2018 年 9 月　　重庆师范大学学报(自然科学版)　　Sep. 2018
第 35 卷 第 5 期　　Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)　　Vol. 35 No. 5

DOI:10.11721/cqnuj20180521

关于部分单 K_4-群的自同构群的刻画*

胡培杰，何立官
(重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331)

摘要:【目的】为了弱化有限群数量刻画的数量条件。【方法】用群的阶，最高阶元素的阶及次高阶元素的阶刻画单 K_4-群的自同构群。【结果】证明了 A_7，A_9，$G_2(3)$，$U_3(4)$，$U_3(9)$，${}^3D_4(2)$，$S_4(4)$，$L_3(8)$，$U_3(7)$，A_{10}，M_{11}，M_{12}，J_2，$S_z(8)$，$S_z(32)$ 和 $S_6(2)$ 的自同构群可以由群的阶，最高阶元素的阶唯一刻画，而 A_8，$U_5(2)$ 和 $L_3(5)$ 的自同构群可以由群的阶，最高阶元素的阶及次高阶元素的阶唯一刻画。【结论】结果说明上述单 K_4-群的自同构群最多需要 3 个数量就可以唯一决定。

关键词: 单 K_4-群的自同构群；最高阶元素的阶；次高阶元素的阶；刻画

中图分类号: O152.1　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1672-6693(2018)05-0083-05

众所周知，在过去 30 年里用群的阶和元素阶的集合刻画有限单群一直是有限群数量刻画领域中的一个重要课题。课题提出者施武杰教授和他的学生对此做出了大量工作，并证明了几乎所有有限单群都可以由群的阶和元素阶的集合唯一确定[1-7]。在此基础上，俄罗斯数学家 Mazurov 等人[8]于 2009 年最终完成了课题的证明。数量刻画的关键在于数量的多少，当然人们总是期望能用最少的数量去刻画群的性质结构。文献[9-16]仅用群的阶和最高阶元素的阶(个别情形用到了次高阶元素的阶)分别刻画了单 K_3-群、单 K_3-群的自同构群、部分单 K_4-群、散在单群、散在单群的自同构群。本文将继续这一工作，用群的阶与高阶元素的阶刻画单 K_4-群的自同构群。

本文所讨论的群均为有限群，$\pi_e(G)$ 表示群 G 的元素阶的集合，$o_1(G)$，$o_2(G)$ 分别表示群 G 中最高阶元素和次高阶元素的阶。设 k 为一正整数，$\pi(k)$ 表示 k 的素因子之集，特别地，$\pi(G)=\pi(|G|)$。这里用 $\Gamma(G)$ 表示 G 的素图，$t(G)$ 表示 G 的素图的连通分支数，$\pi_i(i=1,2,\cdots)$ 表示 $\Gamma(G)$ 的连通分支所含顶点之集。如果 $2\mid|G|$，则设 $2\in\pi_1$[17]。其余符号及术语是标准的。

1 主要引理

引理 1[18]　设 G 是单 K_4-群，则 G 同构于下列群之一：

1) A_7，A_8，A_9，A_{10}，M_{11}，M_{12}，J_2，$S_z(8)$，$S_z(32)$，$L_3(4)$，$L_3(5)$，$L_3(7)$，$L_3(8)$，$L_3(17)$，$L_4(3)$，$S_4(4)$，$S_4(5)$，$S_4(7)$，$S_4(9)$，$S_6(2)$，$O_8^+(2)$，$G_2(3)$，$U_3(4)$，$U_3(5)$，$U_3(7)$，$U_3(8)$，$U_3(9)$，$U_4(3)$，$U_5(2)$，${}^3D_4(2)$，${}^2F_4(2)'$。

2) $L_2(q)$，q 是一个素数的方幂，满足 $q(q^2-1)=(2,q-1)\cdot 2^{n_1}\cdot 3^{n_2}\cdot p^{n_3}\cdot r^{n_4}$，其中 $n_i(i=1,2,3,4)$ 是正整数，p，r 为不同的素数。

引理 2[17]　设 G 的素图分支大于 1，则 G 的结构是如下之一：

1) G 是 Frobenius 群或者 2-Frobenius 群；

2) G 有一正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$，使得 H 和 G/K 是 π_1-群，K/H 是非交换单群，其中 $2\in\pi_1$，H 为幂零群，而且 $|G/K|\mid|\mathrm{Out}(K/H)|$。

引理 3[19]　设 G 是偶阶 Frobenius 群，K 是 Frobenius 核，H 是 Frobenius 补，则 $t(G)=2$ 且 $\Gamma(G)=\{\pi(H),\pi(K)\}$。

* **收稿日期:** 2017-09-28　**修回日期:** 2018-09-06　**网络出版时间:** 2018-09-26 13:25

资助项目: 国家自然科学基金(No. 11271301)；重庆市基础与前沿研究计划(No. cstc2015jcyjA00020)；重庆市教委科技项目(No. KJ1600325)

第一作者简介: 胡培杰，女，研究方向为有限群论，E-mail:hpjpeijie@126.com；**通信作者:** 何立官，男，副教授，博士，E-mail:guanlihe@126.com

网络出版地址: http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20180926.1325.008.html

引理4[19] 设G是偶阶Frobenius群,则$t(G)=2$,且G有正规列$1\lhd H\lhd K\lhd G$,使得$\pi(K/H)=\pi_2$,$\pi(H)\cup\pi(G/K)=\pi_1$,G/K和K/H均为循环群且满足$|G/K|\,|\,|\mathrm{Aut}(K/H)|$。特别地$|G/K|<|K/H|$,$G$可解。

引理5[20] 设π'-群H作用在π-群G上,且G和H中至少有一个可解,则对任意素数$p\,|\,|G|$,G中存在H-不变的Sylow p-子群,并且G的任意两个H-不变Sylow p-子群在$C_G(H)$下共轭。

引理6[12] 设$1\leqslant H<K\leqslant G$是群$G$的正规子群列,$\overline{K}=K/H$是非交换单群,则存在$G$的正规子群$C$,使得$\overline{K}\lesssim G/C\lesssim\mathrm{Aut}(\overline{K})$。

2 定理及其证明

引理1给出了所有的单K_4-群,本文将对引理1第一部分中的单K_4-群的自同构群进行讨论。

定理1 设G为有限群,M为下列单K_4-群:A_7,A_9,$G_2(3)$,$U_3(4)$,$U_3(9)$,${}^3D_4(2)$,$S_4(4)$,$L_3(8)$,$U_3(7)$,A_{10},M_{11},M_{12},J_2,$S_z(8)$,$S_z(32)$,$S_6(2)$。则$G\cong\mathrm{Aut}(M)$的充分必要条件是:i)$o_1(G)=o_1(\mathrm{Aut}(M))$; ii)$|G|=|\mathrm{Aut}(M)|$。

证明 必要性显然,下证充分性。

当$M=M_{11}$,M_{12},J_2时,证明可见文献[12];当$M=S_z(8)$,$S_z(32)$时,证明可见文献[13];当$M=S_6(2)$时,由于$|\mathrm{Out}(S_6(2))|=1$,故$\mathrm{Aut}(S_6(2))\cong S_6(2)$,其证明可见文献[14]。下面讨论余下的情形。

情形1,当$M=A_7$时,由文献[21]知$|G|=|\mathrm{Aut}(A_7)|=2^4\cdot3^2\cdot5\cdot7$且$o_1(G)=12$。此时7是$\Gamma(G)$的孤立点,从而$t(G)\geqslant2$。由引理2知$G$是Frobenius群或者2-Frobenius群或者G有一正规列$1\lhd H\lhd K\lhd G$,使得H和G/K是π_1-群,K/H是非交换单群,其中$2\in\pi_1$,H为幂零群,而且$|G/K|\,|\,|\mathrm{Out}(K/H)|$。

首先,证明G不是Frobenius群。

如果G是Frobenius群,则由引理3知$t(G)=2$且$\Gamma(G)=\{\pi(H),\pi(K)\}$,其中$K$是Frobenius核,$H$是Frobenius补。于是$K$要么为$\{2,3,5\}$-Hall子群,要么为Sylow 7-子群。设$S$为$K$的一个Sylow-子群,则有$|H|\,|\,(|S|-1)$。若$K$为Sylow 7-群,则$|H|\,|\,6$,矛盾。于是设$K$为$\{2,3,5\}$-Hall子群,考虑$K$的Sylow 5-子群,则$7|4$,矛盾。故$G$不是Frobenius群。

其次,证明G不是2-Frobenius群。

如果G是2-Frobenius群,由引理4知$t(G)=2$且G有正规列$1\lhd H\lhd K\lhd G$,使得$\pi(K/H)=\pi_2$,$\pi(H)\cup\pi(G/K)=\pi_1$,满足$|G/K|\,|\,|\mathrm{Aut}(K/H)|$,因为7是孤立点,所以$\pi_2=\{7\}$,因此$\pi(H)\cup\pi(G/K)=\{2,3,5\}$且$|K/H|=7$。又因为$|G/K|\,|\,|\mathrm{Aut}(K/H)|=6$,所以$5\nmid|G/K|$,从而比较阶知$5\,|\,|H|$。用$G$中的7阶元共轭作用在$H$上,由引理5知存在$H$的Sylow 5-子群$L$在该作用下不变。因为$|L|=5$,所以$7\nmid|\mathrm{Aut}(L)|$,故该作用为平凡作用,即$G$中有35阶元,矛盾。因此$G$不是2-Frobenius群。

因此,G有一正规列$1\lhd H\lhd K\lhd G$,使得H和G/K是π_1-群,K/H是非交换单群,其中$2\in\pi_1$,H为幂零群,而且$|G/K|\,|\,|\mathrm{Out}(K/H)|$。由7是$\Gamma(G)$的孤立点知$\pi(H)\cup\pi(G/K)\subseteq\{2,3,5\}$且$7\in\pi(K/H)$,从而$K/H\cong A_7$。又因$|\mathrm{Out}(A_7)|=2$,所以$|G/K|\,|\,2$。如果$|G/K|=1$,则$G/H=K/H\cong A_7$,从而$|H|=2$。用$G$中的7阶元共轭作用在$H$上,该作用平凡,这说明$G$中有14阶元,矛盾。于是设$|G/K|=2$,此时$|H|=1$,$K\cong A_7$,从而$G\cong A_7\times2$或$G\cong A_7\rtimes2$,其中2表示一个2阶循环群。如果$G\cong A_7\times2$,则$G$有14阶元,矛盾。于是$G\cong A_7\rtimes2$,即$G\cong\mathrm{Aut}(A_7)$。

情形2,当$M=U_3(4)$时,由文献[21]知$|G|=|\mathrm{Aut}(M)|=2^8\cdot3\cdot5^2\cdot13$且$o_1(G)=16$,此时13为$\Gamma(G)$的孤立点。

类似情形1的证明可得G有一正规列$1\lhd H\lhd K\lhd G$,使得H和G/K是π_1-群,K/H是非交换单群,其中$2\in\pi_1$,H为幂零群。由13是$\Gamma(G)$的孤立点知$\pi(H)\cup\pi(G/K)\subseteq\{2,3,5\}$且$13\in\pi(K/H)$,从而$K/H\cong U_3(4)$。由引理6知,存在$G$的正规子群$C$,使得$U_3(4)\lesssim G/C\lesssim\mathrm{Aut}(U_3(4))$。

如果$G/C\cong\mathrm{Aut}(U_3(4))$,则$|C|=1$,从而$G\cong\mathrm{Aut}(U_3(4))$。

如果G/C同构于$\mathrm{Aut}(U_3(4))$的真子群,那么$|C|\neq1$,此时$2\,|\,|C|$且$|C|\,|\,4$。用G中的13阶元共轭作用在C上,该作用平凡,这说明G中有26阶元,矛盾。即$G\cong\mathrm{Aut}(U_3(4))$。

类似地,可以证明当$M=G_2(3)$,$U_3(9)$,$S_4(4)$和$L_3(8)$时,有$G\cong\mathrm{Aut}(M)$。

情形 3，当 $M=U_3(7)$ 时，由文献[20]知 $|G|=|\mathrm{Aut}(M)|=2^8\cdot 3\cdot 7^3\cdot 43$ 且 $o_1(G)=56$，此时 43 为 $\Gamma(G)$ 的孤立点。由引理 2 知 G 是 Frobenius 群或者 2-Frobenius 群或者 G 有一正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$，使得 H 和 G/K 是 π_1-群，K/H 是非交换单群，其中 $2\in\pi_1$，H 为幂零群，而且 $|G/K|\,|\,|\mathrm{Out}(K/H)|$。

类似情形 1 的证明知 G 不是 Frobenius 群。

下面证明 G 也不是 2-Frobenius 群。如果 G 是 2-Frobenius 群，由引理 4 知 $t(G)=2$ 且 G 有正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$，使得 $\pi(K/H)=\pi_2$，$\pi(H)\cup\pi(G/K)=\pi_1$，满足 $|G/K|\,|\,|\mathrm{Aut}(K/H)|$。因为 43 是 $\Gamma(G)$ 的孤立点，所以 $\pi_2=\{43\}$，因此 $\pi(H)\cup\pi(G/K)=\{2,3,7\}$ 且 $|K/H|=43$。又因为 $|G/K|\,|\,|\mathrm{Aut}(K/H)|=42$，比较阶知 $7\,|\,|H|$。用 G 中的 43 阶元 g 共轭作用在 H 上，由引理 5 知存在 H 的 Sylow 7-子群 L 在该作用下不变，其中 $|L|\,|\,7^3$。显然 $\Omega_1(Z(L))$ 是初等交换 7-群，且 $\Omega_1(Z(L))$ 在 g 的作用下不变。又因为 $43\nmid|\mathrm{Aut}(\Omega_1(Z(L)))|$，故该作用为平凡作用，即 G 中有 301 阶元，矛盾。因此 G 不是 2-Frobenius 群。

于是 G 有一正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$，使得 H 和 G/K 是 π_1-群，K/H 是非交换单群，其中 $2\in\pi_1$，H 为幂零群。由 43 是 $\Gamma(G)$ 的孤立点知 $\pi(H)\cup\pi(G/K)\subseteq\{2,3,7\}$ 且 $43\in\pi(K/H)$，从而 $K/H\cong U_3(7)$。由引理 6 知存在 G 的正规子群 C，使得 $U_3(7)\lesssim G/C\lesssim\mathrm{Aut}(U_3(7))$。再类似情形 2 的讨论知 $G\cong\mathrm{Aut}(U_3(7))$。

情形 4，当 $M=A_9$ 时，由文献[21]知 $|G|=|\mathrm{Aut}(M)|=2^7\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7$ 且 $o_1(G)=20$。

易证 G 有一正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$，使 K/H 为非交换单群，且 $\{5,7\}\subseteq\pi(K/H)$。事实上，令 $1=G_k\lhd G_{k-1}\lhd\cdots\lhd G_0=G$ 为 G 的一主群列，则存在正整数 i，使得 $\{5,7\}\cap\pi(G_i)\neq\varnothing$ 而 $\{5,7\}\cap\pi(G_{i+1})=\varnothing$。取 $K=G_i$，$H=G_{i+1}$，则 $1\lhd H\lhd K\lhd G$ 为 G 的正规列，而 K/H 为 G/H 的极小正规子群。断言 $\{5,7\}\subseteq\pi(K)$。如果 $7\in\pi(K)$，而 $5\notin\pi(K)$，那么 $5\in\pi(G/K)$。由 Frattini 论断有 $G=N_G(S_7)K$，其中 S_7 为 K 的一个 Sylow 7-子群，于是 $5\in\pi(N_G(S_7))$，从而 G 中有 35 阶元，矛盾，故 $5\in\pi(K)$。同理可证当 $5\in\pi(K)$，$7\in\pi(K)$，所以 $\{5,7\}\subseteq\pi(K)$，即 $\{5,7\}\subseteq\pi(K/H)$。因 K/H 为同构单群的直积，故 K/H 为非交换单群。而由 $|K/H|\,|\,2^7\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7$ 知 K/H 同构于 A_7，A_8，$L_3(4)$ 或 A_9。

设 K/H 同构于 A_7，A_8 或 $L_3(4)$。令 $\overline{K}=K/H$，考虑 G 作用在 $\overline{K}$ 上，则 $G/C_G(\overline{K})$ 同构于 $\mathrm{Aut}(\overline{K})$ 的一个子群，从而 $|G/C_G(\overline{K})|\,|\,|\mathrm{Aut}(\overline{K})|$，比较阶有 $3\in\pi(C_G(\overline{K}))$，说明 $\overline{G}=G/H$ 有 21 阶元，矛盾。

故 $K/H\cong A_9$。因为 $K/H\cong A_9$ 中有 15 阶元，所以 G 中有 15 阶元。如果 $|G/K|=1$，那么 $G/H=K/H\cong A_9$，于是 $|H|=2$。用 G 中的 15 阶元共轭作用在 H 上，该作用平凡，说明 G 中有 30 阶元，矛盾。故 $|G/K|=2$，此时 $G\cong A_9\times 2$ 或 $G\cong A_9\rtimes 2$。如果 $G\cong A_9\times 2$，则 G 有 30 阶元，矛盾。故 $G\cong A_9\rtimes 2$，即 $G\cong\mathrm{Aut}(A_9)$。

情形 5，当 $M=A_{10}$ 时，由文献[21]知 $|G|=|\mathrm{Aut}(M)|=2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7$ 且 $o_1(G)=30$。

类似情形 4 证明可得 G 有一正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$，使得 K/H 为非交换单群，且 $\{5,7\}\subseteq\pi(K/H)$。而由 $|K/H|\,|\,2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7$ 知 K/H 同构于 A_7，A_8，A_9，A_{10}，J_2 或 $L_3(4)$。

设 K/H 同构于 A_7，A_8，A_9 或 $L_3(4)$。令 $\overline{K}=K/H$，考虑 G 作用在 $\overline{K}$ 上，则 $G/C_G(\overline{K})$ 同构于 $\mathrm{Aut}(\overline{K})$ 的一个子群，从而 $|G/C_G(\overline{K})|\,|\,|\mathrm{Aut}(\overline{K})|$，于是有 $5\in\pi(C_G(\overline{K}))$，说明 $\overline{G}=G/H$ 有 35 阶元，矛盾。设 $K/H\cong J_2$。取 G 中的 30 阶元 y 共轭作用在 K/H 上，有 $(K/H)^y=K/H=J_2$，故 $y\in\mathrm{Aut}(J_2)$，但 $\mathrm{Aut}(J_2)$ 没有 30 阶元，即 $y\in C_G(K/H)$。由于 $5\,|\,|yH|$，说明 $\overline{G}=G/H$ 有 35 阶元，矛盾。

故设 $K/H\cong A_{10}$。因为 $K/H\cong A_{10}$ 中有 21 阶元，所以 G 中也有 21 阶元。如果 $|G/K|=1$，则 $G/H=K/H\cong A_{10}$，于是 $|H|=2$。用 G 中的 21 阶元共轭作用在 H 上，该作用平凡，说明 G 中有 42 阶元，矛盾。设 $|G/K|=2$，此时 $|H|=1$，从而 $G\cong A_{10}\times 2$ 或 $G\cong A_{10}\rtimes 2$。如果 $G\cong A_{10}\times 2$，则 G 有 42 阶元，矛盾。故 $G\cong A_{10}\rtimes 2$，即 $G\cong\mathrm{Aut}(A_{10})$。

类似地，可以证明当 $M={}^3D_4(2)$ 时，有 $G\cong\mathrm{Aut}({}^3D_4(2))$。　　证毕

定理 2　设 G 为有限群，M 为单 K_4-群：A_8，$U_5(2)$ 或 $L_3(5)$，则 $G\cong\mathrm{Aut}(M)$ 的充分必要条件是：i) $o_i(G)=o_i(\mathrm{Aut}(M))$，$i=1,2$；ii) $|G|=|\mathrm{Aut}(M)|$。

证明　必要性显然，下证充分性。

情形 1，当 $M=A_8$ 时，由文献[21]知 $|G|=|\mathrm{Aut}(M)|=2^7\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$ 且 $o_1(G)=15$，$o_2(G)=12$。此时 7 为 $\Gamma(G)$ 的孤立点。

类似定理 1 证明中的情形 1 可得 G 有一正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$，使得 H 和 G/K 是 π_1-群，K/H 是非交换单

群,其中 $2\in\pi_1$,H 为幂零群,且 $|G/K|\,|\,|\mathrm{Out}(K/H)|$。而由 $|K/H|\,|\,2^7\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$ 知 $K/H\cong A_7$ 或 $K/H\cong A_8$。

设 $K/H\cong A_7$,因为 $|\mathrm{Out}(A_7)|=2$,所以 $|G/K|\,|\,2$,可得 $2\,|\,|H|$。用 G 中一 7 阶元 g 共轭作用在 H 上,则存在 H 的 Sylow 2-子群 S 在该作用下不变。显然 $|S|\,|\,2^4$。考虑 $\Omega_1(Z(S))$,有 $\Omega_1(Z(S))$ 也在 g 的作用下不变。由 $|\Omega_1(Z(S))|\,|\,2^4$ 知 $7\nmid|\mathrm{Aut}(\Omega_1(Z(S)))|$,因此 g 作用在 $\Omega_1(Z(S))$ 上为平凡作用,即 G 中有 14 阶元,矛盾。

故设 $K/H\cong A_8$。由引理 6 知,存在 G 的正规子群 C,使得 $A_8\lesssim G/C\lesssim \mathrm{Aut}(A_8)$。再类似定理 1 证明中情形 2 的讨论知 $G\cong\mathrm{Aut}(A_8)$。

类似可证当 $M=U_5(2)$ 时,有 $G\cong\mathrm{Aut}(U_5(2))$。

情形 2,当 $M=L_3(5)$ 时,由文献[21]知 $|G|=|\mathrm{Aut}(M)|=2^6\cdot 3\cdot 5^3\cdot 31$ 且 $o_1(G)=31$,$o_2(G)=24$。此时 31 为 $\Gamma(G)$ 的孤立点,从而 $t(G)\geqslant 2$。

类似定理 1 证明中的情形 1 知 G 不是 Frobenius 群。下面证明 G 也不是 2-Frobenius 群。如果 G 是 2-Frobenius 群,由引理 4 知 $t(G)=2$ 且 G 有正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$,使得 $\pi(K/H)=\pi_2$,$\pi(H)\cup\pi(G/K)=\pi_1$,满足 $|G/K|\,|\,|\mathrm{Aut}(K/H)|$。因为 31 是 $\Gamma(G)$ 的孤立点,所以 $\pi_2=\{31\}$,因此 $\pi(H)\cup\pi(G/K)=\{2,3,5\}$ 且 $|K/H|=31$。又因为 $|G/K|\,|\,|\mathrm{Aut}(K/H)|=30$,比较阶知 $2\,|\,|H|$。用 G 中的 31 阶元 g 共轭作用在 H 上,由引理 5 知存在 H 的 Sylow 2-子群 L 在该作用下不变,其中 $|L|\,|\,2^6$。显然 $\Omega_1(Z(L))$ 是初等交换 2-群,且 $\Omega_1(Z(L))$ 在 g 的作用下不变。因为 $o_2(G)=24$,所以 G 中有 8 阶元,从而 $|\Omega_1(Z(L))|\,|\,2^4$,因此 $31\nmid|\mathrm{Aut}(\Omega_1(Z(L)))|$,故该作用为平凡作用,即 G 中有 62 阶元,矛盾。因此 G 不是 2-Frobenius 群。

于是 G 有一正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$,使得 H 和 G/K 是 π_1-群,K/H 是非交换单群,其中 $2\in\pi_1$,H 为幂零群。由 31 是 $\Gamma(G)$ 的孤立点知 $\pi(H)\cup\pi(G/K)\subseteq\{2,3,5\}$ 且 $31\in\pi(K/H)$,从而 $K/H\cong L_3(5)$。由引理 6 知,存在 G 的正规子群 C 使得 $L_3(5)\lesssim G/C\lesssim\mathrm{Aut}(L_3(5))$。再类似定理 1 证明中情形 2 的讨论知 $G\cong\mathrm{Aut}(L_3(5))$。 证毕

注 对于引理 1 中第一部分剩余的单 K_4-群:$L_3(4)$,$L_3(7)$,$L_3(17)$,$L_4(3)$,$S_4(5)$,$S_4(7)$,$S_4(9)$,$O_8^+(2)$,$U_3(5)$,$U_3(8)$,$U_4(3)$,${}^2F_4(2)'$。因其自同构群很难由群阶和最高阶元的阶唯一决定,本文暂不讨论。

参考文献:

[1] SHI W J. A new characterization of the sporadic simple groups[C]//CHENG K N, LEONG Y K. Proceedings of the 1987 Singapore group theory conference. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1989: 531-540.

[2] SHI W J, BI J X. A characterization of the alternating groups[J]. Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 1962, 16(1): 81-90.

[3] SHI W J, BI J X. A characterization of Suzuki-Ree-Groups[J]. Science in China, Ser A, 1991, 34(1): 14-19.

[4] SHI W J, BI J X. A characteristic property for each finite projective special linear groups[J]. Lecture Notes in Math, 1990, 1456: 171-180.

[5] SHI W J. Pure quantitative characterization of finite groups[J]. Progressin Nature Science, 1994, 4(3): 316-326.

[6] CAO H P, SHI W J. Pure quantitative characterization of finite projective special unitary groups[J]. Science in China, Ser A, 2002, 45: 761-772.

[7] XU M C, SHI W J. Pure quantitative characterization of finite simple groups ${}^2D_n(q)$ and $D_l(q)$ (l odd)[J]. Algebra Colloquium, 2003, 10: 427-443.

[8] VASIL'EV A V, GRECHKOSEEVA M A, MAZUROV V D. Characterization of the finite simple groups by spectrum and order[J]. Algebra and Logic, 2009, 48(6): 385-409.

[9] HE L G, CHEN G Y. A new characterization of simple K_3-groups[J]. Communications in Algebra, 2012, 40(10): 3903-3911.

[10] 何立官,徐海静. 关于单 K_3-群的自同构群的刻画[J]. 数学进展, 2015, 44(3): 363-368.
HE L G, XU H J. A characterization of automorphism groups of simple K_3-groups[J]. Advances in Mathematics (CHINA), 2015, 44(3): 363-368.

[11] 何立官,陈贵云. 关于型为 $L_2(p)$ 的单 K_4-群的一个新刻画[J]. 数学进展, 2014, 43(5): 667-670.
HE L G, CHEN G Y. A new characterization of simple K_4-groups with type $L_2(p)$[J]. Advances in Mathematics (CHINA), 2014, 43(5): 667-670.

[12] 高彦伟,曹洪平. 关于散在单群的自同构群的一个新刻画[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2013, 38(2): 1-5.
GAO Y W, CAO H P. On a new characterization of the automorphism groups in sporadic simple groups[J]. Journal of Southwest China Normal University (Natural Science), 2013, 38(2): 1-5.

[13] 何立官,陈贵云. 关于 $3'$-单 K_4-群及其自同构群的新刻画[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2013, 36(4): 540-543.
HE L G, CHEN G Y. A new characterization of $3'$-simple K_4-groups and their automorphism groups[J]. Journal of Shanxi University (Natural Science), 2013, 36(4): 540-543.

[14] HE L G, CHEN G Y. A new characterization simple K_4-

groups[J]. Journal of Mathematical Research with Applications, 2015, 35(4): 400-406.

[15] HE L G, CHEN G Y, XU H J. A new characterization of sporadic simple groups[J]. Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2013, 30: 373-392.

[16] 伍星，马玉龙，刘海林. 自同构群的阶等于其阶两倍的有限 p-群[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2017, 31(12): 189-191.

WU X, MA Y L, LIU H L. A finite p-group whose order of its automorphism group is equal to twice its order[J]. Journal of Chongqing University of Technology (Natural Science), 2017, 31(12): 189-191.

[17] WILLIAMS J S. Prime graph components of finite group [J]. Algebra, 1981, 69: 487-513.

[18] BUGEAUD Y, CAO Z, MIGNOTTE M. On simple K_4-Groups[J]. Algebra, 2001, 241: 658-668.

[19] 陈贵云. 关于 Frobenius 群和 2-Frobenius 群[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 1995, 20(5): 485-487.

CHEN G Y. On structure of Frobenius group and 2-Frobenius group[J]. Journal of Southwest China Normal University (Natural Science), 1995, 20(5): 485-487.

[20] GORENSTEIN D. Finite Groups[M]. New York: Chelsea Publishing Company, 1980.

[21] CONWAY J H, CURTIS R T, NORTON S P, et al. Atlas of Finite Groups[M]. Oxford: Clarendon Press, 1985.

A Characterization of Automorphism Group of Some Simple K_4-Groups

HU Peijie, HE Liguan

(School of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [**Purposes**]It aims to find fewer numbers to characterize a finite group. [**Methods**] The automorphism groups of simple K_4-groups by using group order is characterized, the largest element order and the second largest element order. [**Findings**]The automorphism groups of A_7, A_9, $G_2(3)$, $U_3(4)$, $U_3(9)$, ${}^3D_4(2)$, $S_4(4)$, $L_3(8)$, $U_3(7)$, A_{10}, M_{11}, M_{12}, J_2, $S_z(8)$, $S_z(32)$ and $S_6(2)$ can be characterized by using group order and the largest element order. The automorphism groups of A_8, $U_5(2)$ and $L_3(5)$ can be characterized by using group order, the largest element order and the second largest element order. [**Conclusions**]The present study shows that the automorphism groups of above simple K_4-groups can be uniquely determined by at most three numbers.

Keywords: the automorphism groups of simple K_4-groups; the largest element order; the second largest element order; characterization

(责任编辑 许 甲)