DOI:10.11721/cqnuj20180411

Banach 空间中强伪压缩映射 Ishikawa 迭代的强收敛定理*

罗 萍
(重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331)

摘要:【目的】为了研究 Banach 空间中强伪压缩映射具有误差的 Ishikawa 迭代过程：$x_{n+1}=(1-\alpha_n-\mu_n)x_n+\alpha_n Ty_n+\mu_n u_n$，$y_n=(1-\beta_n-\eta_n)x_n+\beta_n Tx_n+\eta_n v_n$，$n\geqslant 0$，并进行推广。【方法】运用 Banach 空间中的基本等式和不等式，得到本文所需要的不等式。【结果】证明了由带误差的 Ishikawa 迭代过程构建的迭代序列强收敛到强伪压缩映射的不动点。【结论】所得主要结果推广了已有成果，且应用范围更广。

关键词:强收敛；带误差的 Ishikawa 迭代过程；强伪压缩映射；不动点
中图分类号:O177　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2018)04-0067-03

1 预备知识

本文用 X 和 X^* 记实 Banach 空间和它的对偶空间。C 为 X 的子集，T 为 C 上的自映射，用 $F(T)$ 记 T 的不动点集。对偶映射 $J:X\to 2^{X^*}$ 定义为 $J(x)=\{x^*\in X^*:\langle x,x^*\rangle=\|x\|^2,\|x^*\|=\|x\|\}$，$\forall x\in X$。若 X 为 Hilbert 空间，则 $J=I$，这里 I 为恒等映射。$T:D(T)\subset X\to X$ 称为强伪压缩的，若存在 $j(x-y)\in J(x-y)$ 和 $k\in(0,1)$ 使得 $\langle Tx-Ty,j(x-y)\rangle\leqslant k\|x-y\|^2$，$\forall x,y\in D(T)$，其中 $D(T)$ 为 T 的定义域。$T:X\to X$ 称为强增生的，若存在 $j(x-y)\in J(x-y)$ 和 $k\in(0,1)$ 使得 $\langle Tx-Ty,j(x-y)\rangle\geqslant k\|x-y\|^2$，$\forall x,y\in X$。

最近，关于强伪压缩映射的不动点逼近问题受到了极大关注[1-9]。例如，Zhang[1] 在 Banach 空间上研究了关于强伪压缩映射的 Ishikawa 迭代过程，证明了如下定理。

定理 1[1]　设 X 为实 Banach 空间，D 为 X 中非空凸子集，$T:D\to D$ 为连续的强伪压缩映射，其中参数 $k\in(0,1)$。任取 $x_0\in D$，定义序列 $\{x_n\}$：$\begin{cases}x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n Ty_n\\ y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n Tx_n\end{cases}$，$n\geqslant 0$。这里 $\alpha_n,\beta_n\in[0,1]$，$a,\tau\in(0,1-k)$ 满足 $0<a\leqslant\alpha_n<1-k-\tau$，$n\geqslant 0$。

如果当 $n\to\infty$ 时，有 $\|Tx_{n+1}-Ty_n\|\to 0$，于是 $\{x_n\}$ 强收敛到 T 的唯一不动点；进一步有：

$$\|x_n-x^*\|\leqslant\sqrt{(1-a\tau)^n\|x_n-x^*\|^2+\frac{(1-(1-a\tau)^n)M}{a\tau}},n\geqslant 0。$$

这里 $M=\sup\left\{\frac{1}{k^2}\|Ty_n-Tx_{n+1}\|^2,n\geqslant 0\right\}$。

受上述事实启发，本文在 Banach 空间上引进强伪压缩映射的带误差的 Ishikawa 迭代过程并得到了强收敛定理，所得结果推广了 Zhang[1]，Soltuz[2] 和 Ćirić[3] 结果。

为了证明主要结果，需要下述引理。

引理 1[10]　设 $T:X\to X$ 为强增生算子，任给 $f\in X$，定义映射 $S:X\to X$ 为 $Sx=f-Tx+x$，则 S 为强伪压缩映射，即任给 $x,y\in X$，有 $\langle Sx-Sy,j(x-y)\rangle\leqslant(1-k)\|x-y\|^2$，这里 $k\in(0,1)$。

引理 2[11]　设 $\{a_n\}$ 为非负实数列，满足 $a_{n+1}\leqslant(1-\alpha_n)a_n+\delta_n$，$n\geqslant 0$，这里 $\{\alpha_n\}$ 为 $(0,1)$ 中序列且 $\{\delta_n\}$ 为实数列，满足：(i) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$；(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\frac{\delta_n}{\alpha_n}\leqslant 0$ 或 $\sum_{n=0}^{\infty}|\delta_n|<\infty$。则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

---

* **收稿日期:**2018-02-13　**修回日期:**2018-04-25　**网络出版时间:**2018-07-26 16:50
资助项目:国家自然科学基金数学天元基金(No. 11626050)；重庆市研究生重点教改项目(No. yjg20162006)；重庆师范大学名师培育计划(No. 02030307－00047)；重庆市教委重点教改项目(No. 1722011)
第一作者简介:罗萍，女，副教授，研究方向为几何与分析，E-mail:20130306@cqnu.edu.cn
网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20180726.1650.022.html

2 主要结果

定理2 设 C 为实 Banach 空间 X 中非空凸子集，$T:C\to C$ 为连续的强伪压缩映射，参数 $k\in(0,1)$，$\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 为 C 中有界序列。任取 $x_0\in C$，定义 $\{x_n\}$ 如下：

$$\begin{cases}x_{n+1}=(1-\alpha_n-\mu_n)x_n+\alpha_n Ty_n+\mu_n u_n\\ y_n=(1-\beta_n-\eta_n)x_n+\beta_n Tx_n+\eta_n v_n\end{cases},n\geqslant 0。\tag{1}$$

这里 $\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$，$\{\mu_n\}$ 和 $\{\eta_n\}$ 为 $[0,1]$ 中序列，满足 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$，$\lim_{n\to\infty}\frac{\mu_n}{\alpha_n}=0$。若 $\lim_{n\to\infty}\|Tx_{n+1}-Ty_n\|=0$，则 $\{x_n\}$ 强收敛到 T 在 C 中的不动点。

证明 T 的不动点存在性证明见文献[12]，由 T 的定义知 T 的不动点是唯一的，设 x^* 为 T 的唯一不动点。

首先证明 $\{x_n\}$ 有界。令 $M_1=\sup_{n\geqslant 0}\|Tx_{n+1}-Ty_n\|$，$M_2=\sup_{n\geqslant 0}\|u_n-x^*\|$，观察：

$$\begin{gathered}\|x_{n+1}-x^*\|^2=(1-\alpha_n-\mu_n)\langle x_n-x^*,j(x_{n+1}-x^*)\rangle+\alpha_n\langle Ty_n-Tx_{n+1},j(x_{n+1}-x^*)\rangle+\\ \alpha_n\langle Tx_{n+1}-x^*,j(x_{n+1}-x^*)\rangle+\mu_n\langle u_n-x^*,j(x_{n+1}-x^*)\rangle\leqslant(1-\alpha_n-\mu_n)\|x_n-x^*\|\|x_{n+1}-x^*\|+\\ \alpha_n\|Ty_n-Tx_{n+1}\|\|x_{n+1}-x^*\|+\alpha_n k\|x_{n+1}-x^*\|^2+\mu_n\|u_n-x^*\|\|x_{n+1}-x^*\|\leqslant\\ (1-\alpha_n-\mu_n)\|x_n-x^*\|\|x_{n+1}-x^*\|+\alpha_n M_1\|x_{n+1}-x^*\|+\alpha_n k\|x_{n+1}-x^*\|^2+\mu_n M_2\|x_{n+1}-x^*\|。\end{gathered}\tag{2}$$

于是有

$$\begin{gathered}\|x_{n+1}-x^*\|\leqslant\frac{1-\alpha_n-\mu_n}{1-\alpha_n k}\|x_n-x^*\|+\frac{\alpha_n}{1-\alpha_n k}M_1+\frac{\mu_n}{1-\alpha_n k}M_2=\\ \frac{1-\alpha_n-\mu_n}{1-\alpha_n k}\|x_n-x^*\|+\frac{\alpha_n(1-k)}{1-\alpha_n k}\frac{M_1}{(1-k)}+\frac{\mu_n}{1-\alpha_n k}M_2\leqslant\max\left\{\|x_0-x^*\|,\frac{M_1}{1-k},M_2\right\}。\end{gathered}$$

从而 $\{x_n\}$ 有界。

下面证明 $\lim_{n\to\infty}x_n=x^*$。设 $M_3=\sup_{n\geqslant 0}\|x_{n+1}-x^*\|$，由(2)式知：

$$\begin{gathered}\|x_{n+1}-x^*\|^2\leqslant(1-\alpha_n-\mu_n)\|x_n-x^*\|\|x_{n+1}-x^*\|+\alpha_n\|Ty_n-Tx_{n+1}\|\|x_{n+1}-x^*\|+\alpha_n k\|x_{n+1}-x^*\|^2+\\ \mu_n\|u_n-x^*\|\|x_{n+1}-x^*\|\leqslant\frac{1-\alpha_n-\mu_n}{2}(\|x_n-x^*\|^2+\|x_{n+1}-x^*\|^2)+\alpha_n\|Ty_n-Tx_{n+1}\|M_3+\alpha_n k\|x_{n+1}-x^*\|^2+\\ \mu_n M_2M_3\leqslant\frac{1-\alpha_n}{2}(\|x_n-x^*\|^2+\|x_{n+1}-x^*\|^2)+\alpha_n\|Ty_n-Tx_{n+1}\|M_3+\alpha_n k\|x_{n+1}-x^*\|^2+\mu_n M_2M_3。\end{gathered}$$

于是

$$\begin{gathered}\|x_{n+1}-x^*\|^2\leqslant\frac{1-\alpha_n}{1+(1-2k)\alpha_n}\|x_n-x^*\|^2+\frac{2\alpha_n}{1+(1-2k)\alpha_n}\|Ty_n-Tx_{n+1}\|M_3+\frac{2\mu_n}{1+(1-2k)\alpha_n}M_2M_3=\\ \left[1-\frac{2(1-k)\alpha_n}{1+(1-2k)\alpha_n}\right]\|x_n-x^*\|^2+\frac{2(1-k)\alpha_n}{1+(1-2k)\alpha_n}\left(\frac{\|Ty_n-Tx_{n+1}\|M_3}{1-k}+\frac{\mu_n}{\alpha_n}\frac{M_2M_3}{1-k}\right)。\end{gathered}\tag{3}$$

下面分两种情况讨论参数 $\frac{2(1-k)\alpha_n}{1+(1-2k)\alpha_n}$。

情形1，若 $0<k\leqslant\frac{1}{2}$，注意 $\alpha_n\leqslant 1$，则 $1+(1-2k)\alpha_n\leqslant 2(1-k)$。于是 $\frac{2(1-k)\alpha_n}{1+(1-2k)\alpha_n}\geqslant\alpha_n$。

情形2，若 $\frac{1}{2}<k<1$，因为 $\alpha_n\geqslant 0$，则 $1+(1-2k)\alpha_n\leqslant 1$。于是 $\frac{2(1-k)\alpha_n}{1+(1-2k)\alpha_n}\geqslant 2(1-k)\alpha_n$。

根据 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$ 知情形1和情形2都得到 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(1-k)\alpha_n}{1+(1-2k)\alpha_n}=\infty$。

另外一方面，注意 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\|Ty_n-Tx_{n+1}\|M_3}{1-k}+\frac{\mu_n}{\alpha_n}\frac{M_2M_3}{1-k}\right)=0$。由(3)式及引理1可知 $\{x_n\}$ 强收敛 x^*。 证毕

注1 定理2对文献[1]中定理1作了如下推广：

(i) 条件 $0<a\leqslant\alpha_n<1-k-\tau$ 减弱为 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$。例如，设 $\alpha_n=\frac{1}{n}$，$\mu_n=\frac{1}{n^2}$，则 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$，$\lim_{n\to\infty}\frac{\mu_n}{\alpha_n}=0$。但是 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$，因此 $0<a\leqslant\alpha_n<1-k-\tau$ 不成立。

(ii) 本文中带误差的 Ishikawa 迭代过程(1)为文献[1]中 Ishikawa 迭代过程(1)的推广。

(iii) 本文证明方法相对于文献[1]中的证明更简单。

定理 3 设 X 为实 Banach 空间，$S:X\to X$ 为连续的强增生算子，参数 $k\in(0,1)$，$\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 为 X 中有界序列。任给 $f\in X$，定义映射 $T:X\to X$ 为 $Tx=f-Sx+x$，$\forall x\in X$。任取 $x_0\in C$，定义 $\{x_n\}$ 如下：

$$\begin{cases}x_{n+1}=(1-\alpha_n-\mu_n)x_n+\alpha_n Ty_n+\mu_n u_n\\ y_n=(1-\beta_n-\eta_n)x_n+\beta_n Tx_n+\eta_n v_n\end{cases},n\geqslant 0。$$

这里 $\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$，$\{\mu_n\}$ 和 $\{\eta_n\}$ 为 $[0,1]$ 中序列，满足 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$，$\lim_{n\to\infty}\frac{\mu_n}{\alpha_n}=0$。若 $\lim_{n\to\infty}\|Tx_{n+1}-Ty_n\|=0$，则 $\{x_n\}$ 强收敛到方程 $Sx=f$ 的唯一解。

证明 显然，若 $x^*\in X$ 为方程 $Sx=f$ 的解，则 x^* 为 T 的不动点。根据引理 1 知 T 是连续强伪压缩映射，参数为 $1-k$。于是由定理 2 知结论成立。 证毕

定理 4 设 C 为实 Banach 空间 X 中非空凸子集，$T:C\to C$ 为连续的强伪压缩映射，参数 $k\in(0,1)$，任取 $x_0\in C$，定义 $\{x_n\}$：$\begin{cases}x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n Ty_n\\ y_n=(1-\beta_n-\eta_n)x_n+\beta_n Tx_n\end{cases}$，$n\geqslant 0$。这里 $\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$ 为 $[0,1]$ 中序列，满足 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$。若 $\lim_{n\to\infty}\|Tx_{n+1}-Ty_n\|=0$，则 $\{x_n\}$ 强收敛到 T 在 C 中的唯一不动点。

证明 令 $\mu_n=\eta_n=0$，则由定理 2 知结论成立。 证毕

参考文献：

[1] ZHANG S Y. Convergence of Ishikawa iterative sequence for strongly pseudo-contractive operators in arbitrary Banach spaces[J]. Math Commun, 2010, 15: 223-228.

[2] SOLTUZ S M. A correction for a result on convergence of Ishikawa iteration for strongly pseudo-contractive maps [J]. Math Commun, 2002, 7: 61-64.

[3] CIRIC L J B. Ishikawa iterative process for strongly pseudo contractive operators in arbitrary Banach spaces[J]. Math Commun, 2003, 8: 43-48.

[4] ZHOU H Y, JIA Y. Approximation of fixed points of strongly pseudo-contractive maps without Lipschitz assumption[J]. Proc Amer Math Soc, 1997, 125: 1705-1709.

[5] ISHIKAWA S. Fixed points by a new iteration method[J]. Proc Amer Math Soc, 1974, 44: 147-150.

[6] LIU L W. Approximation of fixed points of a strictly pseudo-contractive mapping[J]. Proc Amer Math Soc, 1997, 125: 1363-1366.

[7] SASTRY K P R, BABU G V R. Approximation of fixed points of a strictly pseudo-contractive mappings on arbitrary closed, convex sets in a Banach space[J]. Proc Amer Math Soc, 2000, 128: 2907-2909.

[8] HU L G, WANG J P. Mann iteration of weak convergence theorems in Banach space[J]. Acta Math Appl Sinica (English Series), 2009, 25: 217-224.

[9] HU L G. An implicit iteration process with errors for a finite family of r-strictly asymptotically pseudo-contractive mappings[J]. Acta Math Appl Sinica (English Series), 2007, 23: 281-288.

[10] CHANG S S, CHO Y J, LEE B S, et al. Iterative approximations of fixed points and solutions for strongly accretive and strongly pseudo-contractive mappings in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 198, 224: 149-165.

[11] XU H K. Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings[J]. J Math Anal Appl, 2004, 298: 279-291.

[12] DEIMLING K. Zeroes of accretive operators[J]. Manuscripta Math, 1974, 13: 365-374.

Strong Convergence Theorem of an Ishikawa Iterative Process for a Strongly Pseudo-Contractive Mapping in Banach Spaces

LUO Ping

(School of Mathematics Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [**Purposes**]To study an Ishikawa iterative process with errors for a strongly pseudo-contractive mapping in Banach space: $x_{n+1}=(1-\alpha_n-\mu_n)x_n+\alpha_n Ty_n+\mu_n u_n$, $y_n=(1-\beta_n-\eta_n)x_n+\beta_n Tx_n+\eta_n v_n$, $n\geqslant 0$, then extend the results. [**Methods**]Inequality required by Lemma 1.3 is obtained by applying some basic equality and inequality in Banach spaces. [**Findings**]It's proved that the iterative sequence defined by Ishikawa iterative process with errors converges to the fixed point of the strongly pseudo-contractive mapping. [**Conclusions**]The results obtained extend and improve some known results, and can be applied to more areas.

Keywords: strong convergence; Ishikawa iterative process with errors; strongly pseudo-contractive mapping; fixed point

（责任编辑 黄 颖）