DOI:10.11721/cqnuj20180415

一维广义热传导方程的精确解*

林府标[1]，张千宏[1]，张 俊[1]，龙 文[2]

(1. 贵州财经大学 数统学院；2. 贵州财经大学 贵州省经济系统仿真重点实验室，贵阳 550025)

摘要:【目的】为构造一维广义热传导方程新的精确解。【方法】利用李群分析法把一维广义热传导方程的解析求解问题约化为寻找常微分方程精确解的研究和探索问题。【结果】结合试探函数法和观察法给出了一维广义热传导方程的许多新的显式解析解和行波解。【结论】所得的新解析解扩展和完善了已有的结果。

关键词:一维广义热传导方程；李群分析法；试探函数法；观察法；解析解；行波解

中图分类号:O29；O175.29；O175.14；O411　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2018)04-0088-05

空间一维广义热传导方程[1]通常写为：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\kappa\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial x}\right),\kappa>0,\alpha\neq 0,-\frac{4}{3}。\tag{1}$$

这里 $u=u(t,x)$ 表示温度是时间 t 和空间变量 x 的函数，κ 为导温系数，α 为常数，讨论非线性热传导问题要求$\alpha\neq 0$，幂函数 $D(u)=u^{\alpha}$ 表示扩散率。广义热传导方程(1)也可以写为：

$$E(t,x,u,u_t,u_x,u_{xx})=\frac{\partial u}{\partial t}-\kappa\alpha u^{\alpha-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-\kappa u^{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\kappa>0,\alpha\neq 0,-\frac{4}{3}。\tag{2}$$

20 世纪 60 年代以来，非线性科学飞跃发展，与之相应的物理学中非线性方程内容也日趋丰富，人们对于非线性问题的关注越来越多，这些问题的解决最终都归结为求解非线性偏微分方程。非线性偏微分方程的精确求解及解法研究[1-2]一直是近几年来诸多物理学家、数学家、科学家和实际应用工作者致力研究的重要前沿课题。它在非线性科学的研究中占有重要的地位，极富挑战性。目前虽然已经提出了许多求非线性偏微分方程精确解的方法[1-2]，但由于求解非线性偏微分方程没有也不可能有统一而普遍的方法，因此继续寻找一些有效可行的方法依然是一项重要且有价值的工作，也一直是学术界的热门研究课题之一。

非线性方程大多源自广泛的物理问题及其他非线性科学应用领域问题，且通常情况下是很难求解的。一方面，需要不断探求获得解析解的一些新方法和新技术；例如试探函数法就是应用某些初等函数作为非线性方程解的试探函数[1-2]，从而获得一些非线性方程的准确解，但该方法关键在于正确选择试探函数，而对每一个非线性方程如何选取合适的试探函数，是一个需要探索和思考的过程。另一方面，有些非线性方程即便求出了解析解，但该解或是以隐函数形式出现，或是不便于实际应用。

经典李群分析法的奠基人 Lie 的基本思想是对给定的微分方程，如何找出使方程形式不变的变换群；如何利用已找出的变换群使常微分方程降阶，使偏微分方程降维或将之转化为常微分方程，从而进一步研究约化的常微分方程，进而求得微分方程某些解的解析表达式。李群分析法在微分方程的精确求解研究中，是一个锐利的工具同时也是解析求解的重要方法之一。虽然，Lie 的想法在理论上可求解任何偏微分方程，但基于实际计算的复杂性和研究的局限性等因素，李群理论沉睡了近半个世纪，直到 1950 年，Birkhoff[3-4]将李群应用到流体力学中的一些偏微分方程才吸引了人们的兴趣和注意。近年来，随着科学技术的迅猛发展，特别是现代科学高性能计算机、智能计算机和软件的不断发展和更新，李群理论得到广泛应用和深入研究[5-11]。特别地，改进的李群分析法已被应用到偏微分积分方程[10]、随机微分方程和时滞微分方程[11]以及其他新领域。

* **收稿日期**:2017-04-21　**修回日期**:2018-06-25　**网络出版时间**:2018-07-26 16:50

资助项目:国家自然科学基金地区科学基金项目(No. 11761018；No. 11361012；No. 61463009)；贵州省教育厅青年科技人才成长项目(黔教合 KY 字[2016]170；黔教合 KY 字[2017]150)；2017 年贵州财经大学校级重点项目(No. 2017XZD01)

第一作者简介:林府标，男，讲师，博士，研究方向为微分方程精确解的构造，E-mail:linfubiao0851@163.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20180726.1650.028.html

本文利用经典的李群分析法[9-11]结合试探函数法及观察法，探讨并寻找广义热传导方程(1)的显式解析解、隐式解析解和行波解。

1 广义热传导方程(1)所接受的李群

Lie[12]证明了带空间变量 x 的二阶演化偏微分方程 $u_t=F(t,x,u,u_x,u_{xx})$，$\dfrac{\partial F}{\partial u_{xx}}\neq 0$ 接受的无穷小对称算子形如：

$$X=\tau(t)\frac{\partial}{\partial t}+\xi(t,x,u)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(t,x,u)\frac{\partial}{\partial u}。\tag{3}$$

根据已有算法[9-11]，方程(2)的对称算子(3)式的延拓算子为 $\widetilde{X}=X+\eta^{u_t}\dfrac{\partial}{\partial u_t}+\eta^{u_x}\dfrac{\partial}{\partial u_x}+\eta^{u_{xx}}\dfrac{\partial}{\partial u_{xx}}$。式中：$\eta^{u_t}=D_t\eta-u_t(t,x,u)D_t\tau(t)-u_x(t,x,u)D_t\xi(t,x,u)$，$\eta^{u_x}=D_x\eta-u_x(t,x,u)D_x\xi(t,x,u)$，$\eta^{u_{xx}}=D_x\eta^{u_x}-u_{xx}(t,x,u)D_x\xi(t,x,u)$，其中，$D_t$，$D_x$ 分别是关于 t 和 x 的全微分算子，于是方程(2)的决定方程为：

$$\widetilde{X}(E(t,x,u,u_t,u_x,u_{xx}))|_{(2)}=0。$$

这里 $|_{(2)}$ 表示对方程(2)的任一解 $u=u(t,x)$ 决定方程恒成立，从而决定方程简化为：

$$u^{\alpha+1}\kappa(u\xi_{uu}+\alpha\xi_u)u_x^3+\kappa u^\alpha(u^2(2\xi_{ux}-\eta_{uu})+u\alpha(2\xi_x-\eta_u-\tau_t)+\alpha^2-\alpha)u_x^2+2\kappa u^{\alpha+2}\xi_u u_x u_{xx}+$$
$$\kappa u^{\alpha+1}(2u\xi_x-\tau_t u-\alpha\eta)u_{xx}+u^2(\eta_t-\kappa u^\alpha\eta_{xx})+u(\kappa u^\alpha(u\xi_{xx}-2u\eta_{ux}-2\alpha\eta_x)-\xi_t u)u_x=0。$$

因此进一步得到超决定方程组：$\begin{cases}\xi_u=0\\ \eta_t-\kappa u^\alpha\eta_{xx}=0\\ 2u\xi_x-\tau_t u-\alpha\eta=0\\ \kappa u^{\alpha+1}\xi_{xx}-2\kappa u^{\alpha+1}\eta_{ux}-2\kappa\alpha u^\alpha\eta_x-\xi_t u=0\\ 2u^{\alpha+2}\xi_{ux}-u^{\alpha+2}\eta_{uu}-\alpha u^{\alpha+1}\eta_u-\alpha u^{\alpha+1}\tau_t+2\alpha u^{\alpha+1}\xi_x+(\alpha^2-\alpha)u^\alpha=0\end{cases}$。该超决定方程组的通解为 $\tau=c_1t+c_2$，$\xi=c_3x+c_4$，$\eta=\dfrac{1}{\alpha}(2c_3-c_1)u$。故方程(2)所接受的算子(3)构成一个四维李代数 $L_4=\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$，即 $X_1=\dfrac{\partial}{\partial t}$，$X_2=\dfrac{\partial}{\partial x}$，$X_3=\alpha t\dfrac{\partial}{\partial t}-u\dfrac{\partial}{\partial u}$，$X_4=\alpha x\dfrac{\partial}{\partial x}+2u\dfrac{\partial}{\partial u}$。

2 四维李代数 L_4 的子李代数分类

根据偏微分方程精确解的构造方法[9-11]，利用四维李代数 L_4 构造广义热传导方程(2)的群不解，需要李代数 L_4 子李代数的一维最优系统。

根据李代数 L_4 的交换运算表得内自同构：$A_1:\bar{x}_1=x_1-\alpha a_1x_3$，$A_2:\bar{x}_2=x_2-\alpha a_2x_4$，$A_3:\bar{x}_1=e^{\alpha a_3}x_1$，$A_4:\bar{x}_2=e^{\alpha a_4}x_2$。这里仅写出坐标被改变的变换，其中 $a_i(i=1,2,3,4)$ 分别是内自同构 $A_i(i=1,2,3,4)$ 的参数。利用两步算法[13]，注意到理想 $I=\{X_1,X_2\}$，四维李代数 L_4 的一维最优子李代数系统为：

表 1　李代数 $L_4=\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$ 的交换位子

Tab. 1　Commutator of Lie algebra $L_4=\{X_1,X_2,X_3,X_4\}$

[,]	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	0	0	αX_1	0
X_2	0	0	0	αX_2
X_3	$-\alpha X_1$	0	0	0
X_4	0	$-\alpha X_2$	0	0

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_4+\varepsilon X_1,\ X_1+\varepsilon X_2,\ X_3+\varepsilon X_2,\ X_3+\beta X_4,\ \beta\in\mathbf{R},\ \beta\neq 0,\ \varepsilon=\pm 1。$$

3 广义热传导方程(1)的群不变解与显式解析解

3.1 对算子 X_1，方程(1)的群不变解与显式解析解

算子 X_1 的不变量为 x,u，假设 $u=f(x)$ 是方程(1)的解，函数 f 满足二阶非线性常微分方程 $ff''+\alpha f'^2=0$。求出此方程的通解，进一步得方程(1)的显式解析解为：

$$u=c_1e^{c_2x},\ \alpha=-1;\ u=[(1+\alpha)(c_1x+c_2)]^{\frac{1}{1+\alpha}},\ \alpha\neq -1。$$

其中，c_1，c_2 是任意积分常数。

3.2 对算子 X_2,方程(1)的群不变解与显式解析解

算子 X_2 的不变量为 t,u,假设 $u=f(t)$ 是方程(1)的解,于是得方程(1)的解为 $u=c,c\in\mathbf{R}$。

3.3 对算子 X_3,方程(1)的群不变解与显式解析解

算子 X_3 的不变量为 $x,t^{\frac{1}{\alpha}}u$,方程(1)的解析表达式可写为 $u=t^{-\frac{1}{\alpha}}f(x)$,其中 f 满足方程:

$$\kappa\alpha f^{\alpha}f''+\kappa\alpha^2f^{\alpha-1}f'^2+f=0。\tag{4}$$

特别地取 $\alpha=2$,利用试探函数法,设 $f(x)=ax+b,a,b\in\mathbf{R}$ 是方程(4)的解,则解之得 $a=-\frac{1}{4\kappa},b=0,f(x)=-\frac{1}{4\kappa}x$。此时,方程(2)的一个显式解析解为 $u=-\frac{1}{4\kappa}t^{-2}x$,$\alpha=2$。

类似地,选取 $\alpha=1$,用试探函数法,设 $f(x)=ax^2+bx+c,a,b,c\in\mathbf{R}$ 是方程(4)的解,则解之得 $a=-\frac{1}{6\kappa},c=-\frac{3}{2}\kappa b^2,b\in\mathbf{R}$。此时,方程(2)的一个显式解析解为 $u=t^{-1}\left(-\frac{1}{6\kappa}x^2+bx-\frac{3}{2}\kappa b^2\right)$,$b\in\mathbf{R}$,$\alpha=1$。

3.4 对算子 X_4,方程(1)的群不变解与显式解析解

算子 X_4 的不变量为 $t,x^{-\frac{2}{\alpha}}u$,方程(1)的解析表达式为 $u=x^{\frac{2}{\alpha}}f(t)$,其中函数 f 满足 $f'=\frac{2\kappa(\alpha+2)}{\alpha^2}f^{\alpha+1}$,解之得 $f=\left[-\frac{2\kappa(\alpha+2)}{\alpha}t-c\alpha\right]^{-\frac{1}{\alpha}}$,$c\in\mathbf{R}$。所以方程(1)的一个显式解析解为 $u=x^{\frac{2}{\alpha}}\left[-\frac{2\kappa(\alpha+2)}{\alpha}t-c\alpha\right]^{-\frac{1}{\alpha}}$,$c\in\mathbf{R}$,$\alpha\neq0$。

3.5 对算子 $X_4+\varepsilon X_1,\varepsilon=\pm1$,方程(1)的群不变解与显式解析解

算子 $X_4+\varepsilon X_1,\varepsilon=\pm1$ 的不变量为 $\alpha\varepsilon t+\ln|x|,x^{-\frac{2}{\alpha}}u$,方程(1)的解析表达式可写为 $u=x^{\frac{2}{\alpha}}f(z)$,$z=\alpha\varepsilon t+\ln|x|,\varepsilon=\pm1$,这里 f 满足方程:

$$\kappa f^{\alpha}\left[\frac{2}{\alpha}\left(\frac{2}{\alpha}+1\right)f+\left(\frac{4}{\alpha}+3\right)f'+f''+\alpha f^{-1}f'^2\right]-\alpha\varepsilon f'=0。\tag{5}$$

特别地取 $\alpha=-2$,由观察法发现 $f(z)=c,c\neq0,c\in\mathbf{R}$ 是方程(5)的一个平凡解。从而求得方程(1)的一个显式解析解为 $u=\frac{c}{x}$,$c\neq0$,$c\in\mathbf{R}$,$\alpha=-2$。

3.6 对算子 $X_1+\varepsilon X_2,\varepsilon=\pm1$,方程(1)的群不变解与显式解析解

算子 $X_1+\varepsilon X_2,\varepsilon=\pm1$ 的不变量为 $x+\varepsilon t,u$,方程(1)的解可假设为 $u=f(z),z=x+\varepsilon t,\varepsilon=\pm1$,其中 f 满足方程:

$$\varepsilon f'-\kappa\alpha f^{\alpha-1}f'^2-\kappa f^{\alpha}f''=0。\tag{6}$$

特别地取 $\alpha=1$,方程(6)简化为 $\varepsilon f'-\kappa(ff')'=0$,其隐式通解为 $\kappa\varepsilon f-c_1\ln|\varepsilon f+c_1|=z+c_2,c_1,c_2\in\mathbf{R}$。因此求得方程(1)的一个隐式解析解为:

$$u=f(z),\kappa\varepsilon f-c_1\ln|\varepsilon f+c_1|=z+c_2,c_1,c_2\in\mathbf{R},z=x+\varepsilon t,\varepsilon=\pm1,\alpha=1。\tag{7}$$

另外对 $\alpha=1$,利用幂试探函数法,设 $f(z)=az+b,a,b\in\mathbf{R}$ 是方程(6)的解,于是把 $f(z)=az+b,a,b\in\mathbf{R}$ 代入方程(6),解得 $a=\frac{\varepsilon}{\kappa},b\in\mathbf{R}$。从而求得方程(1)的一个显式解析解为:

$$u=\frac{\varepsilon}{\kappa}(x+\varepsilon t)+b,\ b\in\mathbf{R},\varepsilon=\pm1,\alpha=1。\tag{8}$$

注 方程(1)的显式解析解(8)是隐式解析解(7)中积分常数 $c_1=0$ 的特殊情况。

3.7 对算子 $X_3+\varepsilon X_2,\varepsilon=\pm1$,方程(1)的群不变解与显式解析解

算子 $X_3+\varepsilon X_2,\varepsilon=\pm1$ 的不变量为 $\alpha\varepsilon x+\ln t,t^{\frac{1}{\alpha}}u$,方程(1)的解可表示为 $u=t^{-\frac{1}{\alpha}}f(z),z=\alpha\varepsilon x+\ln t$,$\varepsilon=\pm1$,这里 f 满足方程:

$$\kappa\alpha^3f^{\alpha}f''+\alpha f'-\kappa\alpha^4f^{\alpha-1}f'^2-f=0。\tag{9}$$

特别地取 $\alpha=1$,方程(9)简化为 $\kappa(ff''-f'^2)+f'-f=0$,由观察法可知 $f(z)=ce^z,c\in\mathbf{R}$ 是该方程的解。因此求得方程(1)的一个显式解析解为 $u=ce^{\varepsilon x}$,$c\in\mathbf{R}$,$\varepsilon=\pm1$,$\alpha=1$。

3.8 对算子 $X_3+\beta X_4, \beta\in \mathbf{R}, \beta\neq 0$，方程(1)的群不变解与显式解析解

算子 $X_3+\beta X_4, \beta\in \mathbf{R}, \beta\neq 0$ 的不变量为 $xt^{-\beta}, t^{-\frac{2\beta-1}{\alpha}}u$，方程(1)的解可以表示为 $u=t^{\frac{2\beta-1}{\alpha}}f(z), z=xt^{-\beta}, \beta\in \mathbf{R}, \beta\neq 0$，其中 f 满足方程：

$$\kappa\alpha f^{\alpha}f''+\kappa\alpha^2 f^{\alpha-1}f'^2+(1-2\beta)f=0。\tag{10}$$

特别地取 $\alpha=1, \beta\neq\frac{1}{2}$，用试探函数法，设 $f(z)=az^2+bz+c, a, b, c\in \mathbf{R}$ 是方程(10)的解，于是将 $f(z)=az^2+bz+c, a, b, c\in \mathbf{R}$ 代入方程(10)，解得 $a=\frac{2\beta-1}{6\kappa}, c=\frac{3b^2\kappa}{4\beta-2}, b\in \mathbf{R}$。故方程(1)的一个显式解析解为：

$$u=t^{2\beta-1}\left(\frac{2\beta-1}{6\kappa}x^2t^{-2\beta}+bxt^{-\beta}+\frac{3b^2\kappa}{4\beta-2}\right),\ b\in \mathbf{R},\ \alpha=1,\ \beta\neq\frac{1}{2}。$$

类似地，如果 $\alpha=1, \beta=\frac{1}{2}$，方程(10)简化为 $ff''+f'^2=0$，通解为 $f(z)=\sqrt{c_1z+c_2}, c_1, c_2\in \mathbf{R}$，从而方程(1)的一个显式解析解为 $u=\sqrt{c_1xt^{-\frac{1}{2}}+c_2}$，$c_1$，$c_2\in \mathbf{R}$，$\alpha=1$，$\beta=\frac{1}{2}$。

类似地取 $\alpha=1, \beta\geqslant\frac{1}{2}$，用试探函数法，设 $f(z)=az+b, a, b\in \mathbf{R}$ 是方程(10)的解，于是将 $f(z)=az+b, a, b\in \mathbf{R}$ 代入方程(10)，解得 $a=\pm\sqrt{\frac{2\beta-1}{4\kappa}}, b\in \mathbf{R}$。求得方程(1)的一个显式解析解为 $u=\pm\sqrt{\frac{2\beta-1}{4\kappa}}xt^{-\beta}+b$，$b\in \mathbf{R}$，$\alpha=2$，$\beta\geqslant\frac{1}{2}$。

另外，如果 $\beta=\frac{1}{2}$，方程(10)简化为 $ff''+\alpha f'^2=0$，通解为 $f(z)=c_1e^{c_2z}$，c_1，$c_2\in \mathbf{R}, \alpha=-1$；当 $\alpha\neq-1$ 时方程(10)的通解为 $f(z)=[c_1((\alpha+1)z+c_2)]^{\frac{1}{\alpha+1}}$，$c_1$，$c_2\in \mathbf{R}$。因此得方程(1)的一个显式解析解分别为：

$$u=c_1e^{c_2z},\ z=xt^{-\frac{1}{2}},\ c_1,\ c_2\in \mathbf{R},\ \alpha=-1,$$

$$u=[c_1((\alpha+1)xt^{-\frac{1}{2}}+c_2)]^{\frac{1}{\alpha+1}},\ c_1,\ c_2\in \mathbf{R},\ \alpha\neq-1,\ \alpha\neq 0。$$

4 广义热传导方程(1)的行波解

广义热传导方程(1)的行波解设为 $u(t, x)=u(\xi)$，$\xi=x-ct$，这里 c 为常数，代入方程(1)得：

$$-c\frac{du}{d\xi}=\kappa\frac{d}{d\xi}\left(u^{\alpha}\frac{du}{d\xi}\right),$$

该方程两边关于 ξ 积分一次得 $\kappa(u^{\alpha+1})'-c(\alpha+1)u=A(\alpha+1)$，其中 A 为积分常数。对特殊常数 $A=0$ 采用试探函数法，假设试探函数为一幂函数 $u=B(\xi-\xi_0)^b, \xi_0$ 为任意常数，代入上式得 $b=\frac{1}{\alpha}, B=-\left(\frac{\alpha c}{\kappa}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$，因而求得方程(1)的行波解为：

$$u=\left[-\frac{\alpha c}{\kappa}(x-ct-\xi_0)\right]^{\frac{1}{\alpha}}。\tag{11}$$

利用算子 X_3 对应的单参数李群 $\bar{x}=x, \bar{t}=e^{\alpha a}t, \bar{u}=e^{-a}u$，这里 a 是参数，注意到(11)式是方程(1)的解，则广义热传导方程(1)的行波解为 $u=e^{a}\left[-\frac{\alpha c}{\kappa}(x-ce^{\alpha a}t-\xi_0)\right]^{\frac{1}{\alpha}}$。

类似地，算子 X_4 对应的单参数李群为 $\bar{x}=e^{\alpha a}x, \bar{t}=t, \bar{u}=e^{2a}u$，其中 a 为参数，因(11)式是方程(1)的解，所以又可得到广义热传导方程(1)的另一个行波解为 $u=e^{-2a}\left[-\frac{\alpha c}{\kappa}(e^{\alpha a}x-ct-\xi_0)\right]^{\frac{1}{\alpha}}$。

5 结论

利用经典的李群分析法[9-11]找到了一维广义热传导方程(1)所接受的李群，给出了一维广义热传导方程(1)决定方程的通解、对称、群不变解、约化的常微分方程以及一些显式解析解。特别地，用试探函数法和观察法找到了许多约化的常微分方程的显式解析解，从而得到一维广义热传导方程(1)的诸多显式解析解。另外，用试探

函数法和解的群变换找到了一维广义热传导方程(1)的许多行波解。

对于一维广义热传导方程(1)的数值解来说,精确解更有助于验算数值解的正确性和鉴定所使用数值算法的优劣,利用显式解析解可以验证在相同参数条件下得到的数值解的可靠性,为今后进一步讨论这些解的实际意义奠定理论基础,更为工程上的实际应用提供可靠的理论依据和参考。

已找到的这些新结果,对进一步丰富和发展一维广义热传导方程(1)的解法研究是有价值和意义的;更多的解法技术和新的显式解析解值得今后进一步探索和深思。

参考文献:

[1] 刘式适,刘式达. 物理学中的非线性方程[M]. 第 2 版. 北京:北京大学出版社,2012.
LIU S S,LIU S D. Nonlinear equations in physics[M]. Second edition. Beijing:Peking University Press,2012.

[2] 范恩贵. 可积系统与计算机代数[M]. 北京:科学出版社,2004.
FAN E G. Integrable systems and computer algebra[M]. Beijing:Science Press,2004.

[3] BIRKHOFF G. Hydrodynamics,a study in logic,fact,and similitude[M]. Princeton:Princeton University Press,1950.

[4] BIRKHOFF G. Hydrodynamics,a study in logic,fact,and similitude[M]. Revised edition. Princeton:Princeton University Press,1960.

[5] 田畴. 李群及其在微分方程中的应用[M]. 北京:科学出版社,2001.
TIAN C. Lie group and its applications in differential equations[M]. Beijing:Science Press,2001.

[6] 潘祖梁. 非线性问题的数学方法及其应用[M]. 杭州:浙江大学出版社,1998.
PAN Z L. The mathematical methods and applications of nonlinear problems[M]. Hangzhou:Zhejiang University Press,1998.

[7] OLVER P J. Applications of Lie group to differential equation[M]. 2nd edition. New York:Springer,1993.

[8] BLUMAN G W,KUMEI S. Symmetries and differential equations[M]. New York:Springer,1989.

[9] OVSIANNIKO L V. Group analysis of differential equations[M]. New York:Academic Press,1982.

[10] MELESHKO S V. Methods for constructing exact solutions of partial differential equations,mathematical and analytical techniques with applications to engineering[M]. New York:Springer,2005.

[11] GRIGORIEV Y N,IBRAGIMOV N H,KOVALEV V F,et al. Symmetries of integro-differential equations with applications in mechanics and plasma physics[M]. New York:Springer,2010.

[12] LIE S. Über die integration durch bestimmte integrale von einer klasse linearer partieller differentialgleichungen[J]. Archiv Der Mathematik,1881,6(3):328-368.

[13] OVSIANNIKO L V. On optimal system of subalgebra[J]. Doklady Mathematics,1993,333(6):702-704.

Exact Solutions of One-Dimensional General Heat Conduction Equation

LIN Fubiao[1], ZHANG Qianhong[1], ZHANG Jun[1], LONG Wen[2]

(1. School of Mathematics and Statistics, Guizhou University of Finance and Economics;

2. Guizhou Key Laboratory of Economics System Simulation, Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang 550025, China)

Abstract: [**Purposes**]The exact solutions of one-dimensional general heat conduction equation are constructed. [**Methods**]Searching for exact solutions of one-dimensional general heat conduction equation is reduced to study and find exact solutions of the corresponding to ordinary differential equation. [**Findings**] In addition, many new explicit analytical solutions and travelling wave solutions of one-dimensional general heat conduction equation are presented by use of the Lie group analysis method, transformation-trial function method and observational methods. [**Conclusions**]The new analytical solutions obtained here extend the existing study.

Keywords: one-dimensional general heat conduction equation;Lie group analysis method;transformation-trial function method;observational method;analytical solution;travelling wave solution

(责任编辑 方 兴)