DOI:10.11721/cqnuj20180412

乘积空间动力性质的研究*

周 双，金渝光
(重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331)

摘要:【目的】研究($X\times Y,f\times g$)和(X,f)及(Y,g)之间动力性质的关系。【方法】将个体空间的动力性质推广到乘积空间。【结果】1) $EP(f\times g)=EP(f)\times EP(g)$,其中$EP(f)$表示$f$的所有终于周期点的集合,$EP(g)$表示$g$的所有终于周期点的集合;2) $f\times g$为可扩的充分必要条件是f与g分别为可扩的;3) 若环面连续自映射可以分解成两个圆周连续自映射,则$f_1\times f_2$具有拓扑稳定性的充分必要条件是f_1与f_2分别具有拓扑稳定性;4) 若$f\times g$为极小的,则f与g分别为极小的。【结论】乘积空间与个体空间在终于周期点集、拓扑可扩上是等价的,其中在一定特殊条件下拓扑稳定性是等价的,但在拓扑极小和拓扑传递的性质上却是不等价的。

关键词:终于周期点;拓扑可扩;拓扑稳定性
中图分类号:O189.1　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2018)04-0070-04

乘积空间动力性质的研究是拓扑动力系统的重要研究内容,对实际问题的研究也具有重要意义。例如在自然界中,人类利用乘积空间的自映射来考察每种昆虫繁衍的整体规律性[1]。目前,对于这类问题已经有较多研究结果。如:杨润生[2]的拓扑遍历与拓扑双重遍历;黎日松[3]研究得出的一些动力性质间的关系;史国民[4]的关于乘积空间的一些注记;索宇等人[5]的拓扑空间中 Devaney 混沌的乘积性质;周楠等人[6]的周期点、非游荡点在乘积系统中的保持性;冀占江[7]的关于乘积空间与拓扑群作用下逆极限空间的动力学性质;任蕴丽等人[8]的两个符号半动力系统的乘积系统的动力学性质等等。本文在此基础上,进一步研究了乘积空间与个体空间动力性质之间的关系,并得到一些有意义的结论。

1 预备知识

下面的概念来源于文献[9-10]。

设(X,d_1)和(Y,d_2)都是紧致度量空间,f,g分别是空间X,Y上的连续自映射,乘积空间$X\times Y$上的连续自映射$(f\times g)(x,y)=(f(x),g(y))(x\in X,y\in Y)$,其中乘积空间的度量为

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\max\{d_1(x_1,x_2),d_2(y_1,y_2)\},$$

其中$x_1,x_2\in X,y_1,y_2\in Y$。

定义 1 设$x\in X$,若存在正整数n使得$f^n(x)=x$,则称x为f的周期点。f的所有周期点的集合称为f的周期点集,记为$P(f)$。

定义 2 设$x\in X$,若$\exists k\in\mathbf{Z}^+$,使$f^k(x)\in P(f)$时,则称x为f的终于周期点。f的所有终于周期点的集合称为f的终于周期点集,记为$EP(f)$。

定义 3 若存在$c>0$满足$x\neq y$,使得存在$n\in\mathbf{Z}$满足$d(f^n(x),f^n(y))>c$,则称同胚f为可扩的,c成为f的可扩常数。

定义 4 设$f:X\to X$是紧致度量空间上的一个同胚,若$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,对于$g:X\to X$是任意一个同胚且$\tilde{d}(f,g)=\sup\{d(f(x),g(x)):x\in X\}<\delta$,使得存在连续映射$h:X\to X$满足$h\circ g=f\circ h$且$d(h(x),x)<\varepsilon(\forall x\in$

* **收稿日期:**2017-04-28　**修回日期:**2017-08-10　**网络出版时间:**2018-07-26 16:50
资助项目:国家自然科学基金面上项目(No.11471061);2013 年重庆高校创新团队建设计划(No.KJPB201308);重庆师范大学博士科研项目(No.17XLB001);重庆师范大学国家基金预研项目(No.16XYY21)
第一作者简介:周双,男,讲师,研究方向为拓扑动力系统,E-mail:zhoushuang@cqnu.edu.cn;**通信作者:**金渝光,男,教授,E-mail:tsgjyg@aliyun.com
网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20180726.1650.024.html

X)，则称 f 是拓扑稳定的。

定义 5　设(X,d)是度量空间，$f:X\to X$ 是一个同胚，设$\{x_i\}_{i\in\mathbf{Z}}$是 X 中的一个序列，若 $\forall i\in\mathbf{Z}$，$d(f(x_i),x_{i+1})<\delta$，则称$\{x_i\}_{i\in\mathbf{Z}}$是 f 的一个 δ 伪轨。

定义 6　设 $x\in X$，若 $d(f^i(x),x_i)<\varepsilon(\forall i\in\mathbf{Z})$，则称$\{x_i\}_{i\in\mathbf{Z}}$被 x-ε 跟踪。

定义 7　若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得 f 的任一 δ 伪轨都能被 X 中某点 ε 跟踪，则称 f 有伪轨跟踪性(Pseudo-orbit-tracing property)，简记 f 有 POTP。

定义 8　设(X,f)为紧致系统，若 $\forall x\in X$，对任意非空的开集 U，$\exists m\in\mathbf{N}$，有 $f^m(x)\in U$，则称 f 是极小的。

定义 9　设(X,f)为紧致系统，若 $\exists x\in X$，对任意非空的开集 U，$\exists m\in\mathbf{N}$，有 $f^m(x)\in U$，则称 f 为拓扑传递的。

2 结果

定理 1　$EP(f\times g)=EP(f)\times EP(g)$。

证明　显然 $EP(f\times g)\subset EP(f)\times EP(g)$。下面证 $EP(f\times g)\supset EP(f)\times EP(g)$。

$\forall(x,y)\in EP(f)\times EP(g)$，进而 $x\in EP(f)$，$y\in EP(g)$，$\exists k_1,k_2\in\mathbf{Z}^+$ 满足 $f^{k_1}(x)\in P(f)$，$g^{k_2}(y)\in P(g)$。

取 $l=k_1+k_2$，又因为 $f(P(f))\subset P(f)$，$g(P(g))\subset P(g)$，所以 $f^l(x)\in P(f)$，$g^l(y)\in P(g)$。即

$$(f\times g)^l(x,y)=(f^l(x),g^l(y))\in P(f)\times P(g)=P(f\times g),$$

进而$(x,y)\in EP(f\times g)$。由于(x,y)的任意性，可知 $EP(f\times g)\supset EP(f)\times EP(g)$。　　证毕

定理 2　$f\times g$ 为可扩的充分必要条件是 f 与 g 分别为可扩的。

证明　$(\Rightarrow)$：由 $f\times g$ 为可扩的，故 $\exists c>0$，$\forall(x_1,y_1)\neq(x_2,y_2)\in X\times Y$，$\exists n\in\mathbf{Z}$，满足

$$d((f\times g)^n(x_1,y_1),(f\times g)^n(x_2,y_2))=\max\{d_1(f^n(x_1),f^n(x_2)),d_2(g^n(y_1),g^n(y_2))\}>c,$$

因此当 $x_1\neq x_2\in X$，$y_1=y_2\in Y$ 时，则 $d_1(f^n(x_1),f^n(x_2))>c$，即 f 为可扩的；当 $x_1=x_2\in X$，$y_1\neq y_2\in Y$ 时，则 $d_2(g^n(y_1),g^n(y_2))>c$，即 g 为可扩的。

$(\Leftarrow)$：设 c_1,c_2 分别为 f 与 g 的可扩常数，不妨设 $c_1\geqslant c_2$。由于 f 与 g 为可扩的，故 $\forall x_1\neq x_2\in X$，$y_1\neq y_2\in Y$，$\exists n_1,n_2\in\mathbf{Z}$，满足 $d_1(f^{n_1}(x_1),f^{n_1}(x_2))>c_1$，$d_2(g^{n_2}(y_1),g^{n_2}(y_2))>c_2$。

1) 若 $x_1\neq x_2$，$y_1\neq y_2$，取 $c=c_2$，$n=n_1$，满足

$$d((f\times g)^n(x_1,y_1),(f\times g)^n(x_2,y_2))=\max\{d_1(f^{n_1}(x_1),f^{n_1}(x_2)),d_2(g^{n_1}(y_1),g^{n_1}(y_2))\}>$$
$$d_1(f^{n_1}(x_1),f^{n_1}(x_2))>c_1\geqslant c_2;$$

2) 若 $x_1=x_2$，$y_1\neq y_2$，取 $c=c_2$，$n=n_2$，满足

$$d((f\times g)^n(x_1,y_1),(f\times g)^n(x_2,y_2))=\max\{d_1(f^{n_2}(x_1),f^{n_2}(x_2)),d_2(g^{n_2}(y_1),g^{n_2}(y_2))\}>\max\{0,c_2\}=c_2;$$

3) 若 $x_1\neq x_2$，$y_1=y_2$，取 $c=c_2$，$n=n_1$，满足

$$d((f\times g)^n(x_1,y_1),(f\times g)^n(x_2,y_2))=\max\{d_1(f^{n_1}(x_1),f^{n_1}(x_2)),d_2(g^{n_1}(y_1),g^{n_1}(y_2))\}>\max\{c_1,0\}\geqslant c_2。$$

由以上知，$\exists c>0$，$\forall(x_1,y_1)\neq(x_2,y_2)\in X\times Y$，$\exists n\in\mathbf{Z}$，满足

$$d((f\times g)^n(x_1,y_1),(f\times g)^n(x_2,y_2))=\max\{d_1(f^n(x_1),f^n(x_2)),d_2(g^n(y_1),g^n(y_2))\}>c,$$

即 $f\times g$ 可扩。　　证毕

推论 1　$f\times g$ 为可扩的且 POTP 的充分必要条件是 f 与 g 分别为可扩的且 POTP。

证明　由定理 2 和文献[3]可以得出该推论。　　证毕

定理 3　若环面连续自映射可以分解成两个圆周连续自映射，任意同胚 $f_1\times f_2$：环 $T^2\to$环 T^2，其中 f_1 与 f_2 分别是从圆周 S 到圆周 S 的同胚，则 $f_1\times f_2$ 具有拓扑稳定性的充分必要条件是 f_1 与 f_2 分别具有拓扑稳定性。

证明　$(\Rightarrow)$：只需证对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1,\delta_2>0$，若$\tilde{d}(f_1,g_1)<\delta_1$，$\tilde{d}(f_2,g_2)<\delta_2$(其中 g_1 和 g_2 是从 S 到 S 的同胚，则 $\exists h_1,h_2:S\to S$ 的连续映射满足 $h_1\circ g_1=f_1\circ h_1$，$h_2\circ g_2=f_2\circ h_2$ 且 $d(h_1(x),x)<\varepsilon$，$d(h_2(x),x)<\varepsilon(\forall x\in S)$。

因为$\tilde{d}(f_1,g_1)<\delta_1$，$\tilde{d}(f_2,g_2)<\delta_2$(这里的 δ_1,δ_2 取 $f_1\times f_2$ 具有拓扑稳定性所使用的 δ)，所以

$$\tilde{d}(f_1\times f_2,g_1\times g_2)=\sup\{\max\{d(f_1(x_1),g_1(x_1)),d(f_2(x_2),g_2(x_2))\}:\forall x_1,x_2\in S\}<\delta。$$

由于 $f_1\times f_2$ 具有拓扑稳定性，故 $\exists h:T^2\to T^2$ 满足 $h\circ(g_1\times g_2)=(f_1\times f_2)\circ h$ 且 $d(h(x),x)<\varepsilon(\forall x\in T^2)$。

又由于 $h=h_1\times h_2$，进而 $(h_1\times h_2)\circ(g_1\times g_2)=(f_1\times f_2)\circ(h_1\times h_2)$，因此 $h_1\circ g_1=f_1\circ h_1$，$h_2\circ g_2=f_2\circ h_2$. 且 $d(h_1(x),x)<\varepsilon$，$d(h_2(x),x)<\varepsilon(\forall x\in S)$，即 f_1 与 f_2 分别具有拓扑稳定性。

($\Leftarrow$)：只需证对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，若 $\tilde{d}(f_1\times f_2,g)<\delta$(其中 g：$T^2\to T^2$ 是一个同胚)，则 $\exists h$：$T^2\to T^2$ 满足 $h\circ g=f_1\times f_2\circ h$ 且 $d(h(x),x)<\varepsilon(\forall x\in T^2)$。

因为 $\tilde{d}(f_1\times f_2,g)<\delta$(其中 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$)，所以

$$\tilde{d}(f_1\times f_2,g)=\tilde{d}(f_1\times f_2,g_1\times g_2)=\sup\{\max\{d(f_1(x_1),g_1(x_1)),d(f_2(x_2),g_2(x_2))\}:\forall x_1,x_2\in S\}<\delta,$$

(其中 $g=g_1\times g_2$)，进而 $\tilde{d}(f_1,g_1)<\delta\leqslant\delta_1$，$\tilde{d}(f_2,g_2)<\delta\leqslant\delta_2$。

由于 f_1，f_2 具有拓扑稳定性，故 $\exists h_1,h_2$：$S\to S$ 满足 $h_1\circ g_1=f_1\circ h_1$，$h_2\circ g_2=f_2\circ h_2$ 且 $d(h_1(x),x)<\varepsilon$，$d(h_2(x),x)<\varepsilon(\forall x\in S)$，进而 $\exists h=h_1\times h_2$：$T^2\to T^2$ 满足 $h\circ g=f_1\times f_2\circ h$ 且 $d(h(x),x)<\varepsilon$ $(\forall x\in T^2)$，即 $f_1\times f_2$ 具有拓扑稳定性。 证毕

注 此定理需要加特殊条件才能成立，例如一些环面非线性自映射就不能分解为两个圆周自映射的乘积。

定理4 若 $f\times g$ 为极小的，则 f 与 g 分别为极小的。

证明 设 U,V 分别是 X,Y 中任意的非空开集，易知 $U\times V$ 也是 $X\times Y$ 中的非空开集。由于 $f\times g$ 为极小的，故 $\forall(x,y)\in X\times Y$，$\exists m\in\mathbf{N}$，使得 $(f\times g)^m(x,y)\in U\times V$。又因为 $(f\times g)^m(x,y)=(f^m(x),g^m(y))$，所以 $f^m(x)\in U$，$g^m(y)\in V$。即 f 与 g 分别为极小的。 证毕

定理5 若 $f\times g$ 为拓扑传递的，则 f 与 g 分别为拓扑传递的。

证明参见文献[5]。

定理4和定理5的结论反之不一定成立，比如 $f=g$ 为单位圆周上无理旋转，考虑圆周上的开集 $U=(1,e^{\frac{\pi i}{4}})$，$V=(-1,e^{\frac{5\pi i}{4}})$。

3 结论

对乘积空间理论的拓扑动力系统作了进一步的研究，得出了乘积空间与个体空间在终于周期点集、拓扑可扩上是等价的，其中在一定特殊条件下拓扑稳定性是等价的，但在极小和拓扑传递的性质上却是不等价的。

参考文献：

[1] 杨旭，李德本. 单位正方形的乘积自映射[J]. 松辽学刊(自然科学版)，1990(1)：17-20.

YANG X, LI D B. The product of self mapping of the unit square[J]. Songliao Journal (Natural Science Edition), 1990 (1): 17-20.

[2] 杨润生. 拓扑遍历与拓扑双重遍历[J]. 数学学报，2003，46(3)：555-560.

YANG R S. Topological ergodicity and topological double ergodicity[J]. Acta Mathematica Sinica, 2003, 46(3): 555-560.

[3] 黎日松. $f_1\times f_2$ 与 f_1，f_2 的一些动力性质间的关系研究[J]. 山西大学学报(自然科学版)，2006，29(4)：347-351.

LI R S. Research on the relations between some dynamical properties of $f_1\times f_2$ and f_1, f_2[J]. Journal of Shanxi University (Natural Science Edition), 2006, 29(4): 347-351.

[4] 史国民. 关于乘积空间理论及其应用的一些注记[D]. 成都：电子科技大学，2010.

SHI G M. Some notes on the theory of product space and its applications[D]. Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China, 2010.

[5] 索宇，朱培勇，吴新星. 拓扑空间中Devaney混沌的乘积性质[J]. 西南民族大学学报(自然科学版)，2011，37(2)：199-202.

SUO Y, ZHU P Y, WU X X. On product property of Devaney chaos maps in topology space[J]. Journal of Southwest for Nationalities (Natural Science Edition), 2011, 37 (2): 199-202.

[6] 周楠，邢振宇，吕恕. 周期点、非游荡点在乘积系统中的保持性[J]. 西南民族大学学报(自然科学版)，2011，37(6)：895-897.

ZHOU N, Xing Z Y, LÜ S. Periodic points and non-wandering points retention in product systems[J]. Journal of Southwest University for Nationalities (Natural Science Edition), 2011, 37(6): 895-897.

[7] 冀占江. 乘积空间与拓扑群作用下逆极限空间的动力学性质[D]. 南宁：广西大学，2014.

JI Z J. Dyanmical property of product space and inverse limit space of a topological group action[D]. Nanning: Guangxi University, 2014.

[8] 任蕴丽，张丽娟，陈佐利，等. 两个符号半动力系统的乘积

系统的动力学性质[J].河北科技师范学院报,2015,29(2):16-19.
REN Y L,ZHANG L J,CHEN Z L,et al. The dynamical properties of double inverse limit space[J]. Journal of Hebei Normal University of Science & Technology,2015,29(2):16-19.
[9] 周作领.符号动力系统[M].上海:上海科技出版社,1997.
ZHOU Z L. Symbolic dynamics[M]. Shanghai:Shanghai-Science and Technology Education Press,1997.
[10] AOKI N. Chapter 15,topological dynamics[M]//MORITA K,NAGATA J. Topics in general topology. Amsterdam:Elsevier Science Publishers,1989.

The Research of Dynamical Properties of the Product Space

ZHOU Shuang, JIN Yuguang
(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [**Purposes**]It mainly studies the relations of dynamical properties of $(X\times Y, f\times g)$, (X, f), and (Y, g). [**Methods**]The dynamic properties of the individual space are extended to the product space. [**Findings**] 1) $EP(f\times g)=EP(f)\times EP(g)$, where $EP(f)$ and $EP(g)$ are eventually periodic points sets of f and g, respectively; 2) $f\times g$ is topological expansive if only and if f and g are topological expansive, respectively; 3)If a continuous self-mapping of torus can be decomposed into two consecutive circular self-mapping, then $f_1\times f_2$ is topological stability if only and if f_1 and f_2 are topological stability respectively; 4)If $f\times g$ is minimal, then f and g are minimal, respectively. [**Conclusions**]The topological expansive of the product space is the same as that of the individual space in the eventually periodic points set, where the topological stability is equivalent under certain special conditions, but the minimality and topological transitivity are is not equivalent between the product space and the individual space.

Keywords: eventually periodic points; topological expansive; topological stability

(责任编辑 方 兴)