DOI:10.11721/cqnuj20180421

资产负债管理下时间一致的投资策略选择*

杨　鹏
(西京学院 理学院，西安 710123)

摘要:【目的】在风险资产的价格满足跳-扩散过程且负债满足扩散过程时,研究目标是求得时间一致的最优投资策略,最大化终止盈余的均值,同时最小化终止盈余的方差。【方法】应用推广的 Hamilton-Jacobi-Bellman 动态规划的方法研究了该问题。【结果】得到了时间一致最优投资策略和值函数的显式解。【结论】所得结果推广了时间一致策略选择问题中已有文献中的相应结论。

关键词:负债;时间一致;投资;随机控制;Hamilton-Jacobi-Bellman 系统

中图分类号:O211.6　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2018)04-0074-07

最优投资策略选择问题属于金融数学的范畴。金融数学是最近 30 年发展起来的一门新兴学科。它是利用随机控制、随机分析等数学工具研究金融问题,并进行数学建模、理论分析、数值计算等定量分析,以期找到金融学的内在规律并用以指导实践。金融数学的核心问题是:不确定环境下的最优投资策略选择问题、资产定价问题、风险管理问题。近年来,随着经济社会的发展,人们可支配的资金越来越多,因此不确定环境下的最优投资策略选择问题逐渐成为金融数学的热点问题。

各类公司在进行金融活动中经常会面临资产负债问题。研究资产负债情形下的投资策略选择问题,有利于公司扭亏为盈,从而使公司得到更好地发展。Xie 等人[1]在 Markowitz 均值-方差准则下,研究了负债情形下的投资策略选择,研究目标是寻找最优投资策略,使终止时刻财富的均值最大、方差最小。利用随机线性控制理论,求得了最优投资策略。Chen 等人[2]在负债情形下,研究了马氏调制下基于均值-方差准则的投资策略选择。Yao 等人[3]把负债情形下的投资策略选择推广到随机利率情形。杨鹏等人[4-5]进一步研究了随机微分博弈下考虑资产负债的投资策略选择。

然而,在考虑资产负债的投资策略选择问题研究中,大部分策略都是时间不一致的。Strotz[6]首次研究了时间一致性策略选择问题,时间一致策略是今天投资者选择了一个最优策略,在之后的一段时间里这个策略仍是最优的。最近几年,有很多学者研究了时间一致的策略选择问题。Bjork 等人[7]从博弈论的角度,给出了研究时间一致性问题的通常做法。Zeng 等人[8]在风险资产带跳的情形下,研究了时间一致的策略选择问题。Lin 等人[9]把时间一致的策略选择问题,推广到了 CEV 模型。Zhang 等人[10]研究了两种风险资产相依下,时间一致的策略选择问题。Yang[11]研究了保险业务和风险资产相依下,时间一致的策略选择问题。

基于以上思考,本文研究了资产负债情形下,时间一致的投资策略选择问题。投资者通过在金融市场投资增加财富,金融市场由一个无风险资产和一个风险资产组成,风险资产带跳,且风险资产和负债具有相关性。利用随机控制理论,得到了值函数满足的推广 Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB)系统,通过求解相应的 HJB 方程求得了最优时间一致的投资策略。最后,分析了模型参数对最优时间一致投资策略的影响。

1 模型和假设

设$(\Omega,\mathcal{F},P)$是一个完备的、附流概率空间,这里 P 是一个实值概率,流 $F:=\{\mathcal{F}(t):t\in[0,T]\}$。概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$是满足通常条件的(也就是关于 F 是右连续的,关于 P 是完备的),T 是投资的终止时刻,满足 $T<\infty$。

* **收稿日期:**2017-04-28　**修回日期:**2018-05-10　**网络出版时间:**2018-07-26 16:50
资助项目:国家自然科学基金面上项目(No. 11271375);西京学院院科研基金(No. XJ160144)
第一作者简介:杨鹏,男,副教授,研究方向为数理金融、保险精算,E-mail:yangpeng511@163.com
网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20180726.1650.042.html

假设概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$包含下文中提到的所有随机变量和随机过程。

1.1 金融市场模型

金融市场由一个无风险资产和一个风险资产组成。无风险资产的价格为$B(t)$，满足常微分方程$\mathrm{d}B(t)=r(t)B(t)\mathrm{d}t$，这里$r(t)>0$是时间$t$的确定函数，表示时刻$t$的无风险利率。设$W_1(t)$是一维标准布朗运动，风险资产的价格$S(t)$满足如下带跳的随机微分方程：

$$\mathrm{d}S(t)=S(t)\left[\mu(t)\mathrm{d}t+\sigma(t)\mathrm{d}W_1(t)+\mathrm{d}\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i\right]。\tag{1}$$

式中：$\mu(t)$是时间t的确定函数($\mu(t)>r(t)$)，表示风险资产的平均收益率；$\sigma(t)>0$是时间t的确定函数，表示风险资产的波动率。$\{Y_i,i=1,2,\cdots\}$是取值为$(-1,+\infty)$，独立同分布的随机变量序列，表示第i次跳的大小。假设$\{Y_i,i=1,2,\cdots\}$的一阶矩和二阶矩分别为μ_1和μ_2。$N(t)$是强度为λ的齐次泊松过程，复合泊松过程$\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i$表示$[0,t]$上总跳的数值。

在现实投资活动中，投资者经常会面临资产负债问题。与文献[1-5]相似，本文考虑资产负债情形下的投资。假设投资者在投资的最初时刻，有初始财富$x>0$与初始负债$l(l\in\mathbf{R})$，则投资者在最初时刻有净财富$x_0=x-l$。记$L(t)$为时刻t投资者的累积负债，设$L(t)$满足随机微分方程：

$$\mathrm{d}L(t)=a(t)\mathrm{d}t+b(t)\mathrm{d}W_L(t)。\tag{2}$$

式中：$a(t)>0$和$b(t)>0$分别表示负债的预期增长率和预期波动率；$W_L(t)$是一维标准布朗运动。在金融活动中，负债和风险资产一般是相互依存的，所以假设$W_1(t)$和$W_L(t)$具有相关关系，设它们的相关系数为ρ，ρ的取值为$[-1,1]$。正如文献[1]指出的，负债$L(t)$中的布朗运动$W_L(t)$可以表示为$W_1(t)$和$W_2(t)$的线性组合：

$$W_L(t)=\rho\mathrm{d}W_1(t)+\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}W_2(t)。\tag{3}$$

式中：$W_2(t)$是一维标准布朗运动，且$W_1(t)$和$W_2(t)$相互独立。

将(3)式代入(2)式，随机微分方程(2)变为：

$$\mathrm{d}L(t)=a(t)\mathrm{d}t+b(t)\rho\mathrm{d}W_1(t)+b(t)\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}W_2(t)。\tag{4}$$

1.2 财富过程模型

设$\pi(t)$为时刻t投资者在风险资产上投资的金额，则在无风险资产上投资的金额为$X_t^\pi-\pi(t)$，这里X_t^π为进行投资后投资者的财富。在任意时刻t，选择$\pi(t)$为控制变量，则考虑投资和资产负债后，财富过程满足带跳随机微分方程$\mathrm{d}X_t^\pi=\pi(t)\dfrac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)}+(X_t^\pi-\pi(t))\dfrac{\mathrm{d}B(t)}{B(t)}-\mathrm{d}L(t)$，即

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X_t^\pi=&[r(t)X_t^\pi+(\mu(t)-r(t))\pi(t)-a(t)]\mathrm{d}t+\\&[\pi(t)\sigma(t)-b(t)\rho]\mathrm{d}W_1(t)+\pi(t)\mathrm{d}\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i-b(t)\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}W_2(t)。\end{aligned}\tag{5}$$

定义 1　投资策略$\pi(t)$称为可行的，如果满足下列条件：i)$\pi(t)$是关于F循序可测的，且它们是右连续，左极限存在；ii)$\int_0^T\pi(t)\mathrm{d}t<\infty$；iii)随机微分方程(5)对于投资策略$\pi(t)$有唯一的强解。

所有可行的保险-投资策略记为Π。

2 问题的形成和推广的 HJB 系统

从博弈论的视角给出所要研究的问题。研究的目标是：投资者选择的策略能够最大化终止时刻财富的均值，同时最小化终止时刻财富的方差，即投资者选择一个投资策略$\pi(t)$最大化目标函数：

$$J(t,x,\pi)=E_{t,x}[X_T^\pi]-0.5\gamma\mathrm{Var}_{t,x}[X_T^\pi],\tag{6}$$

这里$(t,x)\in[0,T]\times\mathbf{R}$，$[0,T]\times\mathbf{R}=\{(t,x)\mid 0\leqslant t\leqslant T,x\in\mathbf{R}\}$；$E_{t,x}[\cdot]=E[\cdot\mid X_t^\pi=x]$；$\gamma>0$为常数，表示投资者的风险厌恶程度。注意到，目标函数(6)等价于：

$$J_1(t,x,\pi)=E_{t,x}[F(X_T^\pi)]+G(E_{t,x}[X_T^\pi])。\tag{7}$$

式中：$F(y)=y-0.5\gamma y^2$，$G(y)=0.5\gamma y^2$。

注1 问题(7)是如下问题的特殊情况：

$$J_2(t,x,\pi)=E_{t,x}[F(x,X_T^\pi)]+G(x,E_{t,x}[X_T^\pi]),\tag{8}$$

式中：$F(x,y)=y-0.5\gamma(x)y^2$，$G(y)=0.5\gamma(x)y^2$，$\gamma(x)$是状态相依的风险厌恶函数。显然，如果令$\gamma(x)=\gamma$，则问题(8)变为问题(7)。本文只研究问题(7)。

注2 问题(6)(或问题(7))是时间一致的策略选择。即对任意的时刻t，采用的投资策略和时刻$t+\Delta t$采用的投资策略是一致，这里$\Delta t>0$。也就是说，在时刻t，投资者选择了最优策略π，时刻t之后的任意时刻s，投资者仍选择策略π，即对于投资者来说，在时刻s策略π是他的最佳选择。

注3 问题(6)(或问题(7))是如下问题的改进：

$$E_{0,x_0}[X_T^\pi]-0.5\gamma\mathrm{Var}_{0,x_0}[X_T^\pi]。\tag{9}$$

选择投资策略π最大化问题(9)，是经典的均值-方差投资策略选择问题。该问题是由Markowitz在20世纪50年代首次提出并研究的，并因此而获得了诺贝尔经济学奖。然而问题(9)是时间不一致的。

下面给出平衡策略的严格定义。

定义2(平衡策略) 对于任意的初始状态$(t,x)\in[0,T]\times\mathbf{R}$和可行策略$\pi^*(t,x)$，选择3个实数$\tilde{a}>0$，$\tilde{b}>0$和$\varepsilon>0$，定义策略$\pi_\varepsilon(s,\tilde{x})=\begin{cases}(\tilde{a},\tilde{b}),(s,\tilde{x})\in[t,t+\varepsilon]\times\mathbf{R}\\ u^*(s,\tilde{x}),\ (s,\tilde{x})\in[t+\varepsilon,T]\times\mathbf{R}\end{cases}$。如果对所有的$\tilde{a}\geqslant 0$和$\tilde{b}\in\mathbf{R}$有$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\inf\dfrac{V(t,x,\pi^*)-V(t,x,\pi_\varepsilon)}{\varepsilon}\geqslant 0$，则$\pi^*(t,x)$称为时间一致策略(平衡策略)，相应的平衡值函数为$J(t,x)=J(t,x,\pi^*)$。

正如文献[9]指出的，时间一致最优策略恰好为平衡策略，最优值函数恰好为平衡值函数。假设投资者寻求问题(7)的平衡策略和平衡值函数，平衡策略称为时间一致最优策略，平衡值函数称为最优值函数。

为了书写方便，对于任意的策略$\pi\in\Pi$，任意的函数$\varphi(t,x)\in C^{1,2}([0,T]\times\mathbf{R})$，定义如下的微分算子：

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^\pi\varphi(t,x)=&\varphi_t(t,x)+[r(t)X_t^\pi+(\mu(t)-r(t))\pi(t)-a(t)]\varphi_x(t,x)+0.5[(\pi(t)\sigma(t)-b(t)\rho)^2+\\&b^2(t)(1-\rho^2)]\varphi_{xx}(t,x)+\lambda E[\varphi(t,x+\pi(t)Y)-\varphi(t,x)]。\end{aligned}\tag{10}$$

与文献[7]相似地，对于问题(7)给出如下推广的HJB系统。

定义3 对于纳什平衡问题，推广的HJB系统定义如下：

$$\begin{cases}\sup\limits_{\pi\in\Pi}\{\mathcal{A}^\pi V(t,x)-\mathcal{A}^\pi f(t,x,x)+\mathcal{A}^\pi f^x(t,x)-\mathcal{A}^\pi(G\circ g)(t,x)+\mathcal{H}^\pi g(t,x)\}=0,0\leqslant t\leqslant T,\\ \mathcal{A}^{\pi^*}f^y(t,x)=0,\ 0\leqslant t\leqslant T,\\ \mathcal{A}^{\pi^*}g(t,x)=0,\ 0\leqslant t\leqslant T,\\ V(T,x)=F(x,x)+G(x,x),\\ f(T,x,y)=F(y,x),\\ g(T,x)=x。\end{cases}\tag{11}$$

式中：$\pi^*(t)=\arg\sup\limits_{\pi\in\Pi}\{\mathcal{A}^\pi V(t,x)-\mathcal{A}^\pi f(t,x,x)+\mathcal{A}^\pi f^x(t,x)-\mathcal{A}^\pi(G\circ g)(t,x)+\mathcal{H}^\pi g(t,x)\}$。$f(t,x,y)$和$g(t,x)$的概率解释如下：

$$\begin{cases}f(t,x,y)=E_{t,x}[F(y,X_T^{\pi^*})],\\ g(t,x)=E_{t,x}[X_T^{\pi^*}]。\end{cases}\tag{12}$$

f^y，$G\circ g$和$\mathcal{H}^\pi g$定义为：

$$\begin{cases}f^y(t,x)=f(t,x,y),\\ (G\circ g)(t,x)=G(x,g(t,x)),\\ \mathcal{H}^\pi g(t,x)=G_g(x,g(t,x))\mathcal{A}^\pi g(t,x),\\ G_g(x,g)=\dfrac{\partial G}{\partial g}(t,x,g)。\end{cases}$$

定理1(检验定理) 设(V,f,g)是推广的HJB系统(11)的解，$\pi^*(t)$是使得系统(11)第一个方程成立的控制策略，则$\pi^*(t)$是时间一致的最优投资策略，$V(t,x)=J(t,x)$，f和g满足(12)式。

定理的证明类似于文献[7]中的定理 7.1。

定理 2　对于问题(7)(或等价的对于问题(6))，设 $V(t,x)$ 和 $g(t,x)$ 定义在 $[0,T]\times\mathbf{R}$ 上，关于 t 连续可微，关于 x 二阶连续、可微，即 $V(t,x)\in C^{1,2}([0,T]\times\mathbf{R})$，$g(t,x)\in C^{1,2}([0,T]\times\mathbf{R})$。如果 $W(t,x)$ 和 $g(t,x)$ 分别满足下面的 HJB 方程：

$$\sup_{\pi\in\Pi}\{V_t(t,x)+[r(t)x+(\mu(t)-r(t))\pi(t)-a(t)]V_x(t,x)+$$
$$0.5[(\pi(t)\sigma(t)-b(t)\rho)^2+b^2(t)(1-\rho^2)][V_{xx}(t,x)-\gamma g_x^2(t,x)]+\lambda E[V(t,x+\pi(t)Y)-V(t,x)]+$$
$$\lambda E[\gamma g(t,x)g(t,x+\pi(t)Y)-0.5\gamma g^2(t,x+\pi(t)Y)-0.5\gamma g^2(t,x)]\}=0, \tag{13}$$
$$V(T,x)=x,\ \mathcal{A}^{\pi^*}g(t,x)=0,g(T,x)=x, \tag{14}$$
$$\pi^*(t)=\arg\sup_{\pi\in\Pi}\{V_t(t,x)+[r(t)x+(\mu(t)-r(t))\pi(t)-a(t)]V_x(t,x)+$$
$$0.5[(\pi(t)\sigma(t)-b(t)\rho)^2+b^2(t)(1-\rho^2)][V_{xx}(t,x)-\gamma g_x^2(t,x)]+\lambda E[V(t,x+\pi(t)Y)-V(t,x)]+$$
$$\lambda E[\gamma g(t,x)g(t,x+\pi(t)Y)-0.5\gamma g^2(t,x+\pi(t)Y)-0.5\gamma g^2(t,x)]\}。\tag{15}$$

则 $V(t,x)=J(t,x)$，$g(t,x)=E_{t,x}[X_T^{\pi^*}]$，$\pi^*(t)$ 为时间一致的最优投资策略。

证明　对于问题(7)(或等价的对于问题(6))，有

$$-\mathcal{A}^{\pi}f(t,x,x)+\mathcal{A}^{\pi}f^{x}(t,x)=0,\ (G\circ g)(t,x)=0.5\gamma g^2(t,x),$$
$$\mathcal{H}^{\pi}g(t,x)=G_g(x,g(t,x))\mathcal{A}^{\pi}g(t,x)=[0.5\gamma g^2(t,x)]'\mathcal{A}^{\pi}g(t,x)=\gamma g(t,x)\mathcal{A}^{\pi}g(t,x)。$$

因此(11)式的第一个方程变为

$$\sup_{\pi\in\Pi}\{\mathcal{A}^{\pi}V(t,x)-\mathcal{A}^{\pi}0.5\gamma g^2(t,x)+\gamma g(t,x)\mathcal{A}^{\pi}g(t,x)\}=0。\tag{16}$$

下面给出比(16)式更显式的形式：

$$-\mathcal{A}^{\pi}0.5\gamma g^2(t,x)+\gamma g(t,x)\mathcal{A}^{\pi}g(t,x)=-\gamma g_x^2(t,x)0.5[(\pi(t)\sigma(t)-b(t)\rho)^2+b^2(t)(1-\rho^2)]+$$
$$\lambda E[\gamma g(t,x)g(t,x+\pi(t)Y)-0.5\gamma g^2(t,x+\pi(t)Y)-0.5\gamma g^2(t,x)]。\tag{17}$$

由(10)，(17)式，可以得到(13)式。边界条件为 $V(T,x)=F(x)+G(x)=(x-0.5\gamma x^2)+0.5\gamma x^2=x$。(14)，(15)式由定义 3 自然成立。

由定理 1 知，$V(t,x)=J(t,x)$，$g(t,x)=E_{t,x}[X_T^{\pi^*}]$，$\pi^*(t)$ 为时间一致的最优投资策略。　　证毕

3 时间一致策略的求解

为了书写方便，首先给出如下记号：

$$l_1(t)=\frac{(\mu(t)-r(t)+\lambda\mu_1)\sigma(t)b(t)\rho}{\sigma^2(t)+\lambda\mu_2}-a(t), \tag{18}$$
$$l_2(t)=\frac{(\gamma\sigma(t)b(t)\rho)^2}{2\gamma(\sigma^2(t)+\lambda\mu_2)}-\frac{\gamma}{2}b^2(t), \tag{19}$$
$$l_3(t)=\frac{\mu(t)-r(t)+\lambda\mu_1}{2\gamma(\sigma^2(t)+\lambda\mu_2)}, \tag{20}$$
$$l_4(t)=\frac{(\mu(t)-r(t)+\lambda\mu_1)^2}{\gamma(\sigma^2(t)+\lambda\mu_2)}。\tag{21}$$

定理 3　对于财富过程(5)，时间一致的最优投资策略为

$$\pi^*(t)=\frac{\sigma(t)b(t)\rho}{\sigma^2(t)+\lambda\mu_2}+\frac{\mu(t)-r(t)+\lambda\mu_1}{\gamma(\sigma^2(t)+\lambda\mu_2)}\exp\left\{-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s\right\}, \tag{22}$$

最优值函数为 $V(t,x)=x\exp\left\{\int_t^T r(s)\mathrm{d}s\right\}+\int_t^T\left[l_1(s)\exp\left\{\int_s^T r(v)\mathrm{d}v\right\}+l_2(s)\exp\left\{2\int_s^T r(v)\mathrm{d}v\right\}+l_3(s)\right]\mathrm{d}s$。

证明　考虑到边界条件 $V(T,x)=x$ 和 $g(T,x)=x$，与很多文献类似地[8-9,11]，设 $V(t,x)$ 和 $g(t,x)$ 分别满足下式：

$$\begin{cases}V(t,x)=A(t)x+B(t),\ A(T)=1,B(T)=0,\\ g(t,x)=C(t)x+D(t),\ C(T)=1,D(T)=0。\end{cases} \tag{23}$$

由(23)式可得：

$$\begin{cases}E[V(t,x+\pi(t)Y)-V(t,x)]=\mu_1 A(t)\pi(t),\\ E\left[\gamma g(t,x)g(t,x+\pi(t)Y)-\dfrac{\gamma}{2}g^2(t,x+\pi(t)Y)-\dfrac{\gamma}{2}g^2(t,x)\right]=-0.5\gamma\mu_2 C^2(t)\pi^2(t)。\end{cases}\tag{24}$$

$V(t,x)$和$g(t,x)$的偏导数分别为:

$$\begin{cases}V_t(t,x)=A'(t)x+B'(t),\ V_x(t,x)=A(t),\ V_{xx}(t,x)=0,\\ g_t(t,x)=C'(t)x+D'(t),\ g_x(t,x)=C(t),\ g_{xx}(t,x)=0。\end{cases}$$

将(23)~(25)式代入(13)式整理得

$$\begin{aligned}&[A'(t)+r(t)A(t)]x+B'(t)-a(t)A(t)-0.5\gamma b^2(t)C^2(t)+\\ &\sup_{\pi\in\Pi}\{-0.5\gamma C^2(t)[\sigma^2(t)+\lambda\mu_2]\pi^2(t)+[(\mu(t)-r(t)+\lambda\mu_1)A(t)+\gamma\rho\sigma(t)b(t)C^2(t)]\pi(t)\}=0。\end{aligned}\tag{26}$$

从(26)式可以得到,时间一致的最优投资策略满足下式

$$\pi^*(t)=\frac{(\mu(t)-r(t)+\lambda\mu_1)A(t)+\gamma\rho\sigma(t)b(t)C^2(t)}{\gamma C^2(t)[\sigma^2(t)+\lambda\mu_2]}。\tag{27}$$

(27)式代入(26)式得到$[A'(t)+r(t)A(t)]x+B'(t)+l_1(t)A(t)+l_2(t)C^2(t)+l_3(t)=0$。

因此,可以得到

$$A'(t)+r(t)A(t)=0,\tag{28}$$

$$B'(t)+l_1(t)A(t)+l_2(t)C^2(t)+l_3(t)=0。\tag{29}$$

这里$l_1(t)$,$l_2(t)$和$l_3(t)$分别满足(18),(19)和(20)式。

结合边界条件$A(T)=1$和(28)式,可得

$$A(t)=\exp\left\{\int_t^T r(s)\mathrm{d}s\right\}。\tag{30}$$

将(23),(25)和(27)式代入$\mathcal{A}^{\pi^*}g(t,x)=0$,整理得$[C'(t)+r(t)C(t)]x+D'(t)+l_1(t)C(t)+l_4(t)=0$。

可以得到:

$$C'(t)+r(t)C(t)=0,\tag{31}$$

$$D'(t)+l_1(t)C(t)+l_4(t)=0。\tag{32}$$

式中:$l_4(t)$满足(21)式。

结合边界条件$C(T)=1$和(31)式,可得

$$C(t)=\exp\left\{\int_t^T r(s)\mathrm{d}s\right\}。\tag{33}$$

(33)式代入(32)式,考虑到边界条件$D(T)=0$,有

$$D(t)=\int_t^T\left[l_1(s)\exp\left\{\int_s^T r(v)\mathrm{d}v\right\}+l_4(s)\right]\mathrm{d}s。\tag{34}$$

进一步,根据(29)式和边界条件$B(T)=0$,得到

$$B(t)=\int_t^T\left[l_1(s)\exp\left\{\int_s^T r(v)\mathrm{d}v\right\}+l_2(s)\exp\left\{2\int_s^T r(v)\mathrm{d}v\right\}+l_3(s)\right]\mathrm{d}s。\tag{35}$$

将(30),(33)式代入(27)式,可得时间一致的最优投资策略满足(22)式;由(30),(35)式可得最优值函数$V(t,x)$。

证毕

注 4 从时间一致的最优投资策略满足的(22)式可以看出,投资策略由两部分组成,第一部分为$\dfrac{\sigma(t)b(t)\rho}{\sigma^2(t)+\lambda\mu_2}$,第二部分为$\dfrac{\mu(t)-r(t)+\lambda\mu_1}{\gamma(\sigma^2(t)+\lambda\mu_2)}\exp\left\{-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s\right\}$。其中第一部分由负债引起的,投资者为了对冲负债采取的投资策略为$\dfrac{\sigma(t)b(t)\rho}{\sigma^2(t)+\lambda\mu_2}$。如果不考虑负债,投资者采取的时间一致的最优投资策略为

$$\frac{\mu(t)-r(t)+\lambda\mu_1}{\gamma(\sigma^2(t)+\lambda\mu_2)}\exp\left\{-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s\right\}。$$

4 敏感性分析

通过理论推导和数值计算,分析模型参数对时间一致最优投资策略的影响。为了分析方便,假设模型参数

都为常数,因此时间一致的最优投资策略满足:

$$\pi^*(t)=\frac{\sigma b\rho}{\sigma^2+\lambda\mu_2}+\frac{\mu-r+\lambda\mu_1}{\gamma(\sigma^2+\lambda\mu_2)}\mathrm{e}^{-r(T-t)}。\tag{36}$$

$\pi^*(t)$关于参数 b 求偏导数,有$\frac{\partial\pi^*(t)}{\partial b}=\frac{\sigma\rho}{\sigma^2+\lambda\mu_2}$。可以看出,当 $\rho\in[0,1]$时,$\pi^*(t)$是关于 b 单调递增的函数;当 $\rho\in[-1,0]$时,$\pi^*(t)$是关于 b 单调递减的函数,其中参数 b 为负债的预期波动率。这说明:风险资产和负债是正相关时,随着负债预期波动率的增加,投资者会通过加大投资来对冲负债引起的损失;风险资产和负债是负相关时,随着负债预期波动率的增加,投资者会通过减少投资来减少自身更多的损失。

$\pi^*(t)$关于参数 ρ 求偏导数,有$\frac{\partial\pi^*(t)}{\partial\rho}=\frac{\sigma b}{\sigma^2+\lambda\mu_2}>0$。因此,$\pi^*(t)$是关于 ρ 单调递增的函数,这里 ρ 代表风险资产和负债之间的相关性。这说明:风险资产和负债的相关性越大,投资者在风险资产上投资的金额就越大。

$\pi^*(t)$关于参数 μ 求偏导数,有$\frac{\partial\pi^*(t)}{\partial\mu}=\frac{\mathrm{e}^{-r(T-t)}}{\gamma(\sigma^2+\lambda\mu_2)}>0$。可见,$\pi^*(t)$是关于 μ 单调递增的函数,这里 μ 代表风险资产的平均收益率。这说明:随着风险资产平均收益率的增加,投资者会把更多的资金投资到风险资产上。

$\pi^*(t)$关于参数 t 求偏导数,得到$\frac{\partial\pi^*(t)}{\partial t}=\frac{r(\mu-r+\lambda\mu_1)}{\gamma(\sigma^2+\lambda\mu_2)}\mathrm{e}^{-r(T-t)}>0$。可以看到,$\pi^*(t)$是关于 t 单调递增的函数,这里 t 代表投资的最初时刻,T 代表投资的终止时刻。可以看出,随着投资终止时刻的来临,投资者会把更多的资金投资到风险资产上。

下面,通过算例分析其它模型参数,对时间一致的最优投资策略的影响。假设风险资产每次跳的大小$\{Y_i, i=1,2,\cdots\}$,满足如下共同的双指数分布 $g(y)=\begin{cases}p\eta_1\mathrm{e}^{-y\eta_1}, & y\geqslant0\\ q\eta_2\mathrm{e}^{y\eta_2}, & y<0\end{cases}$。这里 $p\geqslant0, q\geqslant0$,分别表示风险资产中向正方向跳和向负方向跳的概率,且满足 $p+q=1, \eta_1>0, \eta_2>0$。求得 $\mu_1=\frac{p}{\eta_1}-\frac{q}{\eta_2}, \mu_2=\frac{2p}{(\eta_1)^2}+\frac{2q}{(\eta_2)^2}$。如无其它特殊说明,参数取值通过表 1 给出。

表 1　模型参数的取值

Tab. 1　The value of model parameters

参数	b	ρ	λ	μ	r	σ	γ	T	t	η_1	η_2	p
取值	0.06	0.1	0.6	0.05	0.02	0.07	2	10	6	1	2	0.4

图 1～图 4 分别为不同参数对时间一致的最优投资策略 $\pi^*(t)$的影响。

当 $\sigma\in[0.06,0.09]$时,σ 对时间一致的最优投资策略 $\pi^*(t)$的影响如图 1 所示。从图中可以看出,投资策略 $\pi^*(t)$是关于 σ 单调递减的函数,σ 代表风险资产的波动率。风险资产的波动率越大说明风险越大,因此投资者会减少在风险资产上的投资。

当 $r\in[0.02,0.04]$时,r 对时间一致的最优投资策略 $\pi^*(t)$的影响如图 2 所示。从图中可以看出,投资策略 $\pi^*(t)$是关于 r 单调递减的函数,r 代表无风险资产的利率。无风险资产的利率越大,投资者从无风险资产上的收益越大,因此投资者自然会减少在风险资产上的投资。

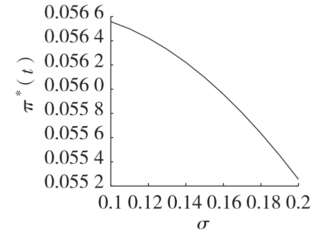

图 1　σ 对 $\pi^*(t)$的影响

Fig. 1　The effect of σ on $\pi^*(t)$

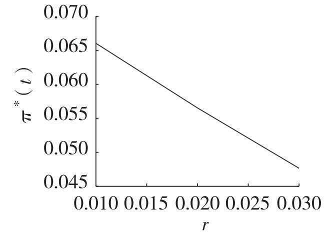

图 2　r 对 $\pi^*(t)$的影响

Fig. 2　The effect of r on $\pi^*(t)$

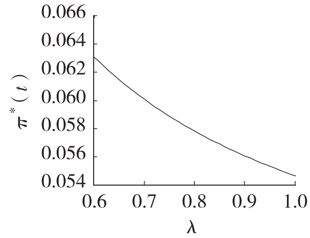

图 3　λ 对 $\pi^*(t)$的影响

Fig. 3　The effect of λ on $\pi^*(t)$

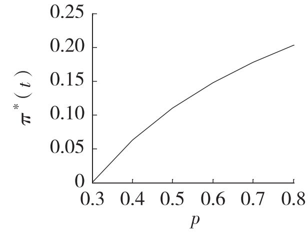

图 4　p 对 $\pi^*(t)$的影响

Fig. 4　The effect of p on $\pi^*(t)$

当 $\lambda\in[0.6,1]$时,λ 对时间一致的最优投资策略 $\pi^*(t)$的影响如图 3 所示。由图中可以看出,投资策略

$\pi^*(t)$ 是关于 λ 单调递减的函数,λ 代表风险资产单位时间内跳的次数。随着跳次数的增加,风险就会增加,因此投资者会减少在风险资产上的投资。

当 $p\in[0.3,0.8]$时,p 对时间一致的最优投资策略 $\pi^*(t)$的影响如图 4 所示。由图中可以看出,投资策略 $\pi^*(t)$ 是关于 p 单调递增的函数,p 代表风险资产向正方向跳的概率。随着向正方向跳的概率增加,投资者从风险资产中的收益就会增加,因此投资者会增加在风险资产上的投资。

参考文献:

[1] XIE S,LI Z,WANG S. Continuous-time portfolio selection with liability: Mean-variance model and stochastic LQ approach[J]. Insurance Mathematics & Economics,2008,42(3):943-953.

[2] CHEN P,YANG H,YIN G. Markowitz's mean-variance asset-liability management with regime switching: A continuous-time model [J]. Applied Mathematical Finance, 2008,18(1):29-50

[3] YAO H,LI Z,LI D. Multi-period mean-variance portfolio selection with stochastic interest rate and uncontrollable liability [J]. European Journal of Operational Research, 2016,252(3):837-851.

[4] 杨鹏,林祥.随机微分博弈下的资产负债管理[J].中山大学学报(自然科学版),2013,52(6):30-33.
YANG P,LIN X. Asset and liability management under stochastic differential games[J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni,2013,52(6):30-33.

[5] 杨鹏.具有交易费用和负债的随机微分博弈[J].系统科学与数学,2016,36(7):1040-1045.
YANG P. Stochastic differential games with transaction costs and liability[J]. Journal of System Science and Mathematical Science,2016,36(7):1040-1045.

[6] STROTZ R H. Myopia and inconsistency in dynamic utility maximization[J]. Review of Economic Studies, 1973, 23(3):165-180.

[7] BJORK T,MURGOCI A. A general theory of Markovian time inconsistent stochastic control problems[J]. SSRN Electronic Journal,2010,18(3):545-592.

[8] ZENG Y,LI Z,LAI Y. Time-consistent investment and reinsurance strategies for mean-variance insurers with jumps [J]. Insurance Mathematics & Economics, 2013, 52(3): 498-507.

[9] LIN X,QIAN Y P. Time-consistent mean-variance reinsurance-investment strategy for insurers under CEV model [J]. Scandinavian Actuarial Journal, 2016, 2016(7): 646-671.

[10] ZHANG C,LIANG Z. Portfolio optimization for jump-diffusion risky assets with common shock dependence and state dependent risk aversion[J]. Optimal Control Applications & Methods,2017,38(2):229-246.

[11] YANG P. Time-consistent mean-variance reinsurance-investment in a jump-diffusion financial market[J]. Optimization,2017,66(4):737-758.

Time-consistent Investment Strategy Selection under Asset and Liability Management

YANG Peng

(School of Science, Xijing University, Xi'an 710123, China)

Abstract: [**Purposes**]When the risky asset' price is governed by a jump-diffusion process while the liability evolves according to a Brownian motion with drift, the objective is to choose an optimal time-consistent investment strategy so as to maximize the expected terminal surplus while minimizing the variance of the terminal surplus. [**Methods**] The problem is investigated by using the extended Hamilton-Jacobi-Bellman dynamic programming approach. [**Findings**]Closed-form solutions for the optimal investment strategy and the corresponding value functions are obtained. [**Conclusions**]The obtained results extend the corresponding conclusions in references on time consistent strategy selection problems.

Keywords: liability; time-consistent; investment; stochastic control; Hamilton-Jacobi-Bellman system

(责任编辑 黄 颖)