运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20190209

多目标优化问题$(\boldsymbol{\varepsilon},\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$-拟真有效解的一个充分条件*

马圆圆，彭建文
(重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331)

摘要:【目的】对多目标优化问题$(\boldsymbol{\varepsilon},\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$-拟真有效解的充分条件进一步研究和推广。【方法】利用多目标优化问题的广义加权切比雪夫标量化问题或改进的加权切比雪夫标量化问题。【结果】在没有任何凸性假设的情况下,得到了多目标优化问题的$(\boldsymbol{\varepsilon},\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$-拟真有效解的一个新的充分条件。【结论】推广了已有文献中的结果。

关键词:多目标优化;近似拟真有效解;非线性标量化

中图分类号:O221.6 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2019)02-0006-05

多目标优化问题在许多领域如经济、工程、医学等方面都有着广泛的应用。在多目标优化问题中解的定义是十分重要的研究课题,因此,许多学者引进了各种意义下解的概念,主要有:有效解、弱有效解和各种真有效解。然而,多目标优化问题的有效解(或弱有效解)在非紧的情况下,往往并不存在,但其近似解在条件很弱的情况下可能是存在的。数值优化问题中,近似解的概念是由 Kutateladze[1] 在 1979 年首次提出的。在 1986 年,White[2] 研究了多目标优化问题的 6 种 $\boldsymbol{\varepsilon}$-近似有效解。1999 年,Liu[3] 提出了 $\boldsymbol{\varepsilon}$-真有效解的概念,并得出相关的标量化性质。2008 年 Beldman 等人[4] 给出了多目标优化问题$(\boldsymbol{\varepsilon},\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$-近似拟真有效解的概念。2013 年 Ghaznavi-ghosoni 等人[5] 给出了多目标优化问题 $\boldsymbol{\varepsilon}$-(弱,真)有效解的一些充分条件和必要条件。2015 年,Yue 和 Gao[6] 给出了多目标优化问题的$(\boldsymbol{\varepsilon},\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$-拟近似(弱)有效解的充分条件和必要条件。2017 年,Ghaznavi[7] 利用两种标量化方法给出了多目标优化问题的$(\boldsymbol{\varepsilon},\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$-拟近似(弱,真)有效解的充分条件。

本文对文献[7]中的多目标优化问题$(\boldsymbol{\varepsilon},\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$-近似拟真有效解的充分条件进行了改进,使得 λ_i 及 $\boldsymbol{\delta},\bar{\boldsymbol{\delta}},\boldsymbol{\varepsilon},\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$的取值范围变得更加广泛。

1 预备知识

在本文中,需要以下偏序关系:对任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$,$\boldsymbol{x}<\boldsymbol{y}\Leftrightarrow\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\in\operatorname{int}\mathbf{R}^n_+$,$\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{y}\Leftrightarrow\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n_+\setminus\{0\}$,$\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{y}\Leftrightarrow\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n_+$。

考虑如下的多目标优化问题:

$$(\mathrm{MOP})\qquad \min f(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),f_2(\boldsymbol{x}),\cdots,f_m(\boldsymbol{x})),\boldsymbol{x}\in X。$$

其中,$X\subseteq\mathbf{R}^n$ 是非空集合,$f:X\to\mathbf{R}^m$。

定义 1[8] 考虑(MOP):

1) 称点 $\boldsymbol{y}^I=(y_1^I,y_2^I,\cdots,y_m^I)$为(MOP)的理想点,其中 $y_i^I=\min\limits_{\boldsymbol{x}\in X}f_i(\boldsymbol{x}),i=1,2,\cdots,m$。

2) 称点 $\boldsymbol{y}^U=(y_1^U,y_m^U,\cdots,y_m^U)$为(MOP)的乌托邦点,其中 $y_i^U=y_i^I-\alpha_i,i=1,2,\cdots,m$,且 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^m_>$。

定义 2[4] 设$(\boldsymbol{\varepsilon},\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})\in\mathbf{R}^m_\geqq\times\mathbf{R}^m_\geqq$,$\hat{\boldsymbol{x}}\in X$:

1) 称$\hat{\boldsymbol{x}}$为(MOP)的$(\boldsymbol{\varepsilon},\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$-近似拟有效解,若不存在 $\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{X}$ 使得 $f(\boldsymbol{x})\leqslant f(\hat{\boldsymbol{x}})-\boldsymbol{\varepsilon}\|\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}\|-\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$。

2) 称$\hat{\boldsymbol{x}}$为(MOP)的$(\boldsymbol{\varepsilon},\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$-近似拟弱有效解,若不存在 $\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{X}$ 使得 $f(\boldsymbol{x})<f(\hat{\boldsymbol{x}})-\boldsymbol{\varepsilon}\|\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}\|-\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$。

* **收稿日期**:2017-11-09 **修回日期**:2019-01-22 **网络出版时间**:2019-03-15 07:00

资助项目:重庆市基础科学与前言技术研究专项重点项目(No. cstc2015jcyjBX0029);国家自然科学基金面上项目 (No. 11171363)

第一作者简介:马圆圆,女,研究方向为向量优化理论,E-mail:mayuanyuan@163.com;**通信作者**:彭建文,男,教授,博士生导师,E-mail:jwpeng168@hotmail.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190315.0057.024.html

3）称$\hat{\boldsymbol{x}}$为(MOP)的$(\boldsymbol{\varepsilon},\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$-近似拟真有效解，若$\hat{\boldsymbol{x}}$为(MOP)的$(\boldsymbol{\varepsilon},\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$-近似拟有效解，且存在 $M>0$，使得对于满足 $f_i(\boldsymbol{x})<f_i(\hat{\boldsymbol{x}})-\varepsilon_i\|\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}\|-\bar{\varepsilon}_i$ 的任何 $i\in\{1,2,\cdots,m\}$ 和 $\boldsymbol{x}\in X$，存在 $j\in\{1,2,\cdots,m\}\backslash\{i\}$，使得 $f_j(\boldsymbol{x})>f_j(\hat{\boldsymbol{x}})-\varepsilon_j\|\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}\|-\bar{\varepsilon}_j$，且$\dfrac{f_i(\hat{\boldsymbol{x}})-f_i(\boldsymbol{x})-\varepsilon_i\|\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}\|-\bar{\varepsilon}_i}{f_j(\boldsymbol{x})-f_j(\hat{\boldsymbol{x}})+\varepsilon_j\|\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}\|+\bar{\varepsilon}_j}\leqslant M$。

考虑如下单目标优化问题：

$$(\mathrm{P})\qquad \min\varphi(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\in X,$$

其中 $\varphi:X\subseteq\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$。

定义 3[4]　设$(\boldsymbol{\delta},\bar{\boldsymbol{\delta}})\in\mathbf{R}_{\geqq}\times\mathbf{R}_{\geqq}$，$\hat{\boldsymbol{x}}\in X$：

1）称$\hat{\boldsymbol{x}}$为(P)的$(\boldsymbol{\delta},\bar{\boldsymbol{\delta}})$-近似拟最优解，若 $\varphi(\hat{\boldsymbol{x}})\leqslant\varphi(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\delta}\|\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}\|+\bar{\boldsymbol{\delta}},\forall\boldsymbol{x}\in X$。

2）称$\hat{\boldsymbol{x}}$为(P)的严格$(\boldsymbol{\delta},\bar{\boldsymbol{\delta}})$-近似拟最优解，若 $\varphi(\hat{\boldsymbol{x}})<\varphi(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\delta}\|\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}\|+\bar{\boldsymbol{\delta}},\forall\boldsymbol{x}\in X$。

Steuer 和 Choo[9]考虑了如下的广义加权切比雪夫标量化问题(SOP1)：

$$(\mathrm{SOP1})\qquad \min\max_{i\in I}\Big[\lambda_i(f_i(\boldsymbol{x})-y_i^U)+\sum_{t\in I}\rho_t(f_t(\boldsymbol{x})-y_t^U)\Big],\boldsymbol{x}\in X,$$

其中，$I=\{1,2,\cdots,m\}$，$\boldsymbol{y}^U$ 是乌托邦点，$\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_1,\cdots,\lambda_m)\in\mathbf{R}^m_{\geqq}$，$\boldsymbol{\rho}=(\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_m)\in\mathbf{R}^m_{\geqq}$。

Kaliszewski[10]考虑了如下的改进的加权切比雪夫标量化问题(SOP2)：

$$(\mathrm{SOP2})\qquad \min\max_{i\in I}\lambda_i\Big[(f_i(\boldsymbol{x})-y_i^U)+\sum_{t\in I}\rho_t(f_t(\boldsymbol{x})-y_t^U)\Big],\boldsymbol{x}\in X,$$

其中，$I=\{1,2,\cdots,m\}$，$\boldsymbol{y}^U$ 是乌托邦点，$\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_1,\cdots,\lambda_m)\in\mathbf{R}^m_{\geqq}$，$\boldsymbol{\rho}=(\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_m)\in\mathbf{R}^m_{\geqq}$。

引理 1[7]　设$(\boldsymbol{\varepsilon},\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})\in\mathbf{R}^m_{\geqq}\times\mathbf{R}^m_{\geqq}$，$\hat{\boldsymbol{x}}\in X$，则：

1）$\hat{\boldsymbol{x}}$是(SOP1)的$(\boldsymbol{\delta},\bar{\boldsymbol{\delta}})$-近似拟最优解，且 $\boldsymbol{\delta}\leqslant\min\limits_{i\in I}\{\lambda_i\varepsilon_i\}+\sum\limits_{t\in I}\rho_t\varepsilon_t$，$\bar{\boldsymbol{\delta}}\leqslant\min\limits_{i\in I}\{\lambda_i\bar{\varepsilon}_i\}+\sum\limits_{t\in I}\rho_t\bar{\varepsilon}_t$，$\boldsymbol{\rho}\in\mathbf{R}^m_{>}$，$\boldsymbol{\lambda}\in\mathbf{R}^m_{+}$，则$\hat{\boldsymbol{x}}$是(MOP)的$(\boldsymbol{\varepsilon},\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$-近似拟有效解。

2）$\hat{\boldsymbol{x}}$是(SOP2)的$(\boldsymbol{\delta},\bar{\boldsymbol{\delta}})$-近似拟最优解，且 $\boldsymbol{\delta}\leqslant\min\limits_{i\in I}\lambda_i(\varepsilon_i+\sum\limits_{t\in I}\rho_t\varepsilon_t)$，$\bar{\boldsymbol{\delta}}\leqslant\min\limits_{i\in I}\lambda_i(\bar{\varepsilon}_i+\sum\limits_{t\in I}\rho_t\bar{\varepsilon}_t)$，$\boldsymbol{\rho}\in\mathbf{R}^m_{>}$，$\boldsymbol{\lambda}\in\mathbf{R}^m_{+}$，则$\hat{\boldsymbol{x}}$是(MOP)的$(\boldsymbol{\varepsilon},\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$-近似拟有效解。

2 主要结果

文献[7]利用文献[4]的定理 5，研究了(MOP)基于(SOP1)和(SOP2)的$(\boldsymbol{\varepsilon},\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$-拟真有效解的充分条件，得到了如下定理：

定理 1[7]　设$(\boldsymbol{\varepsilon},\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})\in\mathbf{R}^m_{>}\times\mathbf{R}^m_{>}$：

1）$\hat{\boldsymbol{x}}$是(SOP1)的$(\boldsymbol{\delta},\bar{\boldsymbol{\delta}})$-近似拟最优解，且 $\boldsymbol{\delta}=\max\limits_{i\in I}\Big[\{\lambda_i\varepsilon_i\}+\sum\limits_{t\in I}\rho_t\varepsilon_t\Big]$，$\bar{\boldsymbol{\delta}}=\max\limits_{i\in I}\Big[\{\lambda_i\bar{\varepsilon}_i\}+\sum\limits_{t\in I}\rho_t\bar{\varepsilon}_t\Big]$，$\boldsymbol{\rho}\in\mathbf{R}^m_{>}$，且 y_i^U 满足 $\forall i\in I$，$\lambda_i=[f_i(\boldsymbol{x})-y_i^U]^{-1}>0$，则$\hat{\boldsymbol{x}}$是(MOP)的$(\varepsilon,\bar{\varepsilon})$-近似拟真有效解。

2）$\hat{\boldsymbol{x}}$是(SOP2)的$(\boldsymbol{\delta},\bar{\boldsymbol{\delta}})$-近似拟最优解，且 $\boldsymbol{\delta}=\max\limits_{i\in I}\lambda_i\big(\varepsilon_i+\sum\limits_{t\in I}\rho_t\varepsilon_t\big)$，$\bar{\boldsymbol{\delta}}=\max\limits_{i\in I}\lambda_i\big(\bar{\varepsilon}_i+\sum\limits_{t\in I}\rho_t\bar{\varepsilon}_t\big)$，其中 $\boldsymbol{\rho}\in\mathbf{R}^m_{>}$，且 y_i^U 满足对于$\forall i\in I$，都有如下的关系成立：$\lambda_i=\Big[f_i(\boldsymbol{x})-y_i^U+\sum\limits_{t\in I}\rho_t(f_t(\hat{\boldsymbol{x}})-y_t^U)\Big]^{-1}>0$。

则$\hat{\boldsymbol{x}}$是(MOP)的$(\boldsymbol{\varepsilon},\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$-近似拟真有效解。

在定理 1 中 λ_i，$\boldsymbol{\delta}$ 和$\bar{\boldsymbol{\delta}}$的取值是事先给定的固定值。比如：$\lambda_i$ 的取值为：$\lambda_i=[f_i(\boldsymbol{x})-y_i^U]^{-1}$或者 $\lambda_i=\Big[f_i(\boldsymbol{x})-y_i^U+\sum\limits_{t\in I}\rho_t(f_t(\hat{\boldsymbol{x}})-y_t^U)\Big]^{-1}$。下面对定理 1 中 λ_i 及 $\boldsymbol{\delta}$，$\bar{\boldsymbol{\delta}}$的取值进行了修正，使它们的取值不再是一个固定值，而是在某个取值范畴内即可。同时将原来对$(\boldsymbol{\varepsilon},\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$的取值范围也由 $\mathbf{R}^m_{>}\times\mathbf{R}^m_{>}$ 放宽为$(\boldsymbol{\varepsilon},\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})\in\mathbf{R}^m_{\geqq}\times\mathbf{R}^m_{\geqq}$。改进后的结论如下：

定理 2　设$(\boldsymbol{\varepsilon},\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})\in\mathbf{R}^m_{\geqq}\times\mathbf{R}^m_{\geqq}$：

1）$\hat{\boldsymbol{x}}$是(SOP1)的$(\boldsymbol{\delta},\bar{\boldsymbol{\delta}})$-近似拟最优解，且 $\boldsymbol{\delta}\leqslant\min\limits_{i\in I}\{\lambda_i\varepsilon_i\}+\sum\limits_{t\in I}\rho_t\varepsilon_t$，$\bar{\boldsymbol{\delta}}\leqslant\min\limits_{i\in I}\{\lambda_i\bar{\varepsilon}_i\}+\sum\limits_{t\in I}\rho_t\bar{\varepsilon}_t$，$\boldsymbol{\rho}\in\mathbf{R}^m_{>}$，$\boldsymbol{\lambda}\in\mathbf{R}^m_{+}$，则$\hat{\boldsymbol{x}}$是(MOP)的$(\boldsymbol{\varepsilon},\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$-近似拟真有效解。

2) $\hat{x}$是(SOP2)的$(\boldsymbol{\delta},\bar{\boldsymbol{\delta}})$-近似拟最优解，且$\boldsymbol{\delta}\leqslant\min_{i\in I}\lambda_i\left(\varepsilon_i+\sum_{t\in I}\rho_t\varepsilon_t\right)$，$\bar{\boldsymbol{\delta}}\leqslant\min_{i\in I}\lambda_i\left(\bar{\varepsilon}_i+\sum_{t\in I}\rho_t\bar{\varepsilon}_t\right)$，$\boldsymbol{\rho}\in\mathbf{R}^m_>$，$\boldsymbol{\lambda}\in\mathbf{R}^m_+$，则$\hat{x}$是(MOP)的$(\boldsymbol{\varepsilon},\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$-近似拟真有效解。

证明 1) 令$M=\max_{i,l\in I}\left\{\dfrac{\lambda_l+\sum_{t\in I}\rho_t}{\rho_i}\right\}$，对于$\forall i\in I$并且$\hat{x}\in X$满足$f_i(\boldsymbol{x}_0)<f_i(\hat{\boldsymbol{x}})-\varepsilon_i\|\boldsymbol{x}_0-\hat{\boldsymbol{x}}\|-\bar{\varepsilon}_i$。为了证明$\hat{x}$为(MOP)的$(\boldsymbol{\varepsilon},\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$-拟真有效解，需证明存在$j\in\{1,2,\cdots,m\}$，使得：

$$f_j(\hat{\boldsymbol{x}})<f_j(\boldsymbol{x}_0)+\varepsilon_j\|\boldsymbol{x}_0-\hat{\boldsymbol{x}}\|+\bar{\varepsilon}_j,$$

且：

$$\frac{f_i(\hat{\boldsymbol{x}})-f_i(\boldsymbol{x}_0)-\varepsilon_i\|\boldsymbol{x}_0-\hat{\boldsymbol{x}}\|-\bar{\varepsilon}_i}{f_j(\boldsymbol{x}_0)-f_j(\hat{\boldsymbol{x}})+\varepsilon_j\|\boldsymbol{x}_0-\hat{\boldsymbol{x}}\|+\bar{\varepsilon}_j}\leqslant M。$$

由引理1可知，$\hat{x}$为(MOP)的$(\boldsymbol{\varepsilon},\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$-拟有效解，且$\boldsymbol{x}_0\in X$，所以存在$t\in\{1,2,\cdots,m\}$，使得：

$$f_t(\hat{\boldsymbol{x}})-\varepsilon_t\|\boldsymbol{x}_0-\hat{\boldsymbol{x}}\|-\bar{\varepsilon}_t<f_t(\boldsymbol{x}_0)。$$

定义：

$$f_j(\hat{\boldsymbol{x}})-\varepsilon_j\|\boldsymbol{x}_0-\hat{\boldsymbol{x}}\|-\bar{\varepsilon}_j-f_j(\boldsymbol{x}_0)=\min_{t\in I}\left[f_t(\hat{\boldsymbol{x}})-\varepsilon_t\|\boldsymbol{x}_0-\hat{\boldsymbol{x}}\|-\bar{\varepsilon}_t-f_t(\boldsymbol{x}_0)\right],\tag{1}$$

所以有

$$f_j(\hat{\boldsymbol{x}})-\varepsilon_j\|\boldsymbol{x}_0-\hat{\boldsymbol{x}}\|-\bar{\varepsilon}_j-f_j(\boldsymbol{x}_0)<0。$$

又因为$\hat{x}$为(SOP1)的$(\boldsymbol{\delta},\bar{\boldsymbol{\delta}})$-近似拟最优解，故有：

$$\begin{aligned}&\max_{k\in I}\left[\lambda_k(f_k(\boldsymbol{x}_0)-y_k^u)+\sum_{t\in I}\rho_t(f_t(\boldsymbol{x}_0)-y_t^u)\right]+\boldsymbol{\delta}\|\boldsymbol{x}_0-\hat{\boldsymbol{x}}\|+\bar{\boldsymbol{\delta}}\geqslant\\&\max_{k\in I}\left[\lambda_k(f_k(\hat{\boldsymbol{x}})-y_k^u)+\sum_{t\in I}\rho_t(f_t(\hat{\boldsymbol{x}})-y_t^u)\right]。\end{aligned}\tag{2}$$

根据(2)式，有如下不等式成立：

$$\begin{aligned}&\max_{k\in I}\left[\lambda_k(f_k(\boldsymbol{x}_0)-y_k^u)+\sum_{t\in I}\rho_t(f_t(\boldsymbol{x}_0)-y_t^u)+(\lambda_k\varepsilon_k+\sum_{t\in I}\rho_t\varepsilon_t)\|\boldsymbol{x}_0-\hat{\boldsymbol{x}}\|+(\lambda_k\bar{\varepsilon}_k+\sum_{t\in I}\rho_t\bar{\varepsilon}_t)\right]\geqslant\\&\max_{k\in I}\left[\lambda_k(f_k(\boldsymbol{x}_0)-y_k^u)+\sum_{t\in I}\rho_t(f_t(\boldsymbol{x}_0)-y_t^u)\right]+\min_{k\in I}\left[(\lambda_k\varepsilon_k+\sum_{t\in I}\rho_t\varepsilon_t)\|\boldsymbol{x}_0-\hat{\boldsymbol{x}}\|+(\lambda_k\bar{\varepsilon}_k+\sum_{t\in I}\rho_t\bar{\varepsilon}_t)\right]\geqslant\\&\max_{k\in I}\left[\lambda_k(f_k(\boldsymbol{x}_0)-y_k^u)+\sum_{t\in I}\rho_t(f_t(\boldsymbol{x}_0)-y_t^u)\right]+\min_{k\in I}(\lambda_k\varepsilon_k+\sum_{t\in I}\rho_t\varepsilon_t)\|\boldsymbol{x}_0-\hat{\boldsymbol{x}}\|+\min_{k\in I}(\lambda_k\bar{\varepsilon}_k+\sum_{t\in I}\rho_t\bar{\varepsilon}_t)\geqslant\\&\max_{k\in I}\left[\lambda_k(f_k(\boldsymbol{x}_0)-y_k^u)+\sum_{t\in I}\rho_t(f_t(\boldsymbol{x}_0)-y_t^u)\right]+\boldsymbol{\delta}\|\boldsymbol{x}_0-\hat{\boldsymbol{x}}\|+\bar{\boldsymbol{\delta}}\geqslant\\&\max_{k\in I}\left[\lambda_k(f_k(\hat{\boldsymbol{x}})-y_k^u)+\sum_{t\in I}\rho_t(f_t(\hat{\boldsymbol{x}})-y_t^u)\right]。\end{aligned}$$

所以有如下结果：

$$\begin{aligned}&\max_{k\in I}[\lambda_k(f_k(\boldsymbol{x}_0)-y_k^u)+\sum_{t\in I}\rho_t(f_t(\boldsymbol{x}_0)-y_t^u)+\\&(\lambda_k\varepsilon_k+\sum_{t\in I}\rho_t\varepsilon_t)\|\boldsymbol{x}_0-\hat{\boldsymbol{x}}\|+(\lambda_k\bar{\varepsilon}_k+\sum_{t\in I}\rho_t\bar{\varepsilon}_t)]\geqslant\\&\max_{k\in I}\left[\lambda_k(f_k(\hat{\boldsymbol{x}})-y_k^u)+\sum_{t\in I}\rho_t(f_t(\hat{\boldsymbol{x}})-y_t^u)\right]。\end{aligned}\tag{3}$$

这里标记等式：

$$\begin{aligned}&\lambda_l(f_l(\boldsymbol{x}_0)-y_l^u)+\sum_{t\in I}\rho_t(f_t(\boldsymbol{x}_0)-y_t^u)+(\lambda_l\varepsilon_l+\sum_{t\in I}\rho_t\varepsilon_t)\|\boldsymbol{x}_0-\hat{\boldsymbol{x}}\|+(\lambda_l\bar{\varepsilon}_l+\sum_{t\in I}\rho_t\bar{\varepsilon}_t)=\\&\max_{k\in I}\left[\lambda_k(f_k(\boldsymbol{x}_0)-y_k^u)+\sum_{t\in I}\rho_t(f_t(\boldsymbol{x}_0)-y_t^u)+(\lambda_k\varepsilon_k+\sum_{t\in I}\rho_t\varepsilon_t)\|\boldsymbol{x}_0-\hat{\boldsymbol{x}}\|+(\lambda_k\bar{\varepsilon}_k+\sum_{t\in I}\rho_t\bar{\varepsilon}_t)\right]。\end{aligned}\tag{4}$$

故由(3)式和(4)式有：

$$\begin{aligned}&\lambda_l(f_l(\boldsymbol{x}_0)-y_l^u)+\sum_{t\in I}\rho_t(f_t(\boldsymbol{x}_0)-y_t^u)+(\lambda_l\varepsilon_l+\sum_{t\in I}\rho_t\varepsilon_t)\|\boldsymbol{x}_0-\hat{\boldsymbol{x}}\|+(\lambda_l\bar{\varepsilon}_l+\sum_{t\in I}\rho_t\bar{\varepsilon}_t)\geqslant\\&\max_{k\in I}\left[\lambda_k(f_k(\boldsymbol{x}_0)-y_k^u)+\sum_{t\in I}\rho_t(f_t(\boldsymbol{x}_0)-y_t^u)\right]+\boldsymbol{\delta}\|\boldsymbol{x}_0-\hat{\boldsymbol{x}}\|+\bar{\boldsymbol{\delta}}\geqslant\end{aligned}$$

$$\lambda_l(f_l(\hat{\boldsymbol{x}})-y_l^u)+\sum_{t\in I}\rho_t(f_t(\hat{\boldsymbol{x}})-y_t^u)。$$

则有：

$$\lambda_l(f_l(\hat{\boldsymbol{x}})-f_l(\boldsymbol{x}_0))-\lambda_l\varepsilon_l\|\boldsymbol{x}_0-\hat{\boldsymbol{x}}\|-\lambda_l\bar{\varepsilon}_l+\sum_{t\in I}\rho_t[f_t(\hat{\boldsymbol{x}})-f_t(\boldsymbol{x}_0)-\varepsilon_t\|\boldsymbol{x}_0-\hat{\boldsymbol{x}}\|-\bar{\varepsilon}_t]\leqslant 0,$$

即：

$$\lambda_l(f_l(\hat{\boldsymbol{x}})-f_l(\boldsymbol{x}_0)-\varepsilon_l\|\boldsymbol{x}_0-\hat{\boldsymbol{x}}\|-\bar{\varepsilon}_l)+\sum_{t\in I}\rho_t[f_t(\hat{\boldsymbol{x}})-f_t(\boldsymbol{x}_0)-\varepsilon_t\|\boldsymbol{x}_0-\hat{\boldsymbol{x}}\|-\bar{\varepsilon}_t]\leqslant 0。$$

由(1)式得：

$$\lambda_l(f_j(\hat{\boldsymbol{x}})-f_j(\boldsymbol{x}_0)-\varepsilon_j\|\boldsymbol{x}_0-\hat{\boldsymbol{x}}\|-\bar{\varepsilon}_j)+\sum_{t\in I}\rho_t[f_t(\hat{\boldsymbol{x}})-f_t(\boldsymbol{x}_0)-\varepsilon_t\|\boldsymbol{x}_0-\hat{\boldsymbol{x}}\|-\bar{\varepsilon}_t]\leqslant 0,$$

所以有：

$$\rho_i(f_i(\hat{\boldsymbol{x}})-f(\boldsymbol{x}_0)-\varepsilon_i\|\boldsymbol{x}_0-\hat{\boldsymbol{x}}\|-\bar{\varepsilon}_i)\leqslant\lambda_l(f_j(\boldsymbol{x}_0)-f_j(\hat{\boldsymbol{x}})+\varepsilon_j\|\boldsymbol{x}_0-\hat{\boldsymbol{x}}\|+\bar{\varepsilon}_j)+$$
$$\sum_{t\in I,t\neq i}\rho_t[f_t(\boldsymbol{x}_0)-f_t(\hat{\boldsymbol{x}})+\varepsilon_t\|\boldsymbol{x}_0-\hat{\boldsymbol{x}}\|+\bar{\varepsilon}_t]\leqslant\Big(\lambda_l+\sum_{t\in I,t\neq i}\rho_t\Big)(f_j(\boldsymbol{x}_0)-f_j(\hat{\boldsymbol{x}})+\varepsilon_j\|\boldsymbol{x}_0-\hat{\boldsymbol{x}}\|+\bar{\varepsilon}_j)。$$

得到如下不等式：

$$\frac{f_i(\hat{\boldsymbol{x}})-f_i(\boldsymbol{x}_0)-\varepsilon_i\|\boldsymbol{x}_0-\hat{\boldsymbol{x}}\|-\bar{\varepsilon}_i}{f_j(\boldsymbol{x}_0)-f_j(\hat{\boldsymbol{x}})+\varepsilon_j\|\boldsymbol{x}_0-\hat{\boldsymbol{x}}\|+\bar{\varepsilon}_j}\leqslant\frac{\lambda_l+\sum_{t\in I,t\neq i}\rho_t}{\rho_i}\leqslant M。$$

因此 1)证明完成。

2)证明过程与 1)相似。　　证毕

注 1　当$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}=0$ 时，定理 2 退化为文献[5]中的定理 4.8，当 $\boldsymbol{\varepsilon}=\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}=0$ 时，定理 2 退化为文献[11]中的定理 6.2，所以定理 2 是文献[5]和文献[11]相应结果的推广。

例 1　考虑如下多目标优化问题：

$$\min f(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),f_2(\boldsymbol{x}))=(x_1,x_2),\boldsymbol{x}\in X,$$

其中，$X=\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2\mid x_1+x_2>2,x_1,x_2>0\}$，设 $\boldsymbol{\varepsilon}=\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}=(0.1,0.1)$，$\boldsymbol{y}^U=(-1,-1)$。对于广义加权切比雪夫标量化问题(SOP1)，令 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2)=(1,1)$，$\boldsymbol{\rho}=(\rho_1,\rho_2)=(0,0)$。由定理 2 的条件 $\boldsymbol{\delta}\leqslant\min_{i\in I}\{\lambda_i\varepsilon_i\}+\sum_{t\in I}\rho_t\varepsilon_t$，$\bar{\boldsymbol{\delta}}\leqslant\min_{i\in I}\{\lambda_i\bar{\varepsilon}_i\}+\sum_{t\in I}\rho_t\bar{\varepsilon}_t$，得 $\boldsymbol{\delta}=0.1$，$\bar{\boldsymbol{\delta}}=0.1$。因此，相应的标量化问题如下：

$$(\mathrm{SOP3})\quad\min_{x\in X}\max_{i=1,2}\{x_1+1,x_2+1\}。$$

容易得出：$\hat{\boldsymbol{x}}=(1.1,1.1)$是(SOP3)的($\boldsymbol{\delta},\bar{\boldsymbol{\delta}}$)-拟最优解，因此，由定理 2 知$\hat{\boldsymbol{x}}$是所给多目标优化问题的($\boldsymbol{\varepsilon},\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$)-近似拟真有效解。

3 总结

本文在没有任何凸性的假设下，通过利用标量化技术去考虑了(MOP)的($\boldsymbol{\varepsilon},\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$)-近似拟真有效解。研究了(MOP)的近似拟真有效解与(SOP)的近似拟最优解之间的关系，利用广义加权切比雪夫标量化问题或改进的加权切比雪夫标量化问题，得到了(MOP)的($\boldsymbol{\varepsilon},\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$)-近似拟真有效解的另一个充分条件，使得定理中的 λ_i，$\boldsymbol{\delta}$ 和$\bar{\boldsymbol{\delta}}$的的取值不再是一个固定值，而是在某个取值范畴内即可。文献[7]中也给出了(MOP)的($\boldsymbol{\varepsilon},\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$)-近似拟真有效解的充分条件，但其中的 λ_i，$\boldsymbol{\delta}$ 和$\bar{\boldsymbol{\delta}}$的取值是固定的，事实上，本文结果是文献[7]中相应结果的改进。

参考文献：

[1] KUTATELADZE S S. Convex programming[J]. Sov Math Dokl，1979，20：390-393.

[2] WHITE D J. Epsilon efficiency[J]. Journal of Optimization Theory and Applications，1986，49(2)：319-337.

[3] LIU J C. $\boldsymbol{\varepsilon}$-Properly efficient solution to nondifferentiable multiobjective programming problems[J]. Applied Mathematics Letters，1999，12：109-113.

[4] BELDIMAN M，PANAITESCU E，DOGARU L. Approximate quasi efficient solutions in multiobjective optimization [J]. Bull Math Soc Math Roumanie Tome，2008，51(99)：

109-121.

[5] GHAZNAVI-GHOSONI B A, KHORRAM E, SOLEIMANI-DAMANEH M. Scalarization for characterization of approximate strong/weak/proper efficiency in multiobjective optimization[J]. Optimization, 2013, 62(6): 703-720.

[6] YUE R X, GAO Y. Scalarizations for approximate quasi efficient solutionns in multiobjective optimization problems [J]. Journal of the Operations Research Society of China, 2015, 3: 69-80.

[7] GHAZNAVI M. Optimality condition via scalarization for approximate quasi effciency in multiobjective optimization [J]. Filomat, 2017, 31(3): 671-680.

[8] EHRGOTT M. Multicriteria optimization[M]. Berlin: Springer, 2005.

[9] STEUER R E, CHOO E U. An interactive weighted tchebyche procedure for multiple objective programming[J]. Mathematical Programming, 1983, 26(3): 326-344.

[10] KALISZEWSKI I. A modified weighted Tchebycheff metric for multiple objective programming[J]. Computers and Operations Research, 1987, 14(4): 315-323.

[11] KALISZEWSKI I, MICHALOWSKI W. Efficient solutions and bounds on tradeoffs[J]. Journal of Optimization. Theory and Applications, 1997, 94(2): 381-394.

Operations Research and Cybernetics

A Sufficient Condition for $(\boldsymbol{\varepsilon},\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$-Approximate Quasi Properly Solutions of Multiobjective Optimization Problems

MA Yuanyuan, PENG Jianwen

(School of Mathematical Science, Chongqing Normal University, Chongqing401331, China)

Abstract: [**Purposes**]The sufficient condition for $(\boldsymbol{\varepsilon},\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$)-approximate quasi properly efficient solutions of multiobjective optimization problems are studied and generalized further. [**Methods**]By using the aug-mented weighted Tchebycheff scalarization problem of multiobjective optimization problem or the modified weighted Tchebycheff scalarization problem of multiobjective optimization problem. [**Findings**]It derives a new sufficient condition for$(\boldsymbol{\varepsilon},\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$-approximate quasi properly efficient solutions of multiobjective optimization problems without any convexity conditions. [**Conclusions**]The results are extended in the existing literature.

Keywords: multiobjective optimization; quasi properly efficient solutions; nonlinear scalarization

(责任编辑　陈　乔)