统计学院,重庆 涪陵 408100)

摘要:【目的】研究预(拟)不变凸性的一些等价刻画。【方法】将多元实值函数 f 转化为单变量实值函数 φ 来处理预(拟)不变凸性。【结果】首先,当条件 C_1 和条件 D 成立时,f 的预(拟)不变凸性等价于 φ 的(拟)凸性;其次,利用类似的方法获得了中间点预(拟)不变凸性的等价刻画;最后,给出了这些结论的一些应用。【结论】f 的预(拟)不变凸性可以等价转化为 φ 的(拟)凸性;然而,ρ-预(拟)不变凸情形却有些不同,即 φ 的 ρ-(拟)凸性是与 f 的弱 ρ-预(拟)不变凸性相对应的。

关键词:预(拟)不变凸;中间点预(拟)不变凸;(拟)凸

中图分类号:O221　**文献标志码:**A　**文章编号:**1672-6693(2018)04-0011-10

广义凸性理论在非线性最优化、多目标决策、工程设计等领域有着广泛的应用,它已成为最优化理论的重要基础和有用工具。广义凸性中最具代表性的就是不变凸性,它能保持凸性的一些良好性质,如局部极小点是全局极小点、驻点是极小点等等。因此,对不变凸性的研究已成为广义凸性理论研究中的一个热点内容。

1981 年,Hanson[1]首先提出不变凸函数,而后被 Craven[2]正式命名。1985 年,Kaul 和 Kaur[3]又引入了伪不变凸函数和拟不变凸函数。1986 年,Ben-Israel 和 Mond[4]给出了不变凸函数的一个充分条件:可微的预不变凸函数就是不变凸函数。但文献[4]并没有给出预不变凸函数这个概念,而是由 Weir 和 Mond[5]在 1988 年正式引入并使用的。1991 年,Pini[6]进一步定义了预拟不变凸函数和预伪不变凸函数。1995 年,Mohan 和 Neogy[7]引入了条件 C,并表明在条件 C 成立时不变凸函数就是预不变凸函数。于是,对可微函数而言,当条件 C 成立时预不变凸函数和不变凸函数是等价的。可见,预不变凸函数与不变凸函数有着密切联系,从而引起了人们对预不变凸性的极大关注。

Avriel 等人[8]曾给出了凹函数和拟凹函数的一种等价条件,将此改述为凸函数与拟凸函数情形如下。

命题 1[8]　设 $S\subseteq\mathbf{R}^n$ 是非空凸集,$f:S\to\mathbf{R}$ 是一个实值函数,则:

1) f 是凸函数$\Leftrightarrow\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in S,F(\lambda)=f(\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y})$是$[0,1]$上的凸函数;

2) f 是拟凸函数$\Leftrightarrow\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in S,F(\lambda)=f(\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y})$是$[0,1]$上的拟凸函数。

借鉴文献[8]的思想方法,赵克全在文献[9-10]中分别给出了预(拟)不变凸函数和 r-预不变凸函数的等价条件(由于本文不研究 r-预不变凸性,所以不再罗列 r-预不变凸函数的结论),如下所述。

命题 2[9-10]　设 $S\subseteq\mathbf{R}^n$ 关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是不变凸集,$f:S\to\mathbf{R}$ 是一个实值函数。如果 η 满足条件 C,f 在 S 上关于 η 满足条件 D,则:

1) f 关于 η 是预不变凸函数$\Leftrightarrow\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in S,F(\lambda)=f(\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$是$[0,1]$上的凸函数;

2) f 关于 η 是预拟不变凸函数$\Leftrightarrow\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in S,F(\lambda)=f(\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$是$[0,1]$上的拟凸函数。

上面的命题 2 表明了预(拟)不变凸函数和(拟)凸函数的紧密联系,从另一个角度展现了预(拟)不变凸性的重要性。同时,由上面的两个命题看出,可以将对多元实值函数 f 的预不变凸性的研究转化为对单变量实值函数 $F(\lambda)$的凸性来研究,这可以算是研究预(拟)不变凸性的等价刻画的新视角。借用文献[9-10]的思想,唐万梅[11]获得了强预(拟)不变凸函数和严格预不变凸函数的一些刻画,赵克全等人[12]得到了中间点预拟不变凸函

* **收稿日期:**2018-06-10　**网络出版时间:**2018-07-26 16:50
资助项目:国家自然科学基金(No. 11431004);重庆市教委科学技术研究项目(No. KJ160013)
第一作者简介:杨玉红,女,讲师,博士,研究方向为广义凸性及向量优化,E-mail:yhyang1020@163.com
网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20180726.1649.004.html

数的一些刻画。然而,关于严格和半严格情形的预(拟)不变凸性、中间点预(拟)不变凸性等情形的转化与刻画还不够完善,所以本文打算继续讨论这些情形。另外,在下面的研究中可以发现已有预(拟)不变凸性的刻画结论中的条件C其实还可以减弱到条件C_1。

1 预备知识

本文假设$\mathbf{R}^n$为n维欧氏空间,$K\subseteq\mathbf{R}^n$是非空子集。设$\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$是一个给定的向量值映射,$\mathbf{R}$表示全体实数的集合。

定义1[5] 称K是关于η的不变凸集,若$\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$,$\forall\,\alpha\in[0,1]$,有$\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in K$。

定义2 设K是关于η的不变凸集,$f:K\to\mathbf{R}$是一个实值函数,则:

1)若$\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$,$\forall\,\alpha\in[0,1]$,有$f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\leqslant\alpha f(\boldsymbol{x})+(1-\alpha)f(\boldsymbol{y})$,则称$f$在$K$上关于$\eta$是预不变凸函数[13]。

2)若$\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K:\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$(或$f(\boldsymbol{x})\neq f(\boldsymbol{y})$),$\forall\,\alpha\in(0,1)$,有$f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))<\alpha f(\boldsymbol{x})+(1-\alpha)f(\boldsymbol{y})$,则称$f$在$K$上关于$\eta$是严格预不变(或半严格预不变凸)函数[13]。

3)若$\exists\,\rho\in\mathbf{R}$,$\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$,$\forall\,\alpha\in[0,1]$,有:

$$f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\leqslant\alpha f(\boldsymbol{x})+(1-\alpha)f(\boldsymbol{y})-\rho\alpha(1-\alpha)\parallel\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\parallel^2,$$

则称f在K上关于η是ρ-预不变凸函数。若$\rho>0$时,则f就是强预不变凸函数[14];若$\rho=0$,则f就是预不变凸函数。

4)若$\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$,$\exists\,\rho\in\mathbf{R}$,有:

$$f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\leqslant\alpha f(\boldsymbol{x})+(1-\alpha)f(\boldsymbol{y})-\rho\alpha(1-\alpha)\parallel\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\parallel^2,\ \forall\,\alpha\in[0,1],$$

则称f在K上关于η是弱ρ-预不变凸函数。

在定义2中:1)若将不等式右端的"$\alpha f(\boldsymbol{x})+(1-\alpha)f(\boldsymbol{y})$"更换为"$\max\{f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y})\}$",则称$f$分别是预拟不变凸函数[15]、严格预拟不变凸函数或半严格预拟不变凸函数[15]、ρ-预拟不变凸函数(当$\rho>0$时就是强预拟不变凸函数[16])和弱ρ-预拟不变凸函数;2)若取$\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$,则称$f$分别是凸函数[8]、严格凸函数或半严格凸函数[8]、ρ-凸函数[17]和弱ρ-凸函数;3)若将不等式右端的"$\alpha f(\boldsymbol{x})+(1-\alpha)f(\boldsymbol{y})$"更换为"$\max\{f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y})\}$",且取$\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$,则称$f$分别是拟凸函数[8]、严格拟凸函数或半严格拟凸函数[8]、ρ拟凸函数和弱ρ-拟凸函数。对于ρ-凸性,本文仅考虑$\rho\neq0$情形。

定义3[7] 称映射$\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$满足条件C,若$\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$,$\forall\,\alpha\in[0,1]$,有:$C_1$:$\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=-\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$;$C_2$:$\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=(1-\alpha)\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$。

定义4[15] 设K是关于η的不变凸集,称$f:K\to\mathbf{R}$在K上关于η满足条件D,若$\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$,有

$$f(\boldsymbol{y}+\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\leqslant f(\boldsymbol{x})。$$

定义5[13] 设K是关于η的不变凸集,称$f:K\to\mathbf{R}$在K上关于η满足条件A,若:$\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$:$f(\boldsymbol{x})<f(\boldsymbol{y})$,s.t. $f(\boldsymbol{y}+\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))<f(\boldsymbol{y})$。

定义6 设K是关于η的不变凸集,称$f:K\to\mathbf{R}$在K上关于η满足条件A′,若:$\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$:$f(\boldsymbol{x})\neq f(\boldsymbol{y})$,s.t. $f(\boldsymbol{y}+\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\neq f(\boldsymbol{y})$。

显然,当$\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$的时候,条件C,D,A,A′自动成立,也就是说凸函数和拟凸函数自动满足这些条件。所以,当考虑预不变凸性的时候,往往需要满足这些条件之一时,方能保证预(拟)不变凸函数保持(拟)凸函数的一些性质。

文献[18-19]建立了条件C的一个性质(即下面的性质1),此性质在预不变凸性的研究中起着非常重要的作用。然而,这个性质只需要条件C_1便可获得。为方便大家参阅以及后文的反复引用,在条件C_1下给出这个性质的完整证明。

性质1 若向量值映射$\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$满足条件$C_1$,则:

$$\eta(\boldsymbol{y}+\alpha_1\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}+\alpha_2\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=(\alpha_1-\alpha_2)\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\ \forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n,\ \forall\,\alpha_1,\alpha_2\in[0,1]。$$

证明 任取$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$以及$\alpha_1,\alpha_2\in[0,1]$,下面分3种情况来讨论。

1)当$\alpha_1=\alpha_2$时,则$\boldsymbol{y}+\alpha_1\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}+\alpha_2\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$。在条件$C_1$中取$\alpha=0$,得$\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})=0$,$\forall\,\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$。于是,

$\eta(\boldsymbol{y}+\alpha_1\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}+\alpha_2\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=0=(\alpha_1-\alpha_2)\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$。

2）当 $1\geqslant\alpha_1>\alpha_2\geqslant 0$ 时，注意到 $\alpha_1>0$ 以及 $\frac{\alpha_2-\alpha_1}{-\alpha_1}\in(0,1]$ 得：

$$\eta(\boldsymbol{y}+\alpha_1\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}+\alpha_2\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=\eta(\boldsymbol{y}+\alpha_1\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}+\alpha_1\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\alpha_2-\alpha_1)\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\overset{\mathrm{C}_1}{=}$$

$$\eta\left(\boldsymbol{y}+\alpha_1\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}+\alpha_1\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\frac{\alpha_2-\alpha_1}{-\alpha_1}\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}+\alpha_1\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\right)\overset{\mathrm{C}_1}{=}$$

$$-\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1}\eta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}+\alpha_1\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\overset{\mathrm{C}_1}{=}-\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1}(-\alpha_1)\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\alpha_1-\alpha_2)\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})。$$

于是，

$$\eta(\boldsymbol{y}+\alpha_1\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}+\alpha_2\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=(\alpha_1-\alpha_2)\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\alpha_1>\alpha_2。\tag{1}$$

3）当 $0\leqslant\alpha_1<\alpha_2\leqslant 1$ 时，使用条件 C_1 以及(1)式得：

$$\eta(\boldsymbol{y}+\alpha_1\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}+\alpha_2\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=\eta(\boldsymbol{y}+\alpha_1\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}+\alpha_1\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\alpha_2-\alpha_1)\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\overset{(1)}{=}$$

$$\eta(\boldsymbol{y}+\alpha_1\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}+\alpha_1\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\eta(\boldsymbol{y}+\alpha_2\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}+\alpha_1\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})))\overset{\mathrm{C}_1}{=}$$

$$-\eta(\boldsymbol{y}+\alpha_2\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}+\alpha_1\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\overset{(1)}{=}-(\alpha_2-\alpha_1)\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\alpha_1-\alpha_2)\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})。$$

于是，$\eta(\boldsymbol{y}+\alpha_1\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}+\alpha_2\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=(\alpha_1-\alpha_2)\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\alpha_1<\alpha_2$。　　证毕

若在性质 1 中取 $\alpha_2=0$，则有如下常用结论。

性质 2　若向量值映射 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 满足条件 C_1，则：

$$\eta(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y})=\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\ \forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n,\forall\,\alpha\in[0,1]。$$

2 预(拟)不变凸函数类转化为单变量函数的刻画

首先，讨论预(拟)不变凸函数转化为单变量函数的刻画。在前面已提到文献[9-10]已获得过预不变凸函数的相关结论。不过，下面的定理 1 表明文献[9-10]的条件 C 其实还可以削弱到条件 C_1，并且证明方式也可以更简洁。

定理 1　设 K 是关于 η 的不变凸集，$f:K\to\mathbf{R}$ 是一个实值函数，则：

1）设 η 满足条件 C_1，若 f 在 K 上关于 η 是预不变凸(预拟不变凸)函数，则 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，

$$\varphi_{x,y}(\alpha)=f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$$

在[0,1]上是凸(拟凸)函数。

2）设 f 在 K 上关于 η 满足条件 D，若 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，$\varphi_{x,y}(\alpha)=f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$ 在[0,1]上是凸(拟凸)函数，则 f 在 K 上关于相同的 η 是预不变凸(预拟不变凸)函数。

证明　1）设 f 在 K 上是预不变凸(预拟不变凸)函数，任取 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，下证 $\varphi_{x,y}(\alpha)=f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$ 在[0,1]上是凸(拟凸)函数。设 $\forall\,\alpha_1,\alpha_2\in[0,1]$，$\forall\,\lambda\in[0,1]$。由于条件 C_1 成立，由性质 1 得：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{y}+[\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2]\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}+\alpha_2\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\lambda(\alpha_1-\alpha_2)\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\\&\boldsymbol{y}+\alpha_2\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\lambda\eta(\boldsymbol{y}+\alpha_1\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}+\alpha_2\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))。\end{aligned}\tag{2}$$

注意到 K 是不变凸集，则 $\boldsymbol{y}+\alpha_1\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}+\alpha_2\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in K$。

i）若 f 是预不变凸的，结合(2)式得：

$$\begin{aligned}&\varphi_{x,y}(\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2)=f(\boldsymbol{y}+[\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2]\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=\\&f(\boldsymbol{y}+\alpha_2\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\lambda\eta(\boldsymbol{y}+\alpha_1\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}+\alpha_2\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})))\leqslant\\&\lambda f(\boldsymbol{y}+\alpha_1\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y}+\alpha_2\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=\lambda\varphi_{x,y}(\alpha_1)+(1-\lambda)\varphi_{x,y}(\alpha_2)。\end{aligned}$$

于是，$\varphi_{x,y}(\alpha)$ 在[0,1]上是凸函数。

ii）若 f 是预拟不变凸的，结合(2)式得：

$$\begin{aligned}&\varphi_{x,y}(\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2)=f(\boldsymbol{y}+[\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2]\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=\\&f(\boldsymbol{y}+\alpha_2\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\lambda\eta(\boldsymbol{y}+\alpha_1\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}+\alpha_2\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})))\leqslant\\&\max\{f(\boldsymbol{y}+\alpha_1\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})),f(\boldsymbol{y}+\alpha_2\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\}=\max\{\varphi_{x,y}(\alpha_1),\varphi_{x,y}(\alpha_2)\}。\end{aligned}$$

于是,$\varphi_{x,y}(\alpha)$在$[0,1]$上是拟凸函数。

2) 任取 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$,设 $\varphi_{x,y}(\alpha)=f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$在$[0,1]$上是凸(拟凸)函数,下证 f 在 K 上是预不变凸(预拟不变凸)函数。任取 $\lambda\in[0,1]$,有:

i) 若 $\varphi_{x,y}(\alpha)$在$[0,1]$上是凸函数,且注意到 f 满足条件 D,则有:

$$f(\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=\varphi_{x,y}(\lambda)=\varphi_{x,y}(\lambda\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 0)\leqslant\lambda\varphi_{x,y}(1)+(1-\lambda)\varphi_{x,y}(0)=$$
$$\lambda f(\boldsymbol{y}+\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y})\leqslant\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y})。$$

于是,f 在 K 上也关于 η 是预不变凸函数。

ii) 若 $\varphi_{x,y}(\alpha)$在$[0,1]$上是拟凸函数,且注意到 f 满足条件 D,则有:

$$f(\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=\varphi_{x,y}(\lambda)=\varphi_{x,y}(\lambda\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 0)\leqslant\max\{\varphi_{x,y}(1),\varphi_{x,y}(0)\}=$$
$$\max\{f(\boldsymbol{y}+\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})),f(\boldsymbol{y})\}\leqslant\max\{f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y})\}。$$

于是,f 在 K 上也关于 η 是预拟不变凸函数。 证毕

定理1中有关预拟不变凸函数的结论改进了文献[9]的定理1。另外,由定理1容易得到以下有关预(拟)不变凸函数的等价刻画。

推论1 设 K 是关于 η 的不变凸集,$f:K\to\mathbf{R}$ 是一个实值函数。如果 η 满足条件 C_1,f 在 K 上关于 η 满足条件 D,则 f 在 K 上关于 η 是预不变凸(预拟不变凸)函数等价于$\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$,$\varphi_{x,y}(\alpha)=f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$在$[0,1]$上是凸(拟凸)函数。

观察定理1的证明发现,两种情形的证明只是在使用预不变凸函数和预拟不变凸函数(相应的,凸函数和拟凸函数)时产生的不等式的不同,其他部分相似。所以,后文的定理均略去预拟不变凸性情形的证明内容。

接下来讨论严格预(拟)不变凸函数转化为单变量函数的刻画。文献[11]的定理5在条件C下给出了严格预不变凸函数的一个必要条件。现在给出充分条件,并且将看到条件C同样可以削弱到条件 C_1,详见下面的定理2。

定理2 设 K 是关于 η 的不变凸集,$f:K\to\mathbf{R}$ 是一个实值函数,则:

1) 设 η 满足条件 C_1,且对任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$,当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$ 时 $\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\neq 0$。若 f 在 K 上关于 η 是严格预不变凸(严格预拟不变凸)函数,则$\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K:\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$,$\varphi_{x,y}(\alpha)=f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$在$[0,1]$上是严格凸(严格拟凸)函数。

2) 设 f 在 K 上关于 η 满足条件 D,若$\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K:\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$, $\varphi_{x,y}(\alpha)=f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$在$[0,1]$上是严格凸(严格拟凸)函数,则 f 在 K 上关于相同的 η 是严格预不变凸(严格预拟不变凸)函数。

证明 只证明严格预不变凸函数情形。

1) 设 f 在 K 上是严格预不变凸函数,任取 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K:\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$,下证 $\varphi_{x,y}(\alpha)=f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$在$[0,1]$上是严格凸函数。设$\forall\,\alpha_1,\alpha_2\in[0,1]:\alpha_1\neq\alpha_2$,$\forall\,\lambda\in(0,1)$。由于 η 满足条件 C_1,所以也有(2)式成立。由已知条件,当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$ 时 $\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\neq 0$。再注意到 $\alpha_1\neq\alpha_2$,故有:

$$\boldsymbol{y}+\alpha_1\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\neq\boldsymbol{y}+\alpha_2\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})。\tag{3}$$

因为 f 在 K 上是严格预不变凸的,结合(2),(3)式得

$$\begin{aligned}&\varphi_{x,y}(\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2)=f(\boldsymbol{y}+[\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2]\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=\\&f(\boldsymbol{y}+\alpha_2\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\lambda\eta(\boldsymbol{y}+\alpha_1\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}+\alpha_2\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})))<\\&\lambda f(\boldsymbol{y}+\alpha_1\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y}+\alpha_2\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=\lambda\varphi_{x,y}(\alpha_1)+(1-\lambda)\varphi_{x,y}(\alpha_2)。\end{aligned}\tag{4}$$

于是,$\varphi_{x,y}(\alpha)$在$[0,1]$上是严格凸函数。

2) 任取 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K:\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$,设 $\varphi_{x,y}(\alpha)=f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$在$[0,1]$上是严格凸函数,下证 f 在 K 上是严格预不变凸函数。任取 $\lambda\in(0,1)$,因为 $\varphi_{x,y}(\alpha)$在$[0,1]$上是严格凸函数且 f 满足条件 D,所以有:

$$\begin{aligned}&f(\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=\varphi_{x,y}(\lambda)=\varphi_{x,y}(\lambda\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 0)<\lambda\varphi_{x,y}(1)+(1-\lambda)\varphi_{x,y}(0)=\\&\lambda f(\boldsymbol{y}+\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y})\leqslant\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y})。\end{aligned}\tag{5}$$

于是,f 在 K 上也关于 η 是严格预不变凸函数。 证毕

推论2 设 K 是关于 η 的不变凸集,$f:K\to\mathbf{R}$ 是一个实值函数。如果 η 满足条件 C_1,f 在 K 上关于 η 满足条件 D,且对任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$,当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$ 时 $\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\neq 0$。则 f 在 K 上关于 η 是严格预不变凸(严格预拟不变凸)函数等价于$\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K:\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$,$\varphi_{x,y}(\alpha)=f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$在$[0,1]$上是严格凸(严格拟凸)函数。

同样，改进文献[11]的定理6，给出如下有关半严格预(拟)不变凸函数的刻画。

定理3　设 K 是关于 η 的不变凸集，$f:K\to\mathbf{R}$ 是一个实值函数，则：

1) 设 η 满足条件 C_1，若 f 在 K 上关于 η 是半严格预不变凸(半严格预拟不变凸)函数，则 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，$\varphi_{x,y}(\alpha)=f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$ 在$[0,1]$上是半严格凸(半严格拟凸)函数。

2) 设 f 在 K 上关于 η 满足条件 D 及条件 A′，若 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K:f(\boldsymbol{x})\neq f(\boldsymbol{y})$，$\varphi_{x,y}(\alpha)=f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$ 在$[0,1]$上是半严格凸(半严格拟凸)函数，则 f 在 K 上关于相同的 η 是半严格预不变凸(半严格预拟不变凸)函数。

证明　只证明半严格预不变凸函数情形。

1) 设 f 在 K 上是半严格预不变凸函数，任取 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，下证 $\varphi_{x,y}(\alpha)=f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$ 在$[0,1]$上是半严格凸函数。设 $\forall\,\alpha_1,\alpha_2\in[0,1]:\varphi_{x,y}(\alpha_1)\neq\varphi_{x,y}(\alpha_2)$，$\forall\,\lambda\in(0,1)$。由于 η 满足条件 C_1，所以(2)式成立。由于 $\varphi_{x,y}(\alpha_1)\neq\varphi_{x,y}(\alpha_2)$，也即是：

$$f(\boldsymbol{y}+\alpha_1\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\neq f(\boldsymbol{y}+\alpha_2\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))。\tag{6}$$

因为 f 在 K 上是半严格预不变凸的，结合(2)式及(6)式，重复定理2中(4)式的推导过程，亦可以得到

$$\varphi_{x,y}(\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2)<\lambda\varphi_{x,y}(\alpha_1)+(1-\lambda)\varphi_{x,y}(\alpha_2)。$$

于是，$\varphi_{x,y}(\alpha)$ 在$[0,1]$上是半严格凸函数。

2) 任取 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K:f(\boldsymbol{x})\neq f(\boldsymbol{y})$，设 $\varphi_{x,y}(\alpha)=f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$ 在$[0,1]$上是半严格凸函数，下证 f 在 K 上是半严格预不变凸的。任取 $\lambda\in(0,1)$。由于 $f(\boldsymbol{x})\neq f(\boldsymbol{y})$，由条件 A′ 得 $f(\boldsymbol{y}+\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\neq f(\boldsymbol{y})$，即得 $\varphi_{x,y}(1)\neq\varphi_{x,y}(0)$。进而，因为 $\varphi_{x,y}(\alpha)$ 在$[0,1]$上是半严格凸函数且 f 满足条件 D，重复定理2中(5)式的推导过程，同样得到 $f(\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))<\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y})$。于是，$f$ 在 K 上也关于 η 是半严格预不变凸函数。　证毕

推论3　设 K 是关于 η 的不变凸集，$f:K\to\mathbf{R}$ 是一个实值函数。如果 η 满足条件 C_1，f 在 K 上关于 η 满足条件 D 及条件 A′，则 f 在 K 上关于 η 是半严格预不变凸(半严格预拟不变凸)函数等价于 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$：$f(\boldsymbol{x})\neq f(\boldsymbol{y})$，$\varphi_{x,y}(\alpha)=f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$ 在$[0,1]$上是半严格凸(半严格拟凸)函数。

下面的定理4改进了文献[11]的结论。将会看到把条件 C 减弱到条件 C_1，将 ρ-预不变凸函数减弱到弱 ρ-预不变凸函数($\rho>0$ 或 $\rho<0$ 皆可)之后，文献[11]的定理3仍然成立，而且证明方式可以简化。另外，定理4还表明 φ 的 ρ-(拟)凸性是与 f 的弱 ρ-预(拟)不变凸性对应的，而不是对应 ρ-预(拟)不变凸性。这一点与预(拟)不变凸、严格/半严格预(拟)不变凸情形不同。

定理4　设 K 是关于 η 的不变凸集，$f:K\to\mathbf{R}$ 是一个实值函数，且对任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$ 时 $\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\neq0$。则：

1) 设 η 满足条件 C_1，若 f 在 K 上关于 η 是弱 ρ-预不变凸(弱 ρ-预拟不变凸)函数($\rho\neq0$)，则 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K:\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$，$\varphi_{x,y}(\alpha)=f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$ 在$[0,1]$上是 $\tilde{\rho}$-凸($\tilde{\rho}$-拟凸)函数($\tilde{\rho}\neq0$ 且与 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 有关)。

2) 设 f 在 K 上关于 η 满足条件 D，若 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K:\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$，$\varphi_{x,y}(\alpha)=f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$ 在$[0,1]$上是 ρ-凸(ρ-拟凸)函数($\rho\neq0$ 且与 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 有关)，则 f 在 K 上关于相同的 η 是弱 $\tilde{\rho}$-预不变凸(弱 $\tilde{\rho}$-预拟不变凸)函数($\tilde{\rho}\neq0$)。

证明　只证明弱 ρ-预不变凸函数情形。

1) 设 f 在 K 上是弱 ρ-预不变凸函数，即 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，$\exists\,\rho\neq0$，s. t.

$$f(\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\leqslant\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y})-\rho\lambda(1-\lambda)\|\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|^2,\ \forall\,\lambda\in[0,1]。\tag{7}$$

任取 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K:\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$，下证 $\varphi_{x,y}(\alpha)=f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$ 在$[0,1]$上是 $\tilde{\rho}$-凸函数($\tilde{\rho}\neq0$ 且与 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 有关)。设 $\forall\,\alpha_1,\alpha_2\in[0,1]$，$\forall\,\lambda\in[0,1]$。由于 η 满足条件 C_1，所以(2)式成立。从而，因为 f 在 K 上是弱 ρ-预不变凸函数，结合(2)式与(7)式，由性质1得：

$$\begin{gathered}\varphi_{x,y}(\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2)=f(\boldsymbol{y}+[\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2]\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=\\ f(\boldsymbol{y}+\alpha_2\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\lambda\eta(\boldsymbol{y}+\alpha_1\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}+\alpha_2\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})))\leqslant\\ \lambda f(\boldsymbol{y}+\alpha_1\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y}+\alpha_2\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))-\rho\lambda(1-\lambda)\|\eta(\boldsymbol{y}+\alpha_1\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}+\alpha_2\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\|^2=\\ \lambda\varphi_{x,y}(\alpha_1)+(1-\lambda)\varphi_{x,y}(\alpha_2)-\rho\lambda(1-\lambda)|\alpha_1-\alpha_2|^2\cdot\|\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|^2。\end{gathered}$$

取 $\tilde{\rho}=\rho\|\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|^2$。由已知条件，当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$ 时 $\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\neq0$，从而 $\tilde{\rho}\neq0$ 且不依赖于 α_1,α_2 与 λ。于是，$\exists\,\tilde{\rho}\neq0$，$\forall\,\alpha_1,\alpha_2\in[0,1]$，$\forall\,\lambda\in[0,1]$，s. t.

$$\varphi_{x,y}(\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2)\leqslant\lambda\varphi_{x,y}(\alpha_1)+(1-\lambda)\varphi_{x,y}(\alpha_2)-\tilde{\rho}\lambda(1-\lambda)|\alpha_1-\alpha_2|^2。$$

所以，$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K:\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$，$\varphi_{x,y}(\alpha)$在$[0,1]$上是$\tilde{\rho}$-凸函数(其中$\tilde{\rho}$与$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$有关)。

2) 任取$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K:\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$，设$\varphi_{x,y}(\alpha)=f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$在$[0,1]$上是$\rho$-凸函数，其中$\rho\neq0$且与$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$有关，则$\forall\alpha_1,\alpha_2\in[0,1]$，$\forall\lambda\in[0,1]$，s. t.

$$\varphi_{x,y}(\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2)\leqslant\lambda\varphi_{x,y}(\alpha_1)+(1-\lambda)\varphi_{x,y}(\alpha_2)-\rho\lambda(1-\lambda)|\alpha_1-\alpha_2|^2。$$

特别地，对于$\alpha_1=1,\alpha_2=0$，结合条件D得：

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))&=\varphi_{x,y}(\lambda)=\varphi_{x,y}(\lambda\cdot1+(1-\lambda)\cdot0)\leqslant\lambda\varphi_{x,y}(1)+(1-\lambda)\varphi_{x,y}(0)-\rho\lambda(1-\lambda)|1-0|^2=\\&\lambda f(\boldsymbol{y}+\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y})-\rho\lambda(1-\lambda)\leqslant\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y})-\rho\lambda(1-\lambda),\ \forall\lambda\in[0,1]\end{aligned}\tag{8}$$

注意到当$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$时$\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\neq0$。取$\tilde{\rho}=\dfrac{\rho}{\|\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|^2}$，则$\tilde{\rho}\neq0$，代入(8)式得

$$f(\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\leqslant\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y})-\tilde{\rho}\lambda(1-\lambda)\|\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|^2,\ \forall\lambda\in[0,1]。\tag{9}$$

另外，当$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$时，由条件$C_1$得$\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$。于是，(9)式对任意的$\rho>0$均成立。

综上可得，f在K上也关于η是弱$\tilde{\rho}$-预不变凸函数。　　证毕

推论4　设K是关于η的不变凸集，$f:K\to\mathbf{R}$是一个实值函数。如果η满足条件C_1，f在K上关于η满足条件D，且对任意的$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，当$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$时$\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\neq0$。则$f$在$K$上关于$\eta$是弱$\rho$-预不变凸(弱$\rho$-预拟不变凸)函数等价于$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K:\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$，$\varphi_{x,y}(\alpha)=f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$在$[0,1]$上是$\tilde{\rho}$-凸($\tilde{\rho}$-拟凸)函数，其中$\rho$和$\tilde{\rho}$都是非零实数且均与$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$有关。

3 中间点预(拟)不变凸函数类转化为单变量函数的刻画

受文献[12]及第2节结论的启发，本节将讨论具有中间点预(拟)不变凸性的多元函数转化为单变量函数的刻画。首先给出中间点凸性的定义。

定义7　设K是关于$\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$的不变凸集，$f:K\to\mathbf{R}$是一个实值函数，则：

1) 若$\exists\alpha\in(0,1)$，$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，有$f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\leqslant\alpha f(\boldsymbol{x})+(1-\alpha)f(\boldsymbol{y})$，则称$f$在$K$上关于$\eta$和$\alpha$是中间点预不变凸函数。

2) 若$\exists\alpha\in(0,1)$，$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K:\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$(或$f(\boldsymbol{x})\neq f(\boldsymbol{y})$)，有$f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))<\alpha f(\boldsymbol{x})+(1-\alpha)f(\boldsymbol{y})$，则称$f$在$K$上关于$\eta$和$\alpha$是中间点严格预不变凸(或中间点半严格预不变凸)函数。

在定义7中：1) 若将不等式右端的“$\alpha f(\boldsymbol{x})+(1-\alpha)f(\boldsymbol{y})$”更换为“$\max\{f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y})\}$”，则称$f$分别是中间点预拟不变凸函数[12]、中间点严格预拟不变凸函数或中间点半严格预拟不变凸函数；2) 若取$\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$，则称$f$分别是中间点凸函数、中间点严格凸函数或中间点半严格凸函数；3) 若将不等式右端的“$\alpha f(\boldsymbol{x})+(1-\alpha)f(\boldsymbol{y})$”更换为“$\max\{f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y})\}$”，且取$\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$，则称$f$分别是中间点拟凸函数、中间点严格拟凸函数或中间点半严格拟凸函数。

类似于第2节对预(拟)不变凸性的处理手法，下面将多变量的中间点预(拟)不变凸函数类转化为单变量的中间点(拟)凸函数类来研究。同样的，也只给出中间点预不变凸性部分的证明内容。文献[12]的定理3已经得出过中间点预拟不变凸函数的一个刻画。然而，下面的定理5表明文献[12]的定理3的条件C可以减弱到条件C_1。

定理5　设K是关于η的不变凸集，$f:K\to\mathbf{R}$是一个实值函数，则：

1) 设η满足条件C_1，若f在K上关于η和$\lambda\in(0,1)$是中间点预不变凸(中间点预拟不变凸)函数，则$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，$\varphi_{x,y}(\alpha)=f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$在$[0,1]$上关于相同的$\lambda$是中间点凸(中间点拟凸)函数。

2) 设f在K上关于η满足条件D，若$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，$\varphi_{x,y}(\alpha)=f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$在$[0,1]$上关于同一个$\lambda\in(0,1)$是中间点凸(中间点拟凸)函数，则$f$在$K$上关于相同的$\eta$和$\lambda$是中间点预不变凸(中间点预拟不变凸)函数。

证明　只证明中间点预不变凸函数情形。

1) 设f在K上关于η和$\lambda\in(0,1)$是中间点预不变凸函数，则有：

$$f(\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\leqslant\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y}),\ \forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K。\tag{10}$$

任意取定$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，下证$\varphi_{x,y}(\alpha)=f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$在$[0,1]$上的中间点凸性。设$\forall\alpha_1,\alpha_2\in[0,1]$。由于条件

C_1 成立，由性质 1 得：

$$y+[\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2]\eta(x,y)=y+\alpha_2\eta(x,y)+\lambda\eta(y+\alpha_1\eta(x,y),y+\alpha_2\eta(x,y))。\tag{11}$$

注意到 K 是不变凸集，则 $y+\alpha_1\eta(x,y),y+\alpha_2\eta(x,y)\in K$。由 f 的中间点预不变凸性，结合(10)式和(11)式得：

$$\varphi_{x,y}(\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2)=f(y+[\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2]\eta(x,y))=$$
$$f(y+\alpha_2\eta(x,y)+\lambda\eta(y+\alpha_1\eta(x,y),y+\alpha_2\eta(x,y)))\leqslant$$
$$\lambda f(y+\alpha_1\eta(x,y))+(1-\lambda)f(y+\alpha_2\eta(x,y))=\lambda\varphi_{x,y}(\alpha_1)+(1-\lambda)\varphi_{x,y}(\alpha_2)。$$

于是，$\varphi_{x,y}(\alpha)$在$[0,1]$上关于 λ 是中间点凸函数。从而可得，$\forall x,y\in K$，$\varphi_{x,y}(\alpha)$在$[0,1]$上关于相同的 λ 是中间点凸函数。

2) 任取 $x,y\in K$，设 $\varphi_{x,y}(\alpha)=f(y+\alpha\eta(x,y))$在$[0,1]$上关于同一个 $\lambda\in(0,1)$是中间点凸函数，即有：

$$\varphi_{x,y}(\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2)\leqslant\lambda\varphi_{x,y}(\alpha_1)+(1-\lambda)\varphi_{x,y}(\alpha_2),\ \forall\alpha_1,\alpha_2\in[0,1]。$$

特别地，对于 $\alpha_1=1,\alpha_2=0$，结合条件 D 得：

$$f(y+\lambda\eta(x,y))=\varphi_{x,y}(\lambda)=\varphi_{x,y}(\lambda\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 0)\leqslant\lambda\varphi_{x,y}(1)+(1-\lambda)\varphi_{x,y}(0)=$$
$$\lambda f(y+\eta(x,y))+(1-\lambda)f(y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)。\tag{12}$$

注意到(12)式对任意的 x,y 成立，故 f 在 K 上关于相同的 η 和 λ 是中间点预不变凸的。 证毕

推论 5 设 K 是关于 η 的不变凸集，$f:K\to\mathbf{R}$ 是一个实值函数。如果 η 满足条件 C_1，f 在 K 上关于 η 满足条件 D，则 f 在 K 上关于 η 和 λ 是中间点预不变凸(中间点预拟不变凸)函数等价于 $\forall x,y\in K$，$\varphi_{x,y}(\alpha)=f(y+\alpha\eta(x,y))$ 在$[0,1]$上关于相同的 λ 是中间点凸(中间点拟凸)函数，其中 $\lambda\in(0,1)$。

注 1 定理 5 和推论 5 中提及的“关于相同的 λ”表示两层含义：一方面当 f 关于 λ 具有中间点凸性时，$\varphi_{x,y}(\alpha)$也关于这个 λ 具有中间点凸性；另一方面表示 λ 与 x,y 无关，即无论 x,y 在 K 中如何变化，对应的 $\varphi_{x,y}(\alpha)$都是关于同一个 λ 具有中间点凸性。本节余下的定理与推论中所提及的“关于相同的 λ”也是这个含义，就不再赘述。

对比定理 1 和定理 5 的证明可以发现，区别主要在于前者是“任意的 $\lambda\in[0,1]$”，后者是“对给定的某个 $\lambda\in(0,1)$”，以及预不变凸和中间点预不变凸两个定义在表述上的不同，其余部分是相似的。所以，对于中间点严格预(拟)不变凸函数和中间点半严格预(拟)不变凸函数情形只罗列结论而略去证明。

定理 6 设 K 是关于 η 的不变凸集，$f:K\to\mathbf{R}$ 是一个实值函数，则：

1) 设 η 满足条件 C_1，对任意的 $x,y\in K$，当 $x\neq y$ 时 $\eta(x,y)\neq 0$。若 f 在 K 上关于 η 和 $\lambda\in(0,1)$是中间点严格预不变凸(中间点严格预拟不变凸)函数，则 $\forall x,y\in K:x\neq y$，$\varphi_{x,y}(\alpha)=f(y+\alpha\eta(x,y))$在$[0,1]$上关于相同的 λ 是中间点严格凸(中间点严格拟凸)函数。

2) 设 f 在 K 上关于 η 满足条件 D，若 $\forall x,y\in K:x\neq y$，$\varphi_{x,y}(\alpha)=f(y+\alpha\eta(x,y))$在$[0,1]$上关于同一个 $\lambda\in(0,1)$是中间点严格凸(中间点严格拟凸)函数，则 f 在 K 上关于相同的 η 和 λ 是中间点严格预不变凸(中间点严格预拟不变凸)函数。

推论 6 设 K 是关于 η 的不变凸集，$f:K\to\mathbf{R}$ 是一个实值函数。如果 η 满足条件 C_1，f 在 K 上关于 η 满足条件 D，且对任意的 $x,y\in K$，当 $x\neq y$ 时 $\eta(x,y)\neq 0$。则 f 在 K 上关于 η 和 λ 是中间点严格预不变凸(中间点严格预拟不变凸)函数等价于 $\forall x,y\in K:x\neq y$，$\varphi_{x,y}(\alpha)=f(y+\alpha\eta(x,y))$在$[0,1]$上关于相同的 λ 是中间点严格凸(中间点严格拟凸)函数，其中 $\lambda\in(0,1)$。

定理 7 设 K 是关于 η 的不变凸集，$f:K\to\mathbf{R}$ 是一个实值函数，则：

1) 设 η 满足条件 C_1，若 f 在 K 上关于 η 和 $\lambda\in(0,1)$是中间点半严格预不变凸(中间点半严格预拟不变凸)函数，则 $\forall x,y\in K$，$\varphi_{x,y}(\alpha)=f(y+\alpha\eta(x,y))$在$[0,1]$上关于相同的 λ 是中间点半严格凸(中间点半严格拟凸)函数。

2) 设 f 在 K 上关于 η 满足条件 D 及条件 A′，若 $\forall x,y\in K:f(x)\neq f(y)$，$\varphi_{x,y}(\alpha)=f(y+\alpha\eta(x,y))$在$[0,1]$上关于同一个 $\lambda\in(0,1)$是中间点半严格凸(中间点半严格拟凸)函数，则 f 在 K 上关于相同的 η 和 λ 是中间点半严格预不变凸(中间点半严格预拟不变凸)函数。

推论 7 设 K 是关于 η 的不变凸集，$f:K\to\mathbf{R}$ 是一个实值函数。如果 η 满足条件 C_1，f 在 K 上关于 η 满足条件 D 及条件 A′，则 f 在 K 上关于 η 和 λ 是中间点半严格预不变凸(中间点半严格预拟不变凸)函数等价于

$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K:f(\boldsymbol{x})\neq f(\boldsymbol{y})$，$\varphi_{x,y}(\alpha)=f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},v))$在$[0,1]$上关于相同的$\lambda$是中间点半严格凸(中间点半严格拟凸)函数，其中$\lambda\in(0,1)$。

4 一些应用

由前几节的研究结论可知，在一定条件下多元实值函数f的预(拟)不变凸性可以转化为单变量实值函数φ的(拟)凸性。这样就可以利用(拟)凸函数已有的丰富结论将问题转化，已期望简化一些证明或者获得预(拟)不变凸函数的更多结论。这也是本节的主要目的。

引理1[20]　设I为$\mathbf{R}$中的一个区间，$h:I\to\mathbf{R}$为凸函数，$[a,b]\subseteq I$，则：

1) $h(\mu)\leqslant\dfrac{b-\mu}{b-a}f(a)+\dfrac{\mu-a}{b-a}h(b)$，$\forall\mu\in[a,b]$；

2) $\dfrac{h(\mu)-h(a)}{\mu-a}\leqslant\dfrac{h(b)-h(a)}{b-a}\leqslant\dfrac{h(b)-h(\mu)}{b-\mu}$，$\forall\mu\in(a,b)$。

若f为严格凸函数，则以上不等式均为严格不等式。

文献[13]的定理6.1给出了预不变凸函数的一个性质(一种差商不减性质)，这里利用本文得到的结论再结合引理1给出这个定理的另一个证明。

定理8[13]　设$K\subseteq\mathbf{R}^n$是关于η的不变凸集，$f:K\to\mathbf{R}$在K上关于η是预不变凸函数，假设η满足条件C。$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，令$g(\lambda)=f(\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$，$\forall\lambda\in[0,1]$。则有：

$$\frac{g(\alpha)-g(0)}{\alpha}\leqslant\frac{g(\beta)-g(0)}{\beta},0<\alpha<\beta\leqslant1。\tag{13}$$

证明　因为f是预不变凸函数，由定理1的1)知，$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，$g(\lambda)=f(\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$是$[0,1]$上的凸函数。设$0<\alpha<\beta\leqslant1$。在引理1中取$I=[0,1]$，$a=0$，$b=\beta$，$\mu=\alpha$，则满足$[a,b]\subseteq I$及$\mu\in(a,b)$。再将引理1的2)对函数$g(\lambda)$使用即可得到(13)式。　证毕

中间点凸性在凸性理论中有一定的价值，例如文献[11,13-16,18-19,21-22]等就利用中间点预(拟)不变凸性获得了预(拟)不变凸性。下面利用本文已经获得的中间点预(拟)不变凸性的刻画结论，给出文献[21]的一些结论的新证明。首先，需要一些结论来辅助证明。

命题3[23]　设$K\subseteq\mathbf{R}^n$是非空凸集，$f:K\to\mathbf{R}$是下半连续函数。如果f在K上是中间点凸函数，即$\exists\alpha\in(0,1)$，$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，s.t.

$$f(\alpha\boldsymbol{x}+(1-\alpha)\boldsymbol{y})\leqslant\alpha f(\boldsymbol{x})+(1-\alpha)f(\boldsymbol{y}),\tag{14}$$

则f是K上的凸函数。

命题4[24]　设$K\subseteq\mathbf{R}^n$是非空凸集，则$f:K\to\mathbf{R}$是凸函数当且仅当f在K上是拟凸函数且f在K上是中间点凸函数，即$\exists\alpha\in(0,1)$，$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，s.t.(14)式成立。

下面，给出文献[21]中的一些结论的新证明。这里仅讨论两个定理，其余结论可以类似地处理，就不再一一罗列。注意，原本文献[21]的定理4.1的内容表述里没有“条件D”的，然而从它的证明可以看出实际上需要“条件D”作为假设条件，故本文将它补上。

定理9[21]　设$K\subseteq\mathbf{R}^n$是关于η的不变凸集，$f:K\to\mathbf{R}$是下半连续函数。设η满足条件C，f在K上关于η满足条件D。则f在K上是预不变凸函数当且仅当f在K上是中间点预不变凸函数，即$\exists\lambda\in(0,1)$，$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，s.t.

$$f(\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\leqslant\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y})。\tag{15}$$

证明　只需证明充分性。由于f在K上是中间点预不变凸函数，且η满足条件C以及f满足条件D，则由推论5得$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，$\varphi_{x,y}(\alpha)=f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$在$[0,1]$上关于相同的$\lambda$是中间点凸函数。因为$f$是下半连续函数，再由命题3得$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，$\varphi_{x,y}(\alpha)=f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$在$[0,1]$上是凸函数。从而，由推论1得$f$在$K$上是预不变凸函数。　证毕

定理10[21]　设$K\subseteq\mathbf{R}^n$是关于η的不变凸集，$f:K\to\mathbf{R}$是一个实值函数。设η满足条件C，f在K上关于η满足条件D。则f在K上是预不变凸函数当且仅当f在K上是预拟不变凸函数且f在K上是中间点预不变凸

函数，即 $\exists\lambda\in(0,1)$，$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，s. t. (15)式成立。

证明　只需证明充分性。由于 f 在 K 上是中间点预不变凸函数，且 η 满足条件 C 以及 f 满足条件 D，则由推论 5 得，$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，$\varphi_{x,y}(\alpha)=f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$ 在 $[0,1]$ 上关于相同的 λ 是中间点凸函数。又因为 f 在 K 上是预拟不变凸函数，则由推论 1 得，$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，$\varphi_{x,y}(\alpha)=f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$ 在 $[0,1]$ 上是拟凸函数。从而，由命题 4 得 $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，$\varphi_{x,y}(\alpha)=f(\boldsymbol{y}+\alpha\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$ 在 $[0,1]$ 上是凸函数。再由推论 1 得 f 在 K 上是预不变凸函数。　证毕

5 结语

本文将多元实值函数的凸性转化为单变量实值函数的凸性来研究，获得了预(拟)不变凸性的一些等价刻画，特别获得了严格、半严格预(拟)不变凸函数以及中间点预(拟)不变凸性的刻画。并且本文还将刻画结论中的条件 C 减弱到了条件 C_1。如何充分应用这些等价结论去研究预(拟)不变凸性，将是值得进一步研究的问题。

参考文献：

[1] HANSON M A. On sufficiency of the Kuhn-Tucher conditions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1981，80：545-550.

[2] CRAVEN B D. Invex functions and constrained local minima[J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society，1981，24：357-366.

[3] KAUL R N，KAUR S. Optimality criteria in nonlinear programming involving nonconvex functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1985，105(1)：104-112.

[4] BEN-ISRAEL A，MOND B. What is invexity? [J]. Journal of the Australian Mathematical Society，Series B，1986，28：1-9.

[5] WEIR T，MOND B. Pre-invex functions in multiple objective optimization[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1988，136(1)：29-38..

[6] PINI R. Invexity and generalized convexity[J]. Optimization，1991，22(4)：513-525.

[7] MOHAN S R，NEOGY S K. On invex sets and preinvex functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1995，189：901-908.

[8] AVRIEL M，DIEWERT W E，Schaible S，etc. Generalized concavity[M]. New York：Plenum Press，1988.

[9] 赵克全. r-预不变凸函数的一个充分条件[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2006，23(1)：1-4.
ZHAO K Q. A sufficient condition of r-preinvex functions [J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)，2006，23(1)：1-4.

[10] 赵克全. 预不变凸函数的一个等价条件[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2010，27(3)：6-8.
ZHAO K Q. An equivalent condition of preinvex function [J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)，2010，27(3)：6-8.

[11] 唐万梅. 强预不变凸函数的性质[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2006，23(2)：8-12.
TANG W M. The properties of strong preinvex functions [J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)，2006，23(2)：8-12.

[12] ZHAO K Q，LIU X W，CHEN Z. On characterizations of prequasiinvex functions[J]. Journal of Southwest University，2010，32(7)：30-33.

[13] YANG X M，LI D. Semistrictly preinvex functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2001，258(1)：287-308.

[14] 颜丽佳，刘芙萍. 强预不变凸函数[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2005，22(1)：11-15.
YAN L J，LIU F P. Strongly preinvex functions[J]. Journal of Chongqing Normal University(Natural Science)，2005，22(1)：11-15.

[15] YANG X M，YANG X Q，TEO K L. Characterizations and applications of prequasi-invex functions[J]. Journal of Optimization Theory and Applications，2001，110(3)：645-668.

[16] TANG W M，LIU Q，YANG X M. The sufficiency and necessity conditions of strongly prequasi-invex functions[J]. OR Transactions，2007，11(3)：21-30.

[17] VIAL J P. Strong and weak convexity of sets and functions[J]. Mathematics of Operations Research，1983，8(2)：231-259.

[18] YANG X M. A note on preinvexity[J]. Journal of Industrial and Management Optimization，2014，10(4)：1319-1321.

[19] 杨新民，戎卫东. 广义凸性及其应用[M]. 北京：科学出版社，2016.
YANG X M，RONG W D. Generalized convexity and its application[M]. Beijing：Science Press，2016.

[20] 寇述舜. 凸分析与凸二次规划[M]. 天津：天津大学出版社，1994.
KOU S X. Convex analysis and convex quadratic programming[M]. Tianjin：Tianjin University Press，1994.

[21] YANG X M, LI D. On properties of preinvex functions [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 256(1): 229-241.

[22] LUO H Z, WU H X. On the characterization of preinvex functions[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2008, 138(2): 297-304.

[23] YANG X M. Convexity of semi-continuous functions[J]. Opsearch, 1994, 31(4): 309-317.

[24] YANG X M, TEO K L, YANG X Q. A characterization of convex function[J]. Applied Mathematics Letters, 2000, 13(1): 27-30.

Operations Research and Cybernetics

Some Equivalent Characterizations and Its Applications of Preinvexity (Prequasi-invexity)

YANG Yuhong

(School of Mathematics and Statistics, Yangtze Normal University, Fuling Chongqing 408100, China)

Abstract: [**Purposes**]The purpose is to provide some equivalent characterizations of preinvexity (prequasi-invexity). [**Methods**]Preinvexity (prequasi-invexity) is dealed with by transforming multivariate real valued function f to single-variable function φ. [**Findings**] Firstly, when condition C_1 and condition D hold, preinvexity (prequasi-invexity) of f is equivalent to convexity (quasiconvexity) of φ. Secondly, in a similar way, equivalent characterizations of intermediate preinvexity (prequasi-invexity) are established. Finally, some applications of these results are given. [**Conclusions**]Preinvexity (prequasi-invexity) of f can be transformed equivalently into convexity (quasiconvexity) of φ. However, there are some difference in ρ-preinvex (ρ-prequasi-invex) case, i. e. ρ-convexity(ρ-quasiconvexity) of φ is correspond to weak ρ-preinvexity (ρ-prequasi-invexity) of f.

Keywords: preinvex (prequasi-invex); intermediate preinvex (prequasi-invex); convex (quasiconvex)

（责任编辑　黄　颖）