DOI:10.11721/cqnuj20180609

求解一维线性双曲型方程的高精度紧致差分格式*

韩俊茹，葛永斌
(宁夏大学 数学统计学院，银川 750021)

摘要:【目的】双曲型方程是一类重要的偏微分方程，由于寻求问题本身的精确解比较困难，数值方法来求解此类方程有极具深远的意义和实际应用价值。【方法】首先对于一维的线性双曲型方程，在空间上采用 Kreiss 提出的四阶紧致差分公式进行逼近，时间上采用 Taylor 级数展开及截断误差修正的方法，推导出一个隐式的紧致差分格式。【结果】该格式在时间和空间上都有四阶精度，截断误差为 $O(\tau^4+h^4)$。【结论】采用 Fourier 方法分析了该格式的稳定性。数值实验证明提出的格式具有较好的稳定性和精确性。

关键词:线性双曲型方程;Padé 逼近;紧致格式;有限差分法

中图分类号:O221.6　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2018)06-0064-06

在偏微分方程中，有一类专门描述震动和波动现象的方程，称为一般线性双曲型方程。对于物理和生物领域的一些非线性现象，均可用此类方程来描述。例如，对流与扩散和反应与扩散之间的相互作用等。由于寻求问题本身的精确解比较困难，故用数值方法来求解此类方程具有深远的意义和实际的应用价值。

近些年来，国内外许多学者提出了求解一般线性双曲型方程数值解的方法[1-9]。Mohanty[1-2]提出了用于求解线性双曲型方程的无条件稳定的一维、二维和三维的有限差分格式，其截断误差为 $O(\tau^2+h^2)$。Liu 等人[3-4]提出了在 Dirichlet 和 Neumann 边界条件下，求解一维电报方程的无条件稳定的两层紧致差分格式。空间上采用四次样条方法，时间上应用广义梯形公式，当 $\theta\neq\frac{1}{3}$ 时，该格式的截断误差为 $O(\tau^2+h^4)$；当 $\theta=\frac{1}{3}$ 时，该格式的截断误差为 $O(\tau^3+h^4)$。Ding 等人[5-6]为了求解一维和二维电报方程，提出了一种条件稳定的高精度紧致差分格式。空间上采用四阶紧致差分公式，时间上采用截断误差修正法，其截断误差为 $O(\tau^4+h^4)$，稳定性条件为 $\frac{\tau^2}{h^2[6+\tau^2(2\alpha^2-\beta^2)]}<\frac{1}{6}$。Ding 等人[7]采用非线性样条方法提出了求解一维电报方程的差分格式，空间上采用非多项式参数的三次样条逼近，时间上采用紧致有限差分方法进行近似，其截断误差为 $O(\tau^4+h^4)$，稳定性条件为 $\frac{2c^2\tau^2}{h^2[12+\tau^2(\alpha^2+\beta^2)]}<\frac{1}{4}-\lambda_1$。Deng 等人[8]提出了求解二维线性双曲型方程的四阶紧致交替方向隐式(Alternating direction implicit method, ADI)格式，截断误差为 $O(\tau^4+h^4)$，稳定性条件为 $r_x+r_y<1+\frac{\Delta t^2}{12}(\rho^2-2\beta^2)$。

本文针对一维线性双曲型方程，在空间导数上利用 Kreiss 提出的四阶紧致差分公式逼近，在时间导数上采用 Taylor 级数展开并利用截断误差修正方法，得到一个在时间和空间上都达到四阶精度的紧致差分格式。然后利用 Fourier 方法分析了格式的稳定性。最后，对格式的稳定性和精确性进行数值验证。

1 差分格式的建立

考虑如下一维线性双曲型方程的初边值问题：

* **收稿日期**:2018-03-13　**修回日期**:2018-07-26　**网络出版时间**:2018-10-25 10:42
资助项目:国家自然科学基金(No. 11772165);宁夏自然科学基金(No. 2018AAC02003)
第一作者简介:韩俊茹，女，研究方向为偏微分方程数值解法，E-mail: hanjr1993@163.com;**通信作者**:葛永斌，男，教授，博士生导师，E-mail: gyb@nxu.edu.cn
网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20181025.1042.026.html

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}+2\alpha\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\beta^2 u(x,t)=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t),\alpha>\beta\geqslant 0,\tag{1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x),\tag{2}$$

$$u(a,t)=g_0(t),u(b,t)=g_1(t)。\tag{3}$$

其中:$(x,t)\in[a,b]\times(0,T]$,α,β 是常数,$\varphi(x)$,$\psi(x)$,$g_0(t)$ 和 $g_1(t)$ 均为已知函数,$u(x,t)$ 是未知函数,$f(x,t)$ 是源项。

将求解区域 $[a,b]$ 剖分为 N 个子区间:$a=x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{N-1},x_N=b$,并且定义 $h=\frac{b-a}{N}$,时间步长用 τ 表示。用 $u(x_i,t_n)$ 表示 $u(x,t)$ 在网格节点 (x_i,t_n) 处的函数值,其中 $x_i=a+ih,i=0,1,\cdots,N,t_n=n\tau,n\geqslant 0$。

首先,通过对时间二阶导数采用中心差分并保留截断误差主项,得到如下四阶差分近似:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^n=\frac{u_i^{n+1}-2u_i^n+u_i^{n-1}}{\tau^2}-\frac{\tau^2}{12}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\right)_i^n+O(\tau^4)=\delta_t^2 u_i^n-\frac{\tau^2}{12}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\right)_i^n+O(\tau^4),\tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n=\frac{u_i^{n+1}-2u_i^{n-1}}{2\tau}-\frac{\tau^2}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_i^n+O(\tau^4)=\delta_t u_i^n-\frac{\tau^2}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_i^n+O(\tau^4)。\tag{5}$$

对空间导数项利用 Kreiss[10] 提出的四阶紧致差分公式:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n=\frac{\delta_x^2}{1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2}u_i^n+O(h^4)。\tag{6}$$

将(4),(5)和(6)式代入(1)式得:

$$\delta_t^2 u_i^n-\frac{\tau^2}{12}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\right)_i^n+2\alpha\left(\delta_t u-\frac{\tau^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_i^n+\beta^2 u_i^n=\frac{\delta_x^2}{1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2}u_i^n+f_i^n+O(\tau^4+h^4)。\tag{7}$$

对(7)式中的 $\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_i^n$ 和 $\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\right)_i^n$ 利用原方程及(4),(5)式,令 $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^n+2\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n=q_i^n$,其中 $q_i^n=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n+f_i^n-\beta^2 u_i^n$。则有:

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_i^n=\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)_i^n-2\alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^n=\delta_t q_i^n-\frac{\tau^2}{6}\left(\frac{\partial^3 q}{\partial t^3}\right)_i^n-2\alpha\delta_t^2 u_i^n+\frac{\alpha\tau^2}{6}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\right)_i^n+O(\tau^4),\tag{8}$$

$$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\right)_i^n=\left(\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}\right)_i^n-2\alpha\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_i^n=\delta_t^2 q_i^n-2\alpha\delta_t q_i^n+4\alpha^2\delta_t^2 u_i^n-\frac{\tau^2}{12}\left(\frac{\partial^4 q}{\partial t^4}\right)_i^n+\frac{\alpha\tau^2}{3}\left(\frac{\partial^3 q}{\partial t^3}\right)_i^n-\frac{\alpha^2\tau^2}{3}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\right)_i^n+O(\tau^4)。\tag{9}$$

将(8),(9)式代入(7)式,并利用 $q_i^n=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n+f_i^n-\beta^2 u_i^n$,整理可得:

$$\left(1+\frac{\alpha^2\tau^2}{3}\right)\delta_t^2 u_i^n+2\alpha\delta_t u_i^n+\beta^2\left(1+\frac{\tau^2}{12}\delta_t^2+\frac{\alpha\tau^2}{6}\delta_t\right)u_i^n=$$
$$\frac{\delta_x^2}{1+\frac{h^2}{12}\delta_x^2}u_i^n+\left(\frac{\tau^2}{12}\delta_t^2+\frac{\alpha\tau^2}{6}\delta_t\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n+\left(1+\frac{\tau^2}{12}\delta_t^2+\frac{\alpha\tau^2}{6}\delta_t\right)f_i^n+O(\tau^4+h^4)。\tag{10}$$

对(10)式中的 $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n$ 采用四阶 Padé 紧致差分格式进行逼近,则有:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i+1}^n+10\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i-1}^n=12\,\frac{u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n}{h^2}+O(h^4)。\tag{11}$$

对(10)式化简,整理可得:

$$Au_i^{n+1}+B(u_{i+1}^{n+1}+u_{i-1}^{n+1})=Cu_i^n+D(u_{i+1}^n+u_{i-1}^n)+Eu_i^{n-1}+F(u_{i+1}^{n-1}+u_{i-1}^{n-1})+G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^{n+1}+$$
$$H\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i-1}^{n+1}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i+1}^{n+1}\right]+J\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n+K\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i-1}^n+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i+1}^n\right]+M\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i-1}^{n-1}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i+1}^{n-1}\right]+$$
$$L\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^{n-1}+Nf_i^{n+1}+O(f_{i+1}^{n+1}+f_{i-1}^{n+1})+Pf_i^n+Q(f_{i+1}^n+f_{i-1}^n)+Rf_i^{n-1}+S(f_{i+1}^{n-1}+f_{i-1}^{n-1})。\tag{12}$$

其中:

$$A=\frac{5\alpha}{6\tau}+\frac{5\alpha^2}{18}+\frac{5\beta^2}{72}+\frac{5}{6\tau^2}+\frac{5\alpha\beta^2\tau}{72},B=\frac{\alpha}{12\tau}+\frac{\alpha^2}{36}+\frac{\beta^2}{144}+\frac{1}{12\tau^2}+\frac{\alpha\beta^2\tau}{144},$$

$$C=\frac{-25\beta^2}{36}+\frac{5\alpha^2}{9}-\frac{2}{h^2}+\frac{5}{3\tau^2},D=\frac{-5\beta^2}{72}+\frac{\alpha^2}{18}+\frac{1}{h^2}+\frac{1}{6\tau^2},E=\frac{5\alpha}{6\tau}-\frac{5\alpha^2}{18}-\frac{5\beta^2}{72}-\frac{5}{6\tau^2}+\frac{5\alpha\beta^2\tau}{72},$$

$$F=\frac{\alpha}{12\tau}-\frac{\alpha^2}{36}-\frac{\beta^2}{144}-\frac{1}{12\tau^2}+\frac{\alpha\beta^2\tau}{144},G=\frac{5\alpha\tau+5}{72},H=\frac{\alpha\tau+1}{144},J=-\frac{5}{36},K=-\frac{1}{72},L=\frac{5-5\alpha\tau}{72},$$

$$M=\frac{1-\alpha\tau}{144},N=\frac{5\alpha\tau+5}{72},O=\frac{\alpha\tau+1}{144},P=\frac{25}{36},Q=\frac{5}{72},R=\frac{5-5\alpha\tau}{72},S=\frac{1-\alpha\tau}{144}。$$

(12)式即为求解一维线性双曲型方程(1)的四阶紧致差分格式,格式整体具有四阶精度。

因为格式是三层的,每一步推进都需要确定前两个时间步的值。初始时刻的值由(2)式给出,第一个时间步的值通过 Taylor 级数展开可得到一个与(12)式相匹配的四阶近似:

$$u_i^1=u_i^0+\tau\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n+\frac{\tau^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^n+\frac{\tau^3}{6}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_i^n+O(\tau^4)。\tag{13}$$

利用(1)式,有:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i^0=-\left(2\alpha\frac{\partial u}{\partial t}-\beta^2 u+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f\right)_i^0,\tag{14}$$

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_i^0=\left(-2\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\beta^2\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}+\frac{\partial f}{\partial t}\right)_i^0,\tag{15}$$

把(2),(14)和(15)式代入(13)式且略去高阶项,则有:

$$u_i^1=\left[1-\left(\beta^2\frac{\tau^2}{2}-\frac{\tau^3\alpha}{3}\right)\right]\varphi(x)+\left[\tau-2\left(\alpha\frac{\tau^2}{2}-\frac{\tau^3\alpha}{3}\right)-\frac{\tau^3\beta^2}{6}\right]\psi(x)+$$
$$\left(\frac{\tau^2}{2}-\frac{\tau^3\alpha}{3}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^2}\right)_i+\frac{\tau^3}{6}\left(\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}\right)_i+\left(\frac{\tau^2}{2}-\frac{\tau^3\alpha}{3}\right)f_i^0+\frac{\tau^3}{6}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_i^0。\tag{16}$$

2 稳定性分析

利用 Fourier 方法分析本文所提格式(12)式的稳定性。假设源项 f 的值精确且无误差,令 $u_i^n=\eta^n e^{i\omega x_i}$,$(u_{xx})_i^n=\xi^n e^{i\omega x_i}$,其中 ξ,η 为振幅,ω 为相位角,$i=\sqrt{-1}$ 为虚数单位。

引理 1[11] 实系数二次方程 $\lambda^2-b\lambda-c=0$ 的根按模不大于1的充分必要条件为 $|b|\leqslant 1-c\leqslant 2$。

证明 对于(6)式,可得:

$$\xi^n e^{i\omega x_i}(e^{i\omega}+e^{-i\omega})+10\xi^n e^{i\omega x_i}=\frac{12}{h^2}\eta^n e^{i\omega x_i}(e^{i\omega}-2+e^{-i\omega}),\tag{17}$$

对上式进行化简整理有:

$$\xi^n=\frac{12(\cos\omega-1)}{h^2(\cos\omega+5)}\eta^n。\tag{18}$$

对于(12)式,令 $v_i^{n+1}=u_i^n$,$f\equiv 0$,将其写为矩阵的形式,有:

$$\begin{bmatrix}A&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_i^{n+1}\\v_i^{n+1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{i+1}^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}\\v_{i+1}^{n+1}+v_{i-1}^{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C&E\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_i^n\\v_i^n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}D&F\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{i+1}^n+u_{i-1}^n\\v_{i+1}^n+v_{i-1}^n\end{bmatrix}+$$
$$\begin{bmatrix}G&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{xxi}^{n+1}\\v_{xxi}^{n+1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}H&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{xxi+1}^{n+1}+u_{xxi-1}^{n+1}\\v_{xxi+1}^{n+1}+v_{xxi-1}^{n+1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}J&+L\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{xxi}^n\\v_{xxi}^n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}K&M\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{xxi+1}^n+u_{xxi-1}^n\\v_{xxi+1}^n+v_{xxi-1}^n\end{bmatrix}。\tag{19}$$

令 $U_i^n=(u_i^n,v_i^n)^{\mathrm T}$,$U_i^n=\eta^n e^{i\omega x_i}$ 并将(18)式代入(19)式进行整理可得:

$$\begin{bmatrix}A+2B\cos\omega&0\\0&1\end{bmatrix}\eta^{n+1}=\begin{bmatrix}C+2D\cos\omega&E+2F\cos\omega\\1&0\end{bmatrix}\eta^{n+1}+$$
$$\frac{12(\cos\omega-1)}{h^2(\cos\omega+5)}\begin{bmatrix}G+2H\cos\omega&0\\0&0\end{bmatrix}\eta^{n+1}+\frac{12(\cos\omega-1)}{h^2(\cos\omega+5)}\begin{bmatrix}J+2K\cos\omega&L+2M\cos\omega\\0&0\end{bmatrix}\eta^{n+1}\tag{20}$$

从而可得(12)式的误差增长矩阵为:

$$\boldsymbol{G}=\frac{\eta^{n+1}}{\eta^{n}}=\begin{bmatrix}\dfrac{C+2D\cos\omega+\dfrac{12(\cos\omega-1)}{h^2(\cos\omega+5)}(J+2K\cos\omega)}{A+2B\cos\omega-\dfrac{12(\cos\omega-1)}{h^2(\cos\omega+5)}(G+2H\cos\omega)} & \dfrac{E+2F\cos\omega+\dfrac{12(\cos\omega-1)}{h^2(\cos\omega+5)}(L+2M\cos\omega)}{A+2B\cos\omega-\dfrac{12(\cos\omega-1)}{h^2(\cos\omega+5)}(G+2H\cos\omega)} \\ 1 & 0\end{bmatrix}，\tag{21}$$

则得上述误差增长矩阵的特征方程中的 b 和 c 的表达式如下：

$$b=\frac{C+2D\cos\omega+\dfrac{12(\cos\omega-1)}{h^2(\cos\omega+5)}(J+2K\cos\omega)}{A+2B\cos\omega-\dfrac{12(\cos\omega-1)}{h^2(\cos\omega+5)}(G+2H\cos\omega)}，\tag{22}$$

$$c=\frac{E+2F\cos\omega+\dfrac{12(\cos\omega-1)}{h^2(\cos\omega+5)}(L+2M\cos\omega)}{A+2B\cos\omega-\dfrac{12(\cos\omega-1)}{h^2(\cos\omega+5)}(G+2H\cos\omega)}。\tag{23}$$

由引理 $|b|\leqslant 1-c\leqslant 2\Rightarrow\begin{cases}c\geqslant -1\\ c-1\leqslant b\leqslant 1-c\end{cases}$，将(12)式的系数代入(22)和(23)式，并通过 $c\geqslant -1$ 可得到：

$$\frac{4\alpha}{3\tau}+\frac{\alpha\beta^2\tau}{9}+\left(\frac{\alpha}{3\tau}+\frac{\alpha\beta^2\tau}{36}\right)(1+\cos\omega)+\frac{12(1-\cos\omega)}{h^2(\cos\omega+5)}\left[\frac{\alpha\tau}{9}+\frac{\alpha\tau}{36}(1+\cos\omega)\right]\geqslant 0。\tag{24}$$

显而易见，(24)式恒成立。

又由 $c-1\leqslant b\leqslant 1+c$ 可得：

$$\left(\frac{\beta^2}{6}-\frac{2}{h^2}\right)(\cos\omega+1)+\left(\frac{2}{3}\beta^2+\frac{4}{h^2}\right)\geqslant 0，\tag{25}$$

$$\left(\frac{2\alpha^2}{9}-\frac{\beta^2}{9}+\frac{2}{3\tau^2}+\frac{1}{3h^2}\right)\cos\omega+\left(\frac{10\alpha^2}{9}-\frac{5\beta^2}{9}+\frac{10}{3\tau^2}-\frac{4}{3h^2}\right)\geqslant 0。\tag{26}$$

显而易见，(25)式恒成立。(26)式第一项中 $\frac{2\alpha^2}{9}-\frac{\beta^2}{9}+\frac{2}{3\tau^2}+\frac{1}{3h^2}>0$ 恒成立，当 $\cos\omega=-1$ 时，(26)式第一项取得最小值，则(26)式变为：

$$\frac{8\alpha^2}{9}-\frac{4\beta^2}{9}+\frac{8}{3\tau^2}-\frac{5}{3h^2}\geqslant 0，\tag{27}$$

求解(27)式，即可得(12)式稳定的充要条件为 $\frac{\tau^2}{h^2[6+\tau^2(2\alpha^2-\beta^2)]}\leqslant\frac{4}{15}$。　　证毕

3 数值实验

现考虑如下两个带有精确解的初边值问题验证本文(12)式的精确性和稳定性，采用本文(12)式进行计算，并分别与文献[5,7]中格式的计算结果进行比较。其中，均方根误差定义为 $\sigma_{\mathrm{RMS}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N-1}E_i}{N-1}}$，收敛阶定义为 $R_{\mathrm{rate}}=\log\frac{\sigma_{\mathrm{RMS}_1}}{\sigma_{\mathrm{RMS}_2}}\cdot\left(\log\frac{h_1}{h_2}\right)^{-1}$，$\sigma_{\mathrm{RMS}_1}$ 和 σ_{RMS_2} 为空间网格步长分别为 h_1 和 h_2 时的均方根误差。

问题 1[7]　$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\pi\frac{\partial u}{\partial t}+\pi^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\pi^2\sin(\pi x)[\sin(\pi t)+2\cos(\pi t)]$，$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant t\leqslant 1$，$u(x,0)=0$，$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\pi\sin(\pi x)$，$u(0,t)=u(1,t)=0$，精确解为 $u(x,t)=\sin(\pi x)\sin(\pi t)$。

问题 2[5]　$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\pi^2\frac{\partial u}{\partial t}+\pi^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\mathrm{e}^{-t}\sin(\pi x)$，$u(x,0)=\sin(\pi x)$，$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=-\sin(\pi x)\,u(0,t)=0$，$u(1,t)=0$。精确解为 $u(x,t)=\mathrm{e}^{-t}\sin(\pi x)$。

表 1 给出了采用本文格式对问题 1 当 $\tau=\frac{1}{200}$，$h=\frac{1}{100}$ 时，在 $t=0.5$ 时刻对不同 x 的绝对误差，并与文献[7]中格式的计算结果进行了比较。可以看出文献[7]中当 $\lambda_1=\frac{1}{6}$，$\lambda_2=\frac{2}{3}$ 时的绝对误差比本文格式的绝对误差大了

几个数量级;而文献[7]中的 $\lambda_1=\frac{1}{12}$, $\lambda_2=\frac{5}{6}$时的绝对误差与本文格式的绝对误差虽在同一个数量级上,但本文的结果略优于文献[7]。表2给出了问题1当 $\tau=\frac{1}{50}$时,在 $t=1$ 时刻对$\frac{\tau}{h}$取不同值时的RMS误差。本文(12)式的稳定性条件为$\frac{\tau}{h}\leqslant 1.264\ 91$,稳定性明显优于文献[7]中的两个格式,并且所得结果与理论分析相一致。表3给出了问题2在 $\tau=\frac{1}{200}$, $t=1$ 时刻对不同 h 的RMS误差及收敛阶,可以看出本文格式在取不同的网格步长时的计算结果均优于文献[5],从收敛阶可以看出本文格式具有四阶精度。

表1 当 $\tau=1/200$, $h=1/100$ 时,在 $t=0.5$ 时刻的问题1绝对误差

Tab. 1 Absolute error when $\tau=1/200$, $h=1/100$ and $t=0.5$ for Problem 1

x	文献[7] $\lambda_1=1/6,\lambda_2=2/3$	文献[7] $\lambda_1=1/12,\lambda_2=5/6$	本文格式(12)
0.2	$1.167\ 8\times10^{-5}$	$9.620\ 543\times10^{-10}$	$9.230\ 100\ 0\times10^{-10}$
0.4	$1.889\ 6\times10^{-5}$	$1.556\ 647\times10^{-9}$	$1.493\ 465\ 0\times10^{-9}$
0.6	$1.889\ 6\times10^{-5}$	$1.556\ 669\times10^{-9}$	$1.493\ 465\ 1\times10^{-9}$
0.8	$1.167\ 8\times10^{-5}$	$9.620\ 679\times10^{-10}$	$9.230\ 072\ 3\times10^{-10}$

表2 当 $\tau=1/50$ 时,在 $t=1$ 时刻问题1的RMS误差

Tab. 2 RMS error when $\tau=1/50$ and $t=1$ for Problem 1

τ/h	文献[7] $\lambda_1=1/6,\lambda_2=2/3$	文献[7] $\lambda_1=1/12,\lambda_2=5/6$	本文格式(12)
1.0	$1.623\ 9\times10^{8}$	$6.519\ 8\times10^{-8}$	$6.885\ 5\times10^{-8}$
1.1	$6.190\ 4\times10^{11}$	$6.209\ 8\times10^{-5}$	$1.352\ 8\times10^{-5}$
1.2	$2.114\ 8\times10^{16}$	$1.113\ 8\times10^{2}$	$2.491\ 3\times10^{-3}$
1.3	$2.114\ 8\times10^{16}$	$2.446\ 2\times10^{5}$	$2.917\ 8\times10^{3}$

表3 当 $\tau=1/200$, $t=1$ 时刻,问题2对不同 λ 的RMS误差及收敛阶

Tab. 3 RMS errors and the convergence rate when $\tau=1/200$, $\lambda=0.5$ for Problem 2

h	文献[5]	R_{rate}	本文格式(12)	R_{rate}
1/10	5.168×10^{-6}		5.081×10^{-6}	
1/20	3.296×10^{-7}	3.96	3.166×10^{-7}	4.00
1/40	2.078×10^{-8}	3.98	1.972×10^{-8}	4.00
1/80	1.255×10^{-9}	4.07	1.178×10^{-9}	4.09
1/160	2.677×10^{-11}	5.55	1.912×10^{-11}	5.95

4 结论

本文提出了一种新的隐式三层高精度紧致差分格式,用来求解一维线性双曲型方程,在时间和空间方向上均具有四阶精度。然后格式的稳定性采用Fourier方法分析,得到格式的稳定性条件为 $\frac{\tau^2}{h^2[6+\tau^2(2\alpha^2-\beta^2)]}\leqslant\frac{4}{15}$。最后通过两个数值算例进行数值验证,并将本文格式与文献[7]和文献[5]的格式进行比较。计算结果显示,本文的计算结果更为精确,稳定性条件也相较文献[7]中格式宽松,并且稳定性和精度与理论分析的结果相一致,从而充分的证明了本文格式的稳定性和准确性。

参考文献:

[1] MOHANTY R K. An unconditionally stable difference scheme for the one space dimensional linear hyperbolic equation[J]. Applied Mathematics Letters, 2004, 17(1): 101-105.

[2] MOHANTY R K. Stability interval for explicit difference schemes for multi-dimensional second order hyperbolic equations with significant first order space derivative terms[J]. Appl Math Comput, 2007, 190: 1683-1690.

[3] LIU L B, LIU H W. Quartic spline methods for solving one dimensional telegraphic equations[J]. Appl Math Comput, 2010, 216: 951-958.

[4] LIU L B, LIU H W. Compact difference schemes for solving telegraphic equations with Neumann boundary conditions[J]. Appl Math Comput, 2013, 219: 10112-10121.

[5] DING H F, ZHANG Y X. A new unconditionally stable compact difference scheme of $O(\tau^2+h^4)$ for the 1D linear hyperbolic equation[J]. Appl Math Comput, 2009, 207: 236-241.

[6] DING H F, ZHANG Y X. A new fourth-order compact finite difference scheme for the two- dimensional second order hyperbolic equation[J]. J Comput Appl Math, 2009, 230: 626-632.

[7] DING H F, ZHANG Y X, CAO J X, et al. A class of difference scheme for solving telegraph equation by new non-pol-

ynomial spline methods[J]. Appl Math Comput,2012,218:4671-4683.

[8] DENG D,ZHANG C. Application of a fourth-order compact ADI method to solve a two dimensional linear hyperbolic equation[J]. Intern J Computer Math,2013,90:273-291.

[9] 杨录峰.求解变系数对流扩散方程的高阶紧致差分格式[J].重庆理工大学学报(自然科学),2013,27(11):120-125.

YANG L F. A high-order compact finite difference scheme for solving the variable coefficient convection diffusion equations[J]. Journal of Chongqing University of Technology (Natural Science),2013,27(11):120-125.

[10] HIRSH R S. High order accurate solution of fluid mechanics problem by a compact differencing technique[J]. J Comput Phys,1975,19(1):90-109.

[11] 陆金甫.偏微分方程数值解法[M].北京:清华大学出版社,2004.

LU J F. Numerical methods for partial differential equations[M]. Beijing:Tsinghua University Press,2004.

A High-Order Compact Difference Scheme for Solving the One Dimensional Linear Hyperbolic Equation

HAN Junru, GE Yongbin

(School of Mathematics and Statistics, Ningxia University, Yinchuan 750021, China)

Abstract: [**Purposes**]Hyperbolic equations are an important class of partial differential equations. Because it is difficult to find the exact solution of the problem itself, use numerical methods for solving such equations. [**Methods**] Firstly, for the one dimensional linear hyperbolic equation, a high-order compact difference scheme is developed by using the fourth-order compact difference formula proposed by Kreiss in space direction and the Taylor series expansion and the truncation error correction method in time direction. [**Findings**] The truncation error of this method is $O(\tau^4+h^4)$. [**Conclusions**] Its stability criterion is determined by using Fourier analysis method. The numerical experiments are conducted and numerical results validate the stability and accuracy of the present scheme.

Keywords: linear hyperbolic equation; padéapproximation; compactscheme; finite difference method

(责任编辑 黄 颖)