DOI:10.11721/cqnuj20190216

一类具有标量旗曲率的 Randers 度量*

程新跃[1]，吴莎莎[2]，黄勤荣[2]

(1. 重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331；2. 重庆理工大学 理学院，重庆 400054)

摘要：【目的】在芬斯勒几何中，研究具有标量旗曲率的 Randers 度量。【方法】在 β 是关于 α 的 Killing 1-形式和一定的 Ξ-曲率条件下，刻画具有标量旗曲率的 Randers 度量。【结果】在 $n(\geqslant 3)$ 维流形 M 上，如果具有标量旗曲率的 Randers 度量 F 还满足 β 是关于 α 的 Killing1-形式和一定的 Ξ-曲率条件，那么它的旗曲率是常数。【结论】在流形维数 $n\geqslant 3$ 时，满足上述条件的 Randers 度量的结构可被完全确定。

关键词：Randers 度量；旗曲率；Ξ-曲率；Killing 1-形式

中图分类号：O186.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2019)02-0059-07

旗曲率是芬斯勒几何中一类重要的黎曼几何量。众所周知，射影平坦的芬斯勒度量一定具有标量旗曲率，但可以找到无穷多个具有标量旗曲率的芬斯勒度量，它们是非射影平坦的。并且，人们也找到了许多具有标量旗曲率的芬斯勒度量，它们的旗曲率不是常数。这些都表明研究和刻画具有标量旗曲率的芬斯勒度量的工作具有十分重要的意义，所以这一方向一直是芬斯勒几何研究中的热点。由于芬斯勒度量的计算相对复杂，人们首先对 Randers 度量作了深入研究，并且已经取得了一系列重要的成果。2003 年沈忠民[1]分类刻画了射影平坦且具有常数旗曲率的 Randers 度量；进一步地，2004 年 Bao 等人[2]利用黎曼流形上的 Zermelo 导航术完全分类了具有常数旗曲率的 Randers 度量。同时，2003 年程新跃等人[3]证明了具有标量旗曲率且具有迷向 S-曲率的芬斯勒度量 F 一定具有弱迷向旗曲率，且一般地，它的逆命题不成立。但沈忠民和 Yildirim[4]证明了上述结果的逆命题对 Randers 度量是成立的。在此基础上，2009 年程新跃和沈忠民[5]完全分类了 $n(\geqslant 3)$ 维流形 M 上具有弱迷向旗曲率的 Randers 度量。最近，程新跃等人[6]在 β 是关于 α 的 Killing 1-形式的前提下进一步刻画了具有标量旗曲率的 Randers 度量并得到了若干必要条件，这里 β 是关于 α 的 Killing 1-形式是指流形 M 上的 1-形式 $\beta=b_i(x)y^i$ 满足 $b_{i;j}+b_{j;i}=0$，其中“;”表示关于 α 的 Levi-Civita 联络的协变导数。

芬斯勒几何与黎曼几何相比，它不仅含有黎曼几何量，还有许多非黎曼几何量。芬斯勒几何中的一个重要问题就是理解非黎曼几何量的几何意义，特别是建立黎曼几何量和非黎曼几何量之间的关系。近年来，学者们已经发现了一系列重要的非黎曼几何量(如 Landsberg 曲率、S-曲率等)与黎曼几何量(如旗曲率、Ricci 曲率等)之间的内在关系，从而得到了许多非常有意义的结果。最近，人们在芬斯勒几何中引入了两个新的非黎曼几何量：Ξ-曲率和 H-曲率，并得到了一系列有意义的结果，如莫小欢[7]得到了 H-曲率与旗曲率、Ricci 曲率及其他非黎曼几何量之间的若干恒等式，沈忠民[8]进一步证明了：对于芬斯勒度量 F，如果它具有殆迷向 S-曲率，则它具有几乎消失的 Ξ-曲率，特别地 $\Xi=0$ 等价于 F 具有常数 S-曲率。一般说来，上述事实反之不一定成立，但对于 Randers 度量而言是等价的。此外，沈忠民[8]还指出：对于一个具有标量旗曲率的芬斯勒度量 F，它具有弱迷向旗曲率等价于它具有几乎消失的 Ξ-曲率或者 H-曲率；特别地，Ξ-曲率或者 H-曲率为零等价于 F 具有常数旗曲率($n\geqslant 3$)。更一般地，沈忠民和李本伶[9]研究了流形上 Spray 的几何，证明了对流形 M 上的 Spray 而言，$H_{ij}=0$ 等价于 $\Xi_i=f_{ij}(x)y^j$ 且 $f_{ij}+f_{ji}=0$，他们[10]还进一步证明了，n 维流形 M 上，具有标量曲率的 Spray 具有迷向曲率的充分必要条件是它的 Ξ-曲率为零。上述研究也突出了 Ξ-曲率在芬斯勒几何中的地位和作用。

本文就是在一定的 Ξ-曲率条件下，对具有标量旗曲率的 Randers 度量进行了研究，并得到了如下定理。

* **收稿日期**：2018-09-19　　**修回日期**：2018-10-12　　**网络出版时间**：2019-03-15 07:00

资助项目：国家自然科学基金(No. 11871126)；重庆师范大学科学基金(No. 17XLB022)

第一作者简介：程新跃，男，教授，博士，研究方向为微分几何及其应用，E-mail：chengxy@cqnu.edu.cn

网络出版地址：http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190315.0056.010.html

定理 1 设 $F=\alpha+\beta$ 是 n 维流形 M 上的 Randers 度量。假设 F 具有标量旗曲率 $K=K(x,y)$ 且 $\beta=b_i(x)y^i$ 是关于 α 的 Killing 1-形式。如果 F 的 Ξ-曲率满足 $\Xi_i=f_{ij}(x)y^j$ 且 $f_{ij}+f_{ji}=0$，那么 F 的 S-曲率 $S=0$。特别地，当 $n\geqslant 3$ 时，F 具有常数旗曲率。

1 预备知识

设 F 是 n 维流形 M 上的一个芬斯勒度量。在局部坐标系 (x^i,y^i) 下，F 的测地线可以由如下二阶微分方程来刻画：

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2}+2G^i\left(\boldsymbol{x}(t),\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}(t)\right)=0,$$

其中 $G^i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{1}{4}g^{il}\{[F^2]_{x^my^l}y^m-[F^2]_{x^l}\}$ 是 F 的测地系数。

由芬斯勒度量的测地系数可以确定度量的黎曼曲率。对任意的 $\boldsymbol{x}\in M$ 和 $\boldsymbol{y}\in T_xM\setminus\{0\}$，$F$ 的黎曼曲率 $R_{\boldsymbol{y}}=R^i_k\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes \mathrm{d}x^k$ 由下式定义：

$$R^i_k:=2\frac{\partial G^i}{\partial x^k}-\frac{\partial^2G^i}{\partial x^m\partial y^k}y^m+2G^m\frac{\partial^2G^i}{\partial y^m\partial y^k}-\frac{\partial G^i}{\partial y^m}\frac{\partial G^m}{\partial y^k}。$$

Ricci 曲率定义为黎曼曲率的迹，即 $Ric=R^m_m$。

设 $P=\mathrm{Span}\{\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}\}\subset T_xM$ 是一个包含切向量 $\boldsymbol{y}$ 的二维切子空间，那么芬斯勒流形 (M,F) 的旗曲率 $K=K(P,y)$ 定义为：

$$K(P,\boldsymbol{y}):=\frac{g_{\boldsymbol{y}}(R_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{u})}{g_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})g_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})-[g_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{y})]^2}。$$

特别地，如果 $K=K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$，那么称 F 具有标量旗曲率. 如果 $K=\frac{3\theta}{F}+\sigma(\boldsymbol{x})$，其中 $\theta=\theta_i(\boldsymbol{x})y^i$ 是 1-形式且 $\sigma=\sigma(\boldsymbol{x})$ 是 M 上的一个标量函数，那么称 F 具有弱迷向旗曲率。当 $\theta=0$ 且 $\sigma=\sigma(\boldsymbol{x})$ 时，称 F 具有迷向旗曲率。当 $\theta=0$ 且 σ 是常数时，称 F 具有常数旗曲率。

现在，设 $\{b_i\}$ 是切空间 TM 上的一组基，$\{\omega^i\}$ 是 T^*M 上与 $\{b_i\}$ 对偶的一组基。定义芬斯勒流形 (M,F) 上的 Busemann-Hausdorff 体积形式为：

$$\mathrm{d}V_{\mathrm{BH}}:=\sigma_{\mathrm{BH}}(\boldsymbol{x})\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n,$$

其中，体积系数 $\sigma_{\mathrm{BH}}(\boldsymbol{x})$ 定义为：

$$\sigma_{\mathrm{BH}}(\boldsymbol{x}):=\frac{\mathrm{Vol}(B^n(1))}{\mathrm{Vol}\{(y^i)\in\mathbf{R}^n\mid F(\boldsymbol{x},y^ib_i)<1\}},$$

这里 $\mathrm{Vol}\{\cdot\}$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 上的欧氏体积函数。

进一步，定义：

$$\tau(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}):=\ln\left[\frac{\sqrt{\det(g_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))}}{\sigma_{\mathrm{BH}}(\boldsymbol{x})}\right],$$

称 τ 为 F 的畸变。畸变刻画了芬斯勒流形切空间的几何。沈忠民[11]在研究芬斯勒流形的体积比较时，自然地讨论到了芬斯勒度量的畸变沿一条测地线的变化率，从而给出了 S-曲率的定义。具体地，对一个向量 $\boldsymbol{y}\in T_xM\setminus\{0\}$，设 σ 是 F 的满足 $\sigma(\boldsymbol{x})=x$，$\dot{\sigma}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$ 的测地线。令

$$S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}):=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\tau(\sigma(t),\dot{\sigma}(t))]|_{t=0},$$

这等价于 $S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}):=\tau_{|m}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})y^m$，这里的“|”表示关于芬斯勒度量 F 的 Chern 联络的水平协变导数，函数 S 称 F 的 S-曲率。如果 $S=(n+1)c(\boldsymbol{x})F$，其中 $c=c(\boldsymbol{x})$ 是流形 M 上的标量函数，则称 F 具有迷向 S-曲率。

进一步，在局部坐标系下，利用体积形式 $\mathrm{d}V_F:=\sigma_F(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n$ 和测地系数 $G^i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$，$S$-曲率还可以表达为如下形式：

$$S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}):=\frac{\partial G^m}{\partial y^m}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-y^m\frac{\partial}{\partial x^m}(\ln\sigma_F(\boldsymbol{x}))。\tag{1}$$

下面介绍本文涉及到的非黎曼几何量 Ξ-曲率。在切丛 TM 上定义张量 $\Xi=\Xi_i\mathrm{d}x^i$ 如下：

$$\Xi_i := \frac{1}{2}\{S._{i|m}y^m - S_{|i}\},$$

这里的"·"和"|"分别表示关于芬斯勒度量 F 的 Chern 联络的垂直协变导数和水平协变导数。称 Ξ 为 F 的 Ξ-曲率[8,10]。

设 $F=\alpha+\beta$ 是流形 M 上的 Randers 度量，其中 $\alpha=\sqrt{a_{ij}(\boldsymbol{x})y^iy^j}$ 是黎曼度量，$\beta=b_i(\boldsymbol{x})y^i$ 是 1-形式。下面引入一些通用记号：

$$r_{ij} := \frac{1}{2}(b_{i;j}+b_{j;i}),\ s_{ij} := \frac{1}{2}(b_{i;j}-b_{j;i}),$$

$$r^i_j := a^{im}r_{mj},\ s^i_j := a^{im}s_{mj},\ r_j := b^m r_{mj},\ s_j := b^m s_{mj},$$

$$t_{ij} := s_{im}s^m_j,\ t_j := b^i t_{ij} = s_m s^m_j,\ t := b^i t_i,$$

这里 $(a^{ij}) := (a_{ij})^{-1}$，$b^i := a^{ij}b_j$。进一步，令 $r_{i0} := r_{ij}y^j$，$s_{i0} := s_{ij}y^j$，$r_{00} := r_{ij}y^iy^j$，$r_0 := r_iy^i$，$s_0 := s_iy^i$ 等。

设 G^i 和 ${}^\alpha G^i$ 分别表示 Randers 度量 F 和黎曼度量 α 的测地系数，那么 G^i 和 ${}^\alpha G^i$ 的关系可以表示为：

$$G^i = {}^\alpha G^i + \alpha s^i_0 + \frac{1}{2F}\{-2\alpha s_0 + r_{00}\}y^i。 \tag{2}$$

进一步，$F=\alpha+\beta$ 的 Ricci 曲率可以表示为：

$$Ric = {}^\alpha Ric + (2\alpha s^m_{0;m} - 2t_{00} - \alpha^2 t^m_m) + (n-1)\Pi,$$

其中，$\Pi := \frac{3}{4F^2}(r_{00}-2\alpha s_0)^2 + \frac{1}{2F}[4\alpha(q_{00}-\alpha t_0)-(r_{00;0}-2\alpha s_{0;0})]$。

那么利用(1)式和(2)式可以得到：

$$S = (n+1)\left[\frac{e_{00}}{2F} - (s_0+\rho_0)\right]。 \tag{3}$$

这里 $e_{00}=r_{00}+2\beta s_0$，$\rho := \ln\sqrt{1-b^2}$ 且 $\rho_i := \rho_{x^i}$[12-13]。

2 具有标量旗曲率的 Randers 度量

设 $F=\alpha+\beta$ 是 n 维流形 M 上的 Randers 度量。如果 F 具有标量旗曲率 $K=K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 且 $\beta=b_i(\boldsymbol{x})y^i$ 是关于 α 的 Killing 1-形式，即 $r_{ij}=0$，那么根据(3)式，F 的 S-曲率可以进一步化简为：

$$S = -(n+1)\left\{\frac{\alpha s_0}{F}+\rho_0\right\}。 \tag{4}$$

进一步，当 Randers 度量 F 具有标量旗曲率时，它的 Ξ-曲率还可以由下述引理确定。

引理 1[6]　设 $F=\alpha+\beta$ 是 n 维流形 M 上的 Randers 度量，如果 F 具有标量旗曲率 $K=K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 且 $\beta=b_i(\boldsymbol{x})y^i$ 是关于 α 的 Killing 1-形式，那么 F 的 Ξ-曲率可以表示为：

$$\Xi_i = \frac{1}{2}\left\{S._{i;m}y^m - 2\frac{\partial S._i}{\partial y^k}(G^k-{}^\alpha G^k) - S_{;i}\right\}, \tag{5}$$

其中，"；"表示关于黎曼度量 α 的 Levi-Civita 联络的协变导数。

上述引理的核心是将 $S._i$ 关于 Randers 度量 F 的水平协变导数 $S._{i|m}$ 转换为关于黎曼度量 α 的水平协变导数 $S._{i;m}$。现在可以直接利用它来求 F 的 Ξ-曲率的具体表达式。

由(4)式，通过一系列计算得到：

$$S_{;i} = -(n+1)\{F^{-1}\alpha s_{0;i} - F^{-2}\alpha s_0 s_{0i} + \rho_{0;i}\}, \tag{6}$$

$$S._{i;m}y^m = -(n+1)\{\alpha^{-1}F^{-1}(y_is_{0;0}+\alpha^2 s_{i;0}) - F^{-2}[\alpha s_{i0}s_0 + (y_i+\alpha b_i)s_{0;0}] + \rho_{i;0}\}, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial S._i}{\partial y^k}(G^k-{}^\alpha G^k) = {} & -(n+1)\{2F^{-1}(s_{i0}s_0+y_it_0) - 2F^{-2}(s_0{}^2y_i+\alpha^2 s_0 s_i) - \\ & 2\alpha F^{-2}(s_{i0}s_0+t_0y_i+\alpha b_it_0) + 4\alpha s_0{}^2F^{-3}(y_i+\alpha b_i)\}。 \end{aligned} \tag{8}$$

另一方面，对于任意的 1-形式 $\beta=b_i(\boldsymbol{x})y^i$，注意到 $(b^2)_{;i;j}=(b^2)_{;j;i}$ 恒成立，则有：

$$r_{i;j}+s_{i;j} = r_{j;i}+s_{j;i}。$$

又由于 β 是关于 α 的 Killing 1-形式，故

$$s_{i;j} = s_{j;i}。 \tag{9}$$

进而有

$$\rho_{i;0}-\rho_{0;i}=\frac{s_{0;i}-s_{i;0}}{1-b^2}=0。\tag{10}$$

那么将(6)～(10)式全部代入(5)式整理得：

$$\begin{aligned}\Xi_i=\frac{n+1}{2}\{&F^{-1}(-\alpha^{-1}y_is_{0;0}+2s_{i0}s_0+2y_it_0)+\\&F^{-2}[(y_i+\alpha b_i)s_{0;0}-2s_0{}^2y_i-2\alpha^2s_0s_i-2\alpha t_0y_i-2\alpha^2b_it_0]+4F^{-3}\alpha s_0{}^2(y_i+\alpha b_i)\}。\end{aligned}\tag{11}$$

进一步，在 Randers 度量 F 具有标量旗曲率 $K=K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 且 β 是关于 α 的 Killing 1-形式的前提下，考虑它的 Ξ-曲率所满足的一个有趣的条件，即 $\Xi_i=f_{ij}(\boldsymbol{x})y^j$ 且 $f_{ij}+f_{ji}=0$。其详细的出处可以参看文献[9]。根据前面的分析及(11)式可以得到下述引理。

引理 2 设 $F=\alpha+\beta$ 是 n 维流形 M 上的 Randers 度量。假设 F 具有标量旗曲率 $K=K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 且 $\beta=b_i(\boldsymbol{x})y^i$ 是关于 α 的 Killing 1-形式。则 F 的 Ξ-曲率满足 $\Xi_i=f_{ij}(\boldsymbol{x})y^j$ 且 $f_{ij}+f_{ji}=0$ 等价于：

$$\Omega_7\alpha^6+\Omega_5\alpha^4+\Omega_3\alpha^2+\Omega_1=0,\tag{12}$$

$$\Omega_6\alpha^6+\Omega_4\alpha^4+\Omega_2\alpha^2+\Omega_0=0。\tag{13}$$

其中：$\Omega_7=2tb^2$；$\Omega_6=-4t_0b^4+4tb^2\beta-2b^2b^is_{i;0}$；$\Omega_5=12b^4s_0{}^2-4t_0b^4\beta-4b^2b^is_{i;0}\beta+2tb^2\beta^2-4t_0b^2\beta+2b^4s_{0;0}-2t\beta^2$；$\Omega_4=(2b^4s_{0;0}-2b^2b^is_{i;0}\beta+2s_0{}^2+2b^is_{i;0}\beta-4t\beta^2+16b^2s_0{}^2+3b^2s_{0;0})\beta$；$\Omega_3=(8s_0{}^2-2t\beta^2+4b^is_{i;0}\beta+2b^2s_{0;0}+4t_0\beta+4t_0b^2\beta-8b^2s_0{}^2)\beta^2$；$\Omega_2=(-3s_{0;0}-6s_0{}^2+4t_0\beta+2b^is_{i;0}\beta-b^2s_{0;0})\beta^3$；$\Omega_1=-4s_{0;0}\beta^4$；$\Omega_0=-s_{0;0}\beta^5$。

证明 因为 Randers 度量 F 具有标量旗曲率 $K=K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 且 $\beta=b_i(\boldsymbol{x})y^i$ 是关于 α 的 Killing 1-形式，那么它的 Ξ-曲率可以由(11)式表示。又由于 Ξ_i 满足：$\Xi_i=f_{ij}(\boldsymbol{x})y^j$，对该式两边关于 y^j 求微分可得：

$$\Xi_{i\cdot j}=f_{ij}。\tag{14}$$

交换(14)式的指标然后相加，结合 $f_{ij}+f_{ji}=0$ 可得：

$$\begin{aligned}\Xi_{i\cdot j}+\Xi_{j\cdot i}=(n+1)\{&F^{-1}(\alpha^{-3}y_iy_js_{0;0}-\alpha^{-1}a_{ij}s_{0;0}-\alpha^{-1}y_is_{j;0}-\alpha^{-1}y_js_{i;0}+s_{i0}s_j+s_{j0}s_i+2a_{ij}t_0+y_it_j+y_jt_i)+\\&F^{-2}[(\alpha^{-1}y_js_{0;0}+\alpha s_{j;0}-3y_jt_0-s_{j0}s_0-\alpha^2t_j)F_{\cdot i}-4s_0(s_jy_i+s_iy_j)-2s_0{}^2a_{ij}-2\alpha^2s_is_j+\\&(\alpha^{-1}y_is_{0;0}+\alpha s_{i;0}-3y_it_0-s_{i0}s_0-\alpha^2t_i)F_{\cdot j}+(\alpha s_{0;0}-2\alpha^2t_0)F_{\cdot i\cdot j}]+\\&F^{-3}[6s_0{}^2(y_jF_{\cdot i}+y_iF_{\cdot j})+6\alpha^2s_0(s_iF_{\cdot j}+s_jF_{\cdot i})+4\alpha^2s_0{}^2F_{\cdot i\cdot j}-2\alpha(s_{0;0}-2\alpha t_0)F_{\cdot i}F_{\cdot j}]-\\&12F^{-4}\alpha^2s_0{}^2F_{\cdot i}F_{\cdot j}\}=0。\end{aligned}\tag{15}$$

用 b^ib^j 缩并(15)式并把 $F=\alpha+\beta$ 代入得到：

$$(\Xi_{i\cdot j}+\Xi_{j\cdot i})b^ib^j=-(n+1)\frac{1}{\alpha^3(\alpha+\beta)^4}(\Omega_7\alpha^7+\Omega_6\alpha^6+\Omega_5\alpha^5+\Omega_4\alpha^4+\Omega_3\alpha^3+\Omega_2\alpha^2+\Omega_1\alpha+\Omega_0)=0。$$

上式表明：

$$\Omega_7\alpha^7+\Omega_6\alpha^6+\Omega_5\alpha^5+\Omega_4\alpha^4+\Omega_3\alpha^3+\Omega_2\alpha^2+\Omega_1\alpha+\Omega_0=0。$$

根据 α 的无理性，上式可以分解成(12)式和(13)式。 证毕

3 定理证明

为了证明定理 1，首先给出两个重要的命题，它们的证明参见文献[6]。

命题 1 设 $F=\alpha+\beta$ 是 n 维流形 M 上的 Randers 度量。如果 F 具有标量旗曲率 $K=K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 且 $\beta=b_i(\boldsymbol{x})y^i$ 是关于 α 的 Killing 1-形式，那么 α 和 β 满足：

$$s^m_{0;m}=-(n-1)b^{-2}c(\boldsymbol{x})\beta,\tag{16}$$

$$t_{00}+s_{0;0}=c(\boldsymbol{x})(\alpha^2-b^{-2}\beta^2),\tag{17}$$

其中 $t_{ij}=s_{im}s^m_j$，$r_{00}=r_{ij}y^iy^j$，$b=\|\beta_x\|_\alpha$ 表示 β 关于 α 的范数，$c=c(x)$ 表示流形 M 上的标量函数，"；"表示关于黎曼度量 α 的 Levi-Civita 联络的协变导数。

利用命题 1 以及文献[14]中的主要结果，还可以进一步得到 t_0 的表达式。

命题 2 设 $F=\alpha+\beta$ 是 n 维流形 M 上的 Randers 度量. 如果 F 具有标量旗曲率 $K=K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 且 $\beta=b_i(\boldsymbol{x})y^i$ 是关于 α 的 Killing 1-形式，那么 α 和 β 满足：

$$t_0=-\frac{n-1}{n+1}(\kappa+cb^{-2})\beta,\tag{18}$$

其中 $t_i=b^j t_{ji}$，$t_0=t_i y^i$，$c=c(\boldsymbol{x})$ 和 $\kappa=\kappa(\boldsymbol{x})$ 表示流形 M 上的标量函数。

其次，在文献[13]中沈忠民给出了关于 Randers 度量的 S-曲率的 3 个等价条件，这些条件有利于本文在后面证明过程中对 S-曲率的进一步讨论。

命题 3[13]　设 $F=\alpha+\beta$ 是 n 维流形 M 上的 Randers 度量，S 表示 F 的 S-曲率，则下列条件对于 Randers 度量而言是等价的：

1) $S=0$；

2) S 是一个 1-形式；

3) β 满足 $r_{ij}=-\dfrac{1}{2(1-\|\beta\|_\alpha^2)}[b_i(\|\beta\|_\alpha^2)_{x^j}+b_j(\|\beta\|_\alpha^2)_{x^i}]$，这里 $\|\beta\|_\alpha$ 表示 β 关于 α 的范数。

因此，如果 $r_{ij}=0$，$s_j=0$，即 β 是关于 α 的具有常数长度的 Killing 1-形式，那么 $S=0$。

证明（定理 1）　因为 Randers 度量 F 具有标量旗曲率 $K=K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 且 $\beta=b_i(\boldsymbol{x})y^i$ 是关于 α 的 Killing 1-形式，那么它的 Ξ-曲率可以由(11)式表示。又因为 F 的 Ξ-曲率满足 $\Xi_i=f_{ij}(x)y^j$ 且 $f_{ij}+f_{ji}=0$，故(12)和(13)式成立。

根据引理 2 并结合 Ω_0 的定义，(13)式等价于：

$$(\Omega_6\alpha^4+\Omega_4\alpha^2+\Omega_2)\alpha^2=-\Omega_0=s_{0;0}\beta^5。\tag{19}$$

因为 α^2 与 β^5 互素且 $s_{0;0}$ 是关于 y 的二次式，故有：

$$s_{0;0}=\theta(\boldsymbol{x})\alpha^2,\tag{20}$$

这里 $\theta=\theta(\boldsymbol{x})$ 是 M 上的标量函数。由上式容易得出 $s_{i;j}=\theta(\boldsymbol{x})a_{ij}$。

进一步，利用 y^j 和 b^i 依次对上式缩并可得：

$$b^i s_{i;0}=\theta(\boldsymbol{x})\beta。\tag{21}$$

那么通过(20)和(21)式，$\Omega_6,\cdots,\Omega_0$ 可以改写为：

$$\Omega_6=-4t_0b^4+4tb^2\beta-2b^2\theta\beta;\Omega_5=12s_0{}^2b^4-4t_0b^4\beta-4b^2\theta\beta^2+2tb^2\beta^2-4t_0b^2\beta+2b^4\theta\alpha^2-2t\beta^2;$$

$$\Omega_4=(2b^4\theta\alpha^2-2b^2\theta\beta^2+2s_0{}^2+2\theta\beta^2-4t\beta^2+16b^2s_0{}^2+3b^2\theta\alpha^2)\beta;$$

$$\Omega_3=(8s_0{}^2-2t\beta^2+4\theta\beta^2+2b^2\theta\alpha^2+4t_0\beta+4t_0b^2\beta-8s_0{}^2b^2)\beta^2;$$

$$\Omega_2=(-3\theta\alpha^2-6s_0{}^2+4t_0\beta+2\theta\beta^2-\theta b^2\alpha^2)\beta^3;\Omega_1=-4\theta\alpha^2\beta^4;\Omega_0=-\theta\alpha^2\beta^5。$$

另一方面，将(20)式代入(19)式得：

$$\Omega_6\alpha^4+\Omega_4\alpha^2+\Omega_2=\theta\beta^5。$$

由 Ω_2 的具体表达式，上式可改写为：

$$[\Omega_6\alpha^2+\Omega_4-(3+b^2)\theta\beta^3]\alpha^2=\beta^3(6s_0{}^2-4\beta t_0-\theta\beta^2)。\tag{22}$$

同理，由于 α^2 与 β^3 互素，故存在一个标量函数 $\lambda=\lambda(\boldsymbol{x})$ 使得

$$6s_0{}^2-4\beta t_0-\theta\beta^2=\lambda(\boldsymbol{x})\alpha^2,\tag{23}$$

也即：

$$s_0{}^2=\frac{1}{6}(4\beta t_0+\theta\beta^2+\lambda\alpha^2)。\tag{24}$$

结合(22)和(23)式，

$$\Omega_6\alpha^2+\Omega_4-(3+b^2)\theta\beta^3=\lambda\beta^3。\tag{25}$$

另外，将(24)式代入 Ω_4 并化简得：

$$\Omega_4=\left[2b^4\theta+3b^2\theta+\frac{1}{3}(8b^2+1)\lambda\right]\alpha^2\beta+\frac{1}{3}(2b^2+7)\theta\beta^3-4t\beta^3+\frac{4}{3}(8b^2+1)t_0\beta^2。$$

将上式代入(25)式并利用 Ω_6 的表达式，整理得：

$$\left[-4t_0b^4+4tb^2\beta+b^2\theta\beta+2b^4\theta\beta+\frac{1}{3}(8b^2+1)\lambda\beta\right]\alpha^2=$$
$$\beta^2\left[-\frac{1}{3}(2b^2+7)\theta\beta+4t\beta-\frac{4}{3}(8b^2+1)t_0+(3+b^2)\theta\beta+\lambda\beta\right]。\tag{26}$$

因为 α^2 与 β^2 互素，且(26)式两边中括号里的项都是关于 y 的一次式，所以分别有下面两个等式成立：

$$-4t_0b^4+4tb^2\beta+b^2\theta\beta+2b^4\theta\beta+\frac{1}{3}(8b^2+1)\lambda\beta=0,\tag{27}$$

$$-\frac{1}{3}(2b^2+7)\theta\beta+4t\beta-\frac{4}{3}(8b^2+1)t_0+(3+b^2)\theta\beta+\lambda\beta=0。\tag{28}$$

这里的(28)式可以等价地表示为:

$$\lambda\beta=\frac{1}{3}(2b^2+7)\theta\beta-4t\beta+\frac{4}{3}(8b^2+1)t_0-(3+b^2)\theta\beta。$$

联立上式与(27)式,化简得:

$$(2b^2-2)\theta\beta-12t\beta+4(11b^2+1)t_0=0,$$

即 $t_0=\frac{6t(b^2-1)\theta}{2(11b^2+1)}\beta$。

通过 t_0 自然得到 t 的表达式为:

$$t=-\frac{b^2(b^2-1)}{2(8b^2+1)}\theta。\tag{29}$$

另一方面,根据命题2的(18)式,可以得到 t 的表达式为:

$$t=-\frac{n-1}{n+1}(\kappa b^2+c)。\tag{30}$$

对比(29)和(30)式中的 t,容易得到:

$$\theta=\frac{n-1}{n+1}\frac{2(8b^2+1)}{b^2-1}(\kappa+cb^{-2})。\tag{31}$$

进一步,由命题1中的(17)式,也即 $t_{00}=c(\alpha^2-b^{-2}\beta^2)-s_{0;0}$,可以得到 $t_{ij}=c(a_{ij}-b^{-2}b_ib_j)-s_{i;j}$,用 b^i 和 y^j 依次对 t_{ij} 缩并,有 $t_0=-b^is_{i;0}$。

再次运用(18)式,显然有:

$$b^is_{i;0}=\frac{n-1}{n+1}(\kappa+cb^{-2})\beta,$$

于是由(21)式,上式意味着:

$$\theta=\frac{n-1}{n+1}(\kappa+cb^{-2})。\tag{32}$$

现在,通过比较(31)和(32)式,可以断言:

$$\kappa+cb^{-2}=0。\tag{33}$$

否则,如果在某一点 $x\in M$ 处,有 $\kappa+cb^{-2}\neq0$,那么就有 $\frac{2(8b^2+1)}{b^2-1}=1$,从而 $b^2=-\frac{1}{5}$,这种情况显然是不成立的,故只有(33)式成立。将(33)式代回(31)或(32)式得 $\theta=0$,把它代入(29)式有:

$$t=0。\tag{34}$$

(34)式这一关键结果还可以等价地表示为:$0=t=b^it_i=b^is_js^j_i=-a^{jk}s_js_k$。由$(a^{jk})$的正定性知 $s_j=0$。把 $s_j=0$ 代入(4)式可得:$S=-(n+1)\left\{\frac{\alpha s_0}{F}+\rho_0\right\}=-(n+1)\rho_0$,即此时 S-曲率是一个1-形式,这里 $\rho_0=\rho_i(x)y^i$。根据命题3,这意味着:

$$S=0。$$

因为具有标量旗曲率且具有迷向 S-曲率的 Finsler 度量 F 一定具有弱迷向旗曲率,那么 F 具有标量旗曲率且 S-曲率 $S=0$ 等价于 F 的旗曲率是迷向的,即 $K=\sigma(x)$。由 Schur 引理知,在 $n\geqslant3$ 时,$K=$常数,故此时 F 具有常数旗曲率。

证毕

如前面所述,Bao 等人[2]利用黎曼流形上的导航术技巧完全分类了具有常数旗曲率的 Randers 度量,这意味着:当流形维数 $n\geqslant3$ 时,在定理1的条件下,$F=\alpha+\beta$ 的结构可被完全确定。

参考文献:

[1] SHEN Z M. Projectively flat Randers metrics with constant flag curvature[J]. Math Ann,2003,325:19-30.

[2] BAO D, ROBLES C, SHEN Z M. Zermelo navigation on Riemannian manifolds[J]. J Differ Geom, 2004, 66: 391-449.

[3] CHENG X Y, MO X H, SHEN Z M. On the flag curvature of Finsler metrics of scalar curvature[J]. J London Math Soc, 2003, 68(2): 762-780.

[4] SHEN Z M, YILDIRIM C G. A characterization of Randers metrics of scalar flag curvature[M]//Dong Yuxin. Recent development in geometry and analysis, ALM 23. Beijing: Higher Education Press, 2012: 345-358.

[5] CHENG X Y, SHEN Z M. Randers metrics of scalar flag curvature[J]. J Australian Math Soc, 2009, 87(3): 359-370.

[6] CHENG X Y, YIN L, LI T T. A class of randers metrics of scalar flag curvature[EB/OL]. [2018-07-19]. https://arxiv.org/abs/1903.09371.

[7] MO X H. On the non-Riemannian quantity H of a Finsler metric[J]. Differential Geom Appl, 2009, 27: 7-14.

[8] SHEN Z M. On some non-Riemannian quantities in Finsler geometry[J]. Canad Math Bull, 2013, 56(1): 184-193.

[9] LI B L, SHEN Z M. Ricci curvature tensor and non-Riemannian quantities[J]. Chinese Physics Letters (English), 2015, 20(3): 350-353.

[10] LI B L, SHEN Z M. Sprays of isotropic curvature[J]. Int J Math, 2018, 29(1): 12.

[11] SHEN Z M. Volume comparison and its applications in Riemann-Finsler geometry[J]. Advances in Math, 1997, 128: 306-328.

[12] CHENG X Y, SHEN Z M. Finsler geometry: an approach via Randers spaces[M]. Dordrecht: Springer, 2012.

[13] SHEN Z M. Differential geometry of spray and Finsler spaces[M]. Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 2001.

[14] TANG X Y, YU C T. Some remarks on Einstein- Randers metrics[J]. Differential Geom Appl, 2018, 58: 83-102.

On a Class of Randers Metrics of Scalar Flag Curvature

CHENG Xinyue[1], WU Shasha[2], HUANG Qinrong[2]

(1. School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331;

2. School of Sciences, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China)

Abstract: [**Purposes**]One of the important topics in Finsler geometry is to study and characterize the Finsler metrics of scalar flag curvature, and classifying and characterizing the Randers metrics of scalar flag curvature is still a significant open problem in Finsler geometry. [**Methods**]Under the condition that β is a Killing 1-form with respect to α and a certain conditions on Ξ-curvature, Randers metrics of scalar flag curvature can be characterized. [**Findings**]Let F be a Randers metric of scalar flag curvature on an n-dimensional manifold M ($n\geqslant 3$). If β is a Killing 1-form with respect to α and F satisfies a certain conditions on Ξ-curvature, then F is of constant flag curvature. [**Conclusions**]The structures of Randers metrics with the conditions mentioned above can be determined completely when dimension $n\geqslant 3$.

Keywords: Randers metrics; flag curvature; Ξ-curvature; Killing 1-form

(责任编辑 许 甲)