运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20190313

带有学习与恶化效应的共同工期指派问题*

王吉波，梁茜茜，张　博
(沈阳航空航天大学 理学院，沈阳 110136)

摘要:【目的】研究在共同工期指派模型下,工件的实际加工时间既有学习效应(与所排位置有关)又有恶化效应(与开工时间有关)的排序问题,其中机器限定为一台。【方法】为求得最优排序,使得工件的提前、延误和工期成本的线性加权和最小,其中权重为位置权重,工件的共同工期为决策变量,此问题可转化为经典的运筹学方法求解,即求解指派问题。【结果】这个问题在位置权重、学习与恶化效应下依然是多项式时间可解的。【结论】算法分析和实例表明给出的求解算法是非常有效的。

关键词:排序;工期指派;学习效应;恶化效应

中图分类号:O223;C934　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2019)03-0001-06

经典的排序模型中,通常假定工件(也称任务或作业)的加工时间为给定常数[1-3],但在许多实际生产过程中,工件的加工时间可能与其所排位置(是所排位置的递减函数,即学习效应)和开始加工时间(是开工时间的递增函数,即恶化效应)有着某种联系。学习效应产生的背景是工件的加工时间会随着机器(比如技术工人)熟练度的提升、机器磨合度的增加等因素而使后来加工的工件实际加工时间变短,有不少学者对学习效应方面的排序问题进行了论述[4-8]。在另一方面,工件的加工时间受开始加工时间的影响,开始加工时间越晚,加工时间越大,因此有学者对恶化效应方面的排序问题进行了研究[9-12]。同样,在现实的企业生产(制造)过程中,工件的实际加工时间受多种因素的影响,比如同时受加工所排位置和开始开工时间的影响,由此产生具有学习效应与恶化效应的排序问题。Lee[13]首先考虑了同时具有学习与恶化效应的单机排序问题,证明了一些正则目标函数是多项式时间可解的。此后,有许多学者对此进行了研究[14-20]。

与此同时,准时制(Just-in-time, JIT)排序问题一直备受人们关注。在 JIT 系统下,工作既不能太早也不能太晚完成,从而直接影响产品的提前成本、延误成本以及送货期(工期)成本[21-26]。虽然工件同时具有学习与恶化效应的排序问题[13-20]和工件具有共同工期(Common due date, CON)[21-26]的排序模型都得到广泛的研究,但二者共同被研究的情况却相对较少。Yang 和 Kuo[20]考虑了工件同时具有学习与恶化效应的排序问题,在限定单机和共同工期模型下,对一个正则目标(即工件的提前、延误和共同工期成本的加权和,其中提前工件和延误工件的权重分别都相等)问题给出了一个最优求解算法。Brucker[27]研究了具有 CON 的单机排序问题,其中工件的提前和延误都是和位置有关的权重(即位置权重),他证明了在位置权重下的共同工期指派问题是多项式时间可解的。本文将讨论在 CON 指派和位置权重模型下,在限定机器数为一台和工件加工时间同时具有学习与恶化效应的情况下,证明了这个排序问题依然多项式时间可解。

1 问题描述

本文的排序问题可描述为:给定一台机器和 n 个工件 $J=\{J_1,J_2,\cdots,J_n\}$,假设 n 个工件都可在零时刻进行加工,而同一时刻机器最多加工一个工件,且不允许中断。工件具有与位置有关的学习效应和开工时间相关的共同恶化率,假设排在第 r 个位置的工件 J_i 的学习效应为 b_i,α 为 n 个工件的共同恶化率,工件的开始加工时间为 t,同 Yang 和 Kuo[19]一样,工件 J_i 的(实际)加工时间为 $p_i^A=a_i r^{b_i}+\alpha t$,$i=1,2,\cdots,n$,其中 a_i 和 $b_i\leqslant 0$ 分别表

* **收稿日期:**2018-10-31　　**修回日期:**2018-12-10　　**网络出版时间:**2019-05-09　19:30

资助项目:国家自然科学基金(No. 71471120);辽宁省高等学校创新人才支持计划(No. LR2016017);辽宁省"百千万人才工程"

第一作者简介:王吉波,男,教授,博士生导师,研究方向为组合优化、生产计划与排序,E-mail:wangjibo75@163.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190509.1930.022.html

示工件 J_i 的标准加工时间和学习因子,$\alpha \geqslant 0$ 为(共同)恶化率(产生恶化效应)。令 C_i 和 d_i 分别表示工件 J_i 的完工时间与工期,考虑共同工期(CON)指派模型,即 $d_i = d_{\mathrm{opt}}$(d_{opt} 为共同工期),$i=1,2,\cdots,n$。在这种模型下,目标是找到一个最优排序 $\pi=[\pi_{(1)},\pi_{(2)},\cdots,\pi_{(n)}]$($\pi_{(i)}$ 代表在排序中的第 i 个位置加工的工件)和最优的共同工期 d_{opt},使目标函数 $f(\pi,d_{\mathrm{opt}})=\sum_{i=1}^{n}\omega_i|L_{\pi_{(i)}}|+\omega_0 d_{\mathrm{opt}}$ 最小,即使工件的总加权绝对延误(提前)值和共同工期成本总费用最小。在这个目标函数中,$|L_{\pi_{(i)}}|=E_{\pi_{(i)}}+T_{\pi_{(i)}}$ 是工件 $J_{\pi_{(i)}}$ 的延误(提前)值,其中 $E_{\pi(i)}=\max\{0,d_{\pi(i)}-C_{\pi(i)}\}$ 和 $T_{\pi_{(i)}}=\max\{0,C_{\pi_{(i)}}-d_{\pi_{(i)}}\}$,$\omega_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为位置权重,ω_0 为共同工期 d_{opt} 的权重。用三参数表示法[28]可将研究的问题可表示为:$1|\mathrm{CON},d_{\mathrm{opt}},p_i^{\mathrm{A}}=a_i r^{b_i}+\alpha t|\sum_{i=1}^{n}\omega_i|L_{\pi(i)}|+\omega_0 d_{\mathrm{opt}}$。

Brucker[27]研究了工件加工时间为常数的情况,即证明了问题 $1|\mathrm{CON},d_{\mathrm{opt}}|\sum_{i=1}^{n}\omega_i|L_{\pi(i)}|+\omega_0 d_{\mathrm{opt}}$ 是多项式时间可解的,时间复杂度为 $O(n\log n)$。本文证明在工件引入学习和恶化效应条件下,问题 $1|\mathrm{CON},d_{\mathrm{opt}},p_i^{\mathrm{A}}=a_i r^{b_i}+\alpha t|\sum_{i=1}^{n}\omega_i|L_{\pi(i)}|+\omega_0 d_{\mathrm{opt}}$ 仍然具有多项式时间算法,只是算法的时间复杂度比较高,为 $O(n^3)$。

2 主要结论

2.1 一般情况

对于 n 个工件的单机情况,令 $p^{\mathrm{A}}_{\pi_{(i)}}$ 表示工件 $J_{\pi_{(i)}}$ 排在第 i 个位置上的实际加工时间,$a_{\pi_{(i)}}$,$b_{\pi_{(i)}}$ 和 $C_{\pi_{(i)}}$ 也可以进行类似定义,则有:

$$p^{\mathrm{A}}_{\pi_{(1)}}=C_{\pi_{(1)}}=a_{\pi_{(1)}}1^{b_{\pi(1)}},$$

$$p^{\mathrm{A}}_{\pi_{(2)}}=\alpha a_{\pi(1)}1^{b_{\pi(1)}}+a_{\pi_{(2)}}2^{b_{\pi(2)}},C_{\pi_{(2)}}=(1+\alpha)a_{\pi(1)}1^{b_{\pi(1)}}+a_{\pi_{(2)}}2^{b_{\pi(2)}},$$

$$p^{\mathrm{A}}_{\pi_{(3)}}=\alpha(1+\alpha)a_{\pi_{(1)}}1^{b_{\pi(1)}}+\alpha a_{\pi(2)}2^{b_{\pi(2)}}+a_{\pi_{(3)}}3^{b_{\pi(3)}},C_{\pi_{(3)}}=(1+\alpha)^2 a_{\pi_{(1)}}1^{b_{\pi(1)}}+(1+\alpha)a_{\pi(2)}2^{b_{\pi(2)}}+a_{\pi_{(3)}}3^{b_{\pi(3)}},$$

$$\cdots\cdots$$

$$p^{\mathrm{A}}_{\pi_{(i)}}=\alpha(1+\alpha)^{i-2}a_{\pi_{(1)}}1^{b_{\pi(1)}}+\alpha(1+\alpha)^{i-3}a_{\pi(2)}2^{b_{\pi(2)}}+\cdots+\alpha(1+\alpha)a_{\pi_{(i-2)}}(i-2)^{b_{\pi(i-2)}}+\alpha a_{\pi_{(i-1)}}(i-1)^{b_{\pi(i-1)}}+a_{\pi_{(i)}}i^{b_{\pi(i)}},$$

$$C_{\pi_{(i)}}=(1+\alpha)^{i-1}a_{\pi_{(1)}}1^{b_{\pi(1)}}+(1+\alpha)^{i-2}a_{\pi_{(2)}}2^{b_{\pi(2)}}+\cdots+(1+\alpha)a_{\pi_{(i-1)}}(i-1)^{b_{\pi(i-1)}}+a_{\pi_{(i)}}i^{b_{\pi(i)}}。\tag{1}$$

对于问题 $1|\mathrm{CON},d_{\mathrm{opt}},p_i^{\mathrm{A}}=a_i r^{b_i}+\alpha t|\sum_{i=1}^{n}\omega_i|L_{\pi(i)}|+\omega_0 d_{\mathrm{opt}}$,先给出以下一些引理。

引理 1[27] 对于 $1|\mathrm{CON},d_{\mathrm{opt}},p_i^{\mathrm{A}}=a_i r^{b_i}+\alpha t|\sum_{i=1}^{n}\omega_i|L_{\pi(i)}|+\omega_0 d_{\mathrm{opt}}$ 问题,存在一个最优排序,所有工件的就绪时间都是 0,第一个加工的工件在零时刻开始加工,且第一个工件到最后一个工件连续加工,且机器中间不能有空闲时间。

为叙述方便,假设存在一个工件 J_0,它的位置权重为 ω_0,标准加工时间为 $a_0=0$,J_0 总是在 $t=0$ 时刻开始加工且 $\pi_{(0)}=0$,则对于给定的排序 $\pi=[\pi_{(0)},\pi_{(1)},\cdots,\pi_{(n)}]$($\pi_{(0)}=0$),有:

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i|L_{\pi_{(i)}}|+\omega_0 d_{\mathrm{opt}}=\sum_{i=0}^{n}\omega_i|C_{\pi_{(i)}}-d_{\pi_{(i)}}|。$$

引理 2[27] 给定一个排序 $\pi=[\pi_{(0)},\pi_{(1)},\cdots,\pi_{(n)}]$,工件的共同工期 d_{opt} 的最优值等于第 k 个加工的工件的完成时间,即 $d_{\mathrm{opt}}=C_{\pi_{(k)}}=\sum_{i=0}^{k}p^{\mathrm{A}}_{\pi_{(i)}}$,其中 k 是位置权重序列 $\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_n$ 的中位数并满足:

$$\sum_{j=0}^{k-1}\omega_j\leqslant\sum_{j=k}^{n}\omega_j\tag{2}$$

和

$$\sum_{j=0}^{k}\omega_j\leqslant\sum_{j=k+1}^{n}\omega_j。\tag{3}$$

引理 3 对问题 $1|\mathrm{CON},d_{\mathrm{opt}},p_i^{\mathrm{A}}=a_i r^{b_i}+\alpha t|\sum_{i=1}^{n}\omega_i|L_{\pi_{(i)}}|+\omega_0 d_{\mathrm{opt}}$,在给定的最优排序 π 下,目标函数值为:

$$f(\pi, d_{\text{opt}}) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \left| L_{\pi_{(i)}} \right| + \omega_0 d_{\text{opt}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_{\pi_{(i)}}^{\text{A}},$$

其中：

$$\lambda_i = \begin{cases} \sum_{v=0}^{i-1} \omega_v, i = 1, 2, \cdots, k, \\ \sum_{v=i}^{n} \omega_v, i = k+1, \cdots, n。\end{cases} \tag{4}$$

证明　假设给定最优排序 $\pi = [\pi_{(0)}, \pi_{(1)}, \cdots, \pi_{(n)}]$ 和 $d_{\text{opt}} = C_{\pi_{(k)}}$，可知目标函数：

$$f(\pi, d_{\text{opt}}) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \left| L_{\pi_{(i)}} \right| + \omega_0 d_{\text{opt}} = \omega_0 C_{\pi_{(k)}} + \sum_{i=1}^{k} \omega_i (C_{\pi_{(k)}} - C_{\pi_{(i)}}) + \sum_{i=k+1}^{n} \omega_i (C_{\pi_{(i)}} - C_{\pi_{(k)}}) =$$

$$\sum_{i=0}^{k} \omega_i \sum_{v=i+1}^{k} p_{\pi_{(v)}}^{\text{A}} + \sum_{i=k+1}^{n} \omega_i \sum_{v=k+1}^{i} p_{\pi_{(v)}}^{\text{A}} = \sum_{v=1}^{k} p_{\pi_{(v)}}^{\text{A}} \left(\sum_{i=0}^{v-1} \omega_i \right) + \sum_{v=k+1}^{n} p_{\pi_{(v)}}^{\text{A}} \left(\sum_{i=v}^{n} \omega_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_{\pi_{(i)}}^{\text{A}},$$

其中 λ_i 由(4)式给出。　　证毕

由引理 3 和(1)式可得：

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \left| L_{\pi_{(i)}} \right| + \omega_0 d_{\text{opt}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_{\pi_{(i)}}^{\text{A}} = a_{\pi_{(1)}} 1^{b_{\pi(1)}} (\lambda_1 + \alpha\lambda_2 + \alpha(1+\alpha)\lambda_3 + \cdots + \alpha(1+\alpha)^{n-2}\lambda_n) +$$

$$a_{\pi_{(2)}} 2^{b_{\pi(2)}} (\lambda_2 + \alpha\lambda_3 + \alpha(1+\alpha)\lambda_4 + \cdots + \alpha(1+\alpha)^{n-3}\lambda_n) + \cdots + a_{\pi_{(n)}} n^{b_{\pi(n)}} \lambda_n = \sum_{i=1}^{n} W_i a_{\pi_{(i)}} i^{b_{\pi(i)}}, \tag{5}$$

其中：

$$\begin{cases} W_1 = \lambda_1 + \alpha\lambda_2 + \alpha(1+\alpha)\lambda_3 + \cdots + \alpha(1+\alpha)^{n-2}\lambda_n, \\ W_2 = \lambda_2 + \alpha\lambda_3 + \alpha(1+\alpha)\lambda_4 + \cdots + \alpha(1+\alpha)^{n-3}\lambda_n, \\ \quad\vdots \\ W_{n-1} = \lambda_{n-1} + \alpha\lambda_n, \\ W_n = \lambda_n。\end{cases} \tag{6}$$

因此，令 $X_{jr} = \begin{cases} 1, \text{工件 } J_j \text{ 排在位置 } r \text{ 处} \\ 0, \text{否则} \end{cases}$，则上述排序问题可以转化为如下指派问题：

$$\min \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} W_r a_j r^{b_j} X_{jr}, \tag{7}$$

$$\text{s. t.} \sum_{j=1}^{n} X_{jr} = 1, r = 1, 2, \cdots, n, \tag{8}$$

$$\sum_{r=1}^{n} X_{jr} = 1, j = 1, 2, \cdots, n, \tag{9}$$

$$X_{jr} = 0 \text{ 或 } 1, j, r = 1, 2, \cdots, n。 \tag{10}$$

因为指派问题可以多项式时间解决，因此问题 $1 \left| \text{CON}, d_{\text{opt}}, p_i^{\text{A}} = a_i r^{b_i} + \alpha t \right| \sum_{i=1}^{n} \omega_i \left| L_{\pi(i)} \right| + \omega_0 d_{\text{opt}}$ 可以被以下的多项式时间算法解决。

算法 1　步骤 1：根据(2)，(3)，(4)式分别计算出中位数 k 和 λ_i；

步骤 2：根据(6)式计算出 W_i；

步骤 3：根据指派问题(7)～(10)式确定工件的最优排序；

步骤 4：由 $d_{\text{opt}} = \sum_{i=1}^{k} p_{\pi_{(i)}}^{\text{A}}$ 得到共同工期。

定理 1　由算法 1 可以解决问题 $1 \left| \text{CON}, d_{\text{opt}}, p_i^{\text{A}} = a_i r^{b_i} + \alpha t \right| \sum_{i=1}^{n} \omega_i \left| L_{\pi(i)} \right| + \omega_0 d_{\text{opt}}$，且算法的时间复杂度为 $O(n^3)$。

证明　算法 1 中步骤 1，步骤 2 和步骤 4 的时间复杂度分别为 $O(n)$，步骤 3 指派问题的时间复杂度为 $O(n^3)$，因此算法 1 总的时间复杂度为 $O(n^3)$。　　证毕

例1 考虑7个工件的集合 $J=\{J_1,J_2,J_3,J_4,J_5,J_6,J_7\}$,其中给定的参数为:$\alpha=0.05$,$\omega_0=1$,其他参数参见表1。

解 由步骤1和2,可得 $k=4$,λ_i 与 W_i 的值由表2给出。由步骤3可得工件的最优排序为[$J_6,J_3,J_4,J_2,J_1,J_5,J_7$],其中指派问题的效率矩阵见表3。则共同工期 $d_{\mathrm{opt}}=15+12\times2^{-0.31}+9\times3^{-0.27}+4\times4^{-0.25}=34.198\ 0$,目标函数最优值为 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i|C_{\pi_{(i)}}-d_{\pi_{(i)}}|+\omega_0 d_{\mathrm{opt}}=449.996\ 5$。

表1 例1给定的参数

Tab. 1 Parameters of example 1

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	$i=7$
a_i	5	4	12	9	16	15	18
b_i	−0.32	−0.25	−0.31	−0.27	−0.35	−0.2	−0.33
ω_i	5	4	2	3	6	1	8

表2 λ_i 与 W_i 的值

Tab. 2 The values of λ_i and W_i

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	$i=7$
λ_i	1	6	10	12	14	8	7
W_i	4.229 7	8.790 2	12.181 2	13.505 9	14.767 5	8.350 0	7.000 0

2.2 特殊情况 $b_i=b(i=1,2,\cdots,n)$

考虑一特殊情况,如果所有工件具有共同的学习因子,即 $b_i=b$,$i=1,2,\cdots,n$。下面先给出一个引理。

表3 指派问题 $W_r a_j r^{b_j}$ 的值

Tab. 3 The values of $W_r a_j r^{b_j}$ in assignment problem

工件	$W_r a_j r^{b_j}$						
	$r=1$	$r=2$	$r=3$	$r=4$	$r=5$	$r=6$	$r=7$
J_1	21.148 5	35.207 8	42.853 0	43.334 6	44.117 1*	23.531 4	18.777 5
J_2	16.918 8	29.566 6	37.022 8	38.200 5*	39.502 5	21.340 7	17.214 1
J_3	50.756 4	85.086 5*	103.983 3	105.454 8	107.598 8	57.496 4	45.951 4
J_4	38.067 3	65.609 0	81.491 0*	83.600 7	86.065 2	46.326 4	37.253 2
J_5	67.675 2	110.346 4	132.683 7	133.021 7	134.520 2	71.359 8*	56.680 5
J_6	63.445 5*	114.784 7	146.675 3	153.533 4	160.547 8	87.528 1	71.149 1
J_7	76.134 6	125.872 6	152.585 3	153.856 6	156.285 8	83.208 8	66.296 1*

注:* 表示该解为最优解

引理4[29] 如果存在两个序列 $\{x_i\}$,$\{y_i\}$ $i=1,2,\cdots,n$,序列 $\{x_i\}$ 按非减顺序排列,而序列 $\{y_i\}$ 按非增顺序排列,则 $\sum_{i=1}^{n}x_i y_i$ 最小。

由 $f(\pi,d_{\mathrm{opt}})=\sum_{i=1}^{n}\omega_i|L_{\pi_{(i)}}|+\omega_0 d_{\mathrm{opt}}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i p_{\pi_{(i)}}^{\mathrm{A}}$ 可知:

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i|L_{\pi_{(i)}}|+\omega_0 d_{\mathrm{opt}}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i p_{\pi_{(i)}}^{\mathrm{A}}=a_{\pi_{(1)}}1^b(\lambda_1+\alpha\lambda_2+\alpha(1+\alpha)\lambda_3+\cdots+\alpha(1+\alpha)^{n-2}\lambda_n)+$$
$$a_{\pi_{(2)}}2^b(\lambda_2+\alpha\lambda_3+\alpha(1+\alpha)\lambda_4+\cdots+\alpha(1+\alpha)^{n-3}\lambda_n)+\cdots+a_{\pi_{(n)}}n^b\lambda_n=\sum_{i=1}^{n}W_i a_{\pi_{(i)}}i^b,$$

其中 W_i 由(6)式给出。

令 $\eta_i=W_i i^b$,则:

$$f(\pi,d_{\mathrm{opt}})=\sum_{i=1}^{n}\omega_i|L_{\pi_{(i)}}|+\omega_0 d_{\mathrm{opt}}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i p_{\pi_{(i)}}^{\mathrm{A}}=\sum_{i=1}^{n}\eta_i a_{\pi_{(i)}}。\tag{11}$$

由(11)式和引理4可知,问题 $1|\mathrm{CON},d_{\mathrm{opt}},p_i^{\mathrm{A}}=a_i r^{b_i}+\alpha t,b_i=b|\sum_{i=1}^{n}\omega_i|L_{\pi(i)}|+\omega_0 d_{\mathrm{opt}}$ 可由下面的多项式时间算法解决。

算法2 步骤1:由(2),(3)式计算出中位数 k,然后根据(6)式计算出 $\eta_i=W_i i^b$;

步骤 2：按照引理 4，最小的 η_i 与最大的 a_i 匹配，第二小的 η_i 与第二大的 a_i 匹配，依次进行下去，直到结束，从而求得最优排序；

步骤 3：计算 $d_{\mathrm{opt}}=\sum_{j=1}^{k}p_{\pi_{(i)}}^{\mathrm{A}}$ 。

定理 2　由算法 2 可以求得问题 $1\left|\mathrm{CON},d_{\mathrm{opt}},p_i^{\mathrm{A}}=a_ir^{b_i}+\alpha t,b_i=b\right|\sum_{i=1}^{n}\omega_i\left|L_{\pi(i)}\right|+\omega_0d_{\mathrm{opt}}$ 的最优解，且算法的时间复杂度为 $O(n\log n)$ 。

证明　算法 1 中步骤 1 和步骤 3 的时间复杂度分别为 $O(n)$，步骤 2 的时间复杂度为 $O(n\log n)$，因此算法 2 总的时间复杂度为 $O(n\log n)$ 。　证毕

3 结论

本文主要考虑了在 CON(共同工期)模型下，工件具有学习效应与恶化效应的单机排序问题。本文的目标是找到最优排序及共同工期 d_{opt} 使一个非正则目标(即提前、延迟和工期成本的线性加权和，其中权重为位置权重)达到最小。本文证明了这个问题具有多项式时间算法，且算法的时间复杂度为 $O(n^3)$ 。同时，在一种特殊情况下，证明了这个问题的时间复杂度可以降低(时间复杂度降低为 $O(n\log n)$)。在以后的研究中，对于工件的共同恶化率可以考虑一般情况下的恶化率，即每个工件的恶化率都不相同，并且考虑在这种模型下的流水作业排序问题以及具有资源分配的一些排序问题。

参考文献：

[1] 唐恒永，赵传立. 排序引论[M]. 北京：科学出版社，2002.
TANG H Y，ZHAO C L. Introduction to scheduling[M]. Beijing：Science Press，2002.

[2] 唐国春，张峰，罗守成，等. 现代排序论[M]. 上海：上海科学普及出版社，2003.
TANG G C，ZHANG F，LUO S C，et al. Theory of morden scheduling[M]. Shanghai：Popular Sciece Press of Shanghai，2003.

[3] 张新功，陈秋宏，王祥兵. 关于误工的两个代理单机排序问题[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2018，35(4)：1-6.
ZHANG X G，CHEN Q H，WANG X B. Two-agent scheduling problem about tardiness on a single machine[J]. Journal of Chongqing Normal University(Natural Science)，2018，35(4)：1-6.

[4] BISKUP D. Single-machines scheduling with learning considerations[J]. European Journal of Operational Research，1999，115：173-178.

[5] BISKUP D. A state-of-the-art review on scheduling with learning effects[J]. European Journal of Operational Research，2008，188：315-329.

[6] 王吉波，汪佳，牛玉萍. 具有学习效应的单机可控加工时间排序问题研究[J]. 沈阳航空航天大学学报，2014，31(5)：82-86.
WANG J B，WANG J，NIU Y P. A single machine scheduling with learning effect and controllable processing times[J]. Journal of Shenyang Aerospace University，2014，31(5)：82-86.

[7] 王雪茹，白雪莲，王吉波，等. 基于截断学习效应的流水作业排序问题研究[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2017，34(5)：12-17.
WANG X R，BAI X L，WANG J B，et al. Flow shop scheduling problem with truncated learning effects[J]. Journal of Chongqing Normal University(Natural Science)，2017，34(5)：12-17.

[8] GAO F，LIU M，WANG J J，et al. No-wait two-machine permutation flow shop scheduling problem with learning effect，common due date and controllable job processing times[J]. International Journal of Production Research，2018，56(6)：2361-2369.

[9] GAWIEJNOWICZ S. Time-dependent scheduling[M]. Berlin：Springer，2008.

[10] WANG J B，WANG J J. Single-machine scheduling problems with precedence constraints and simple linear deterioration[J]. Applied Mathematical Modelling，2015，39：1172-1182.

[11] 王吉波，郭苗苗，刘桓，等. 具有依赖开工时间恶化工件的流水作业排序问题研究综述[J]. 沈阳航空航天大学学报，2016，33(3)：1-10.
WANG J B，GUO M M，LIU H，et al. Survey on flow shop scheduling problems with start time dependent deteriorating jobs[J]. Journal of Shenyang Aerospace University，2016，33(3)：1-10.

[12] 王吉波，赵伯来. 具有独立安装时间和恶化效应的单机成组排序问题研究[J]. 沈阳航空航天大学学报，2017，34(4)：82-87.
WANG J B，ZHAO B L. Research on single-machine group scheduling with independent[J]. Journal of Shenyang Aerospace University，2017，34(4)：82-87.

[13] LEE W C. A note on deteriorating jobs and learning in single-machine scheduling problems[J].International Journal of Business and Economics,2004,3:83-89.

[14] WANG J B. A note on scheduling problems with learning effect and deteriorating jobs[J].International Journal of Systems Science,2006,37:827-833.

[15] WANG J B. Single-machine scheduling problems with the effects of learning and deterioration[J]. Omega,2007,35:397-402.

[16] WANG J B,CHENG T C E. Scheduling problems with the effects of deterioration and learning[J]. Asia-Pacific Journal of Operational Research,2007,24:245-261.

[17] WANG X,CHENG T C E. Single-machine scheduling with deteriorating jobs and learning effects to minimize the makespan[J]. European Journal of Operational Research,2007,178:57-70.

[18] CHENG T C E,WU C C, LEE W C. Some scheduling problems with deteriorating jobs and learning effects[J]. Computers & Industrial Engineering,2008,54:972-982.

[19] YANG D L,KUO W H. Some scheduling problems with deteriorating jobs and learning effects[J]. Computer & Industrial Engineering,2010,58:25-28.

[20] YANG D L,KUO W H. A note on due-date assignment and single-machine scheduling with deteriorating jobs and learning effects[J]. Journal of the Operational Research Society,2011,62:206-210.

[21] BAKER K R,SCUDDER G D. Sequencing with earliness and tardiness penalties:a review[J]. Operations Research,1990,38(1):22-36.

[22] GORDON V S,PROTH J M,CHU C B. A survey of the state-of-the-art of common due date assignment and scheduling research[J]. European Journal of Operational Research,2002,139(1):1-25.

[23] YIN Y,CHENG C E,WU C C,et al. Single-machine common due-date scheduling with batch delivery costs and resource-dependent processing times[J]. International Journal of Production Research,2013,51(17):5083-5099.

[24] YIN Y,LIU M,CHENG C E,et al. Four single-machine scheduling problems involving due date determination decisions[J]. Information Sciences,2013,251:164-181.

[25] 刘丽丽,任韩,唐国春. 有公共交货期的单机分批排序问题[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2017,34(2):1-5.
LIU L L,REN H,TANG G C. Scheduling with a common due date on a single batch processing machine[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science),2017,34(2):1-5.

[26] 姜昆,耿新娜,王吉波. 具有资源约束的工期指派排序问题[J]. 数学的实践与认识,2018,48(19):46-52.
JIANG K,GENG X N,WANG J B. Due date assignment scheduling problems with resource constrainsts[J]. Mathematics in Practice and Theory,2018,48(19):46-52.

[27] BRUCKER P. Scheduling algorithms[M]. Berlin:Springer,2001.

[28] GRAHAM R L,LAWLER E L,LENSTRA J K,et al. Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey[J]. Annals of Discrete Mathematics,1979,5:287-326.

[29] HARDY G H,LITTLEWOOD J E,POLYA G. Inequalities[M]. Cambridge:Cambridge University Press,1934.

Operations Research and Cybernetics

Common Due Date Assignment Problem with Learning and Deterioration Effects

WANG Jibo, LIANG Xixi, ZHANG Bo

(School of Science, Shenyang Aerospace University, Shenyang 110136, China)

Abstract: [**Purposes**]Under the common due date assignment, it studies a scheduling problem in which the actual processing time of a job is related to the learning effect (its position) and the deterioration effect (its starting time), where the machine number is limited to single machine. [**Methods**]To find an optimal schedule such that the weighted sum of the earliness and tardiness and the common due date costs is minimized, where the weights are the position-dependent weights and the common due date is a decision variable, the problem can be solved by using the classical operations research method, i. e., by using the assignment problem method. [**Findings**]It is showed that the problem remains polynomial time solvable under the position-dependent weights, learning the deterioration effect. [**Conclusions**]Analysis of algorithm and an example show that the optimal schedule can be obtained quickly by the corresponding algorithm.

Keywords: scheduling; due date assignment; learning effect; deterioration effect

(责任编辑 黄 颖)