运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20190323

多目标优化问题近似解的组合标量化*

何爱华，张晓青，赵克全
(重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331)

摘要:【目的】研究多目标优化问题近似解的标量化性质。【方法】利用一类组合标量化方法、co-radiant 集和改进集等建立多目标优化问题近似解的组合标量化。【结果】得到了多目标优化问题 ε-有效解、(C,ε)-有效解、E-有效解、(C,ε)-弱有效解、E-弱有效解的组合标量化结果。【结论】得到的标量化结果为设计多目标优化问题近似解的求解算法提供了理论基础。

关键词:多目标优化;ε-有效解;(C,ε)-(弱)有效解;E-(弱)有效解

中图分类号:O221.6　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2019)03-0007-04

1 预备知识

多目标优化理论与方法在许多实际领域中具有十分重要的作用。特别地,多目标优化问题的近似解及其标量化性质研究是多目标优化理论与方法的重要研究方向之一。1979 年,Kutateladze[1]首次提出了近似解概念。1984 年,Loridan[2]将近似解概念推广到向量情形。进一步,Gutiérrez 等人[3]利用 co-radiant 集提出了一类新的近似解概念(C,ε)-(弱)有效解的概念,并研究了这类有效解的一些线性与非线性标量化性质。2011 年,Chicco 等人[4]引入了改进集并利用改进集提出了 E-有效解的概念。此外,Gutiérrez 等人[5]利用改进集提出了 E-弱有效解概念,并研究了 E-弱有效解的标量化性质。还有一些学者得到基于改进集提出的其他近似解概念及其性质的一些成果[6-8]。

近些年来,关于多目标优化问题近似解的标量化性质研究受到了广大学者的关注。Engau 和 Wiecek[9]利用多目标优化问题中的著名的标量化方法研究了 ε-有效解的标量化结果。此外,Ghaznavi-Ghosoni 等人[10]建立 ε-强有效解、ε-弱有效解和 ε-真有效解的一些必要条件和充分条件。Xu 等人[11]利用一类广义切比雪夫标量化模型对多目标优化近似解的标量化性质进行研究,建立了多目标优化问题 ε-弱有效解和 ε-真有效解的一些非线性标量化结果。2014 年,Rastegar 和 Khorram[12]利用松弛变量和剩余变量提出了一类新的组合标量化方法,建立了多目标优化问题的精确解、ε-弱有效解和 ε-真有效解的组合标量化结果,包括 ε-(弱, 真)有效解的充分性条件和 ε-真有效解的必要条件等。然而,目前还没有成果利用 Rastegar 和 Khorram 提出的组合标量化方法研究多目标优化问题 ε-有效解的必要性条件以及$(C,\boldsymbol{\varepsilon})$-近似解和 E-近似解的组合标量化结果。

受文献[3-4,12]的启发,利用 Rastegar 和 Khorram 提出的组合标量化方法研究建立了 ε-真有效解、(C,ε)-有效解、E-有效解、(C,ε)-弱有效解、E-弱有效解的标量化结果。

令 $\mathbf{R}$ 表示实数集全体,$\mathbf{R}^p$ 是 p-维欧氏空间,$\mathbf{0}$ 表示 p-维零向量,$\boldsymbol{e}$ 表示每个分量 $e_i=1$ 的 p-维向量。如果 $A\subset\mathbf{R}^p$ 满足对任意的 $d\in A$ 和 $\alpha>1$,$\alpha d\in A$,则称 A 是 co-radiant 集。集合 A 的支撑函数定义为:$\delta_A(\mu)=\sup\limits_{a\in A}(\mu,a)$,$\mu\in\mathbf{R}^p$。

对任意的 $x,y\in\mathbf{R}^p$,采用如下的序关系:$x<y\Leftrightarrow x_i<y_i$, $\forall\, i\in 1,\cdots,p$,$x\leqslant y\Leftrightarrow x_i\leqq y_i$ 且 $x\neq y$, $\forall\, i\in 1,\cdots,p$,$x\leqq y\Leftrightarrow x_i\leqslant y_i$, $\forall\, i\in 1,\cdots,p$。

考虑如下多目标优化问题:

* **收稿日期:**2018-09-09　　**修回日期:**2018-09-25　　**网络出版时间:**2019-05-09 19:29

资助项目:国家自然科学基金重点项目(No. 11431004);国家自然科学基金面上项目(No. 11671062);重庆市基础与前沿研究计划项目(No. CSTC2015jcyjA00027)

第一作者简介:何爱华,女,研究方向为多目标优化理论与方法, E-mail: mathheaihua@163.com; **通信作者:**赵克全,男,教授,博士生导师,E-mail: kequanz@163.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190509.1928.002.html

$$(\mathrm{MOP})\quad \min f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_p(x)),$$
$$g_i(x)\leqslant 0, j=1,\cdots,m,$$
$$h_k(x)=0, k=1,\cdots,l。$$

其中 $f_i,g_i,h_k:\Omega\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$,且对任意的 $1\leqslant i\leqslant p$,存在 $U_i\in\mathbf{R}$ 使得 $f_i(x)\leqslant U_i$,即 $f_i(x)$ 有上界。将(MOP)的可行集记为 $X=\{x\in\Omega\mid g_i(x)\leqslant 0, j=1,2,\cdots,m; h_k(x)=0,k=1,\cdots,l\}$。

(MOP)的 ε-有效解的定义如下。

定义 1[2] 令 $\varepsilon\in\mathbf{R}_{\geqq}$,$\hat{x}\in X$ 是(MOP)的可行解。若不存在 $x\in X$ 使得 $f(x)\leqslant f(\hat{x})-\varepsilon$,称 $\hat{x}$ 是(MOP)的 ε-有效解。

基于 co-radiant 集而提出的(MOP)(C,ε)-有效解和 (C,ε)-弱有效解概念定义如下。

定义 2[3] 设 $\hat{x}\in X$,$\varepsilon>0$,C 是 $\mathbf{R}^p$ 中的 co-radiant 集,则有:1) 称 $\hat{x}$ 是(MOP)的 (C,ε)-有效解,若 $(f(X)-f(\hat{x}))\cap(-C(\varepsilon))\subset\{0\}$;2) 称 $\hat{x}$ 是(MOP)的 (C,ε)-弱有效解,若 $(f(X)-f(\hat{x}))\cap(-\mathrm{int}\,C(\varepsilon))=\varnothing$。

改进集以及基于改进集而提出的(MOP)E-有效解和 E-弱有效解概念定义如下。

定义 3[4-5] 设 E 是 $\mathbf{R}^p$ 中的非空集合,则:

1) 如果 $0\notin E$ 且 $E+\mathbf{R}^p_{\geqq}=E$,则称 E 是关于 $\mathbf{R}^p_{\geqq}$ 的改进集;

2) 令 E 是 $\mathbf{R}^p$ 中关于 $\mathbf{R}^p_{\geqq}$ 的改进集,若可行点 $\hat{x}\in X$ 满足 $(f(X)-f(\hat{x}))\cap(-E)=\varnothing$,则称 $\hat{x}$ 是(MOP)的 E-有效解;

3) 令 E 是 $\mathbf{R}^p$ 中关于 $\mathbf{R}^p_{\geqq}$ 的改进集,如果可行点 $\hat{x}\in X$ 满足 $(f(X)-f(\hat{x}))\cap(-\mathrm{int}E)=\varnothing$,则称 $\hat{x}$ 是(MOP)的 E-弱有效解。

考虑如下标量化问题:

$$(\mathrm{P})\quad \min_{x\in X}\varphi(x),$$

其中 $\varphi:X\to\mathbf{R}$。设 $\varepsilon>0$ 且 $\bar{x}\in\mathbf{Z}$。若对任意的 $x\in S$,$\varphi(x)\geqslant\varphi(\bar{x})-\varepsilon$,则 $\bar{x}$ 称为问题(P)的一个 ε-最优解。若对任意的 $x\in S$,$\varphi(x)>\varphi(\bar{x})-\varepsilon$,则称 $\bar{x}$ 为问题(P)的严格 ε-最优解。

本文考虑下面的标量化问题:

$$(\mathrm{SOP})\quad \min\left\{\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(x)-\sum_{i=1}^{p}\gamma_i s_i^{+}+\sum_{i=1}^{p}\mu_i s_i^{-}\right\},$$
$$\text{s.t.}\quad f_i(x)+s_i^{+}-s_i^{-}\leqslant\alpha_i,$$
$$x\in X, s_i^{+}, s_i^{-}\geqslant 0, 1\leqslant i\leqslant p,$$

其中 λ_i,μ_i 和 $\gamma_i(i=1,2,\cdots,p)$ 是非负的权重向量,$\alpha_i(i=1,2,\cdots,p)$ 是给定的上界。

2 主要结果

本节建立了(MOP)的 ε-有效解、(C,ε)-有效解、E-有效解、(C,ε)-弱有效解和 E-弱有效解的组合标量化结果。

定理 1 设 $\varepsilon\in\mathbf{R}^p_{\geqq}$,若 $\hat{x}$ 是(MOP)的 ε-有效解,则存在 $\gamma,\mu,\alpha,\hat{s}^{+},\hat{s}^{-}$,使得 $(\hat{x},\hat{s}^{+},\hat{s}^{-})$ 是(SOP)的 ε-最优解,其中 $\varepsilon=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\varepsilon_i$,$\lambda\in\mathbf{R}^p_{\geqq}$。

证明 因为 $\hat{x}$ 是(MOP)的 ε-有效解,所以不存在 $\bar{x}$ 使得 $f(\bar{x})\leqslant f(\hat{x})-\varepsilon$。令 $\gamma=0$,$\mu=0$,$\hat{s}^{+}=0$,$\hat{s}^{-}=0$,$\alpha_i=f_i(\hat{x})-\varepsilon_i$,$\forall i\in 1,2,\cdots,p$,从而满足(SOP)的可行解均满足 $f(\bar{x})=f(\hat{x})-\varepsilon$,则有 $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(\bar{x})=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(\hat{x})-\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\varepsilon_i=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(\hat{x})-\varepsilon$。故 $(\hat{x},\hat{s}^{+},\hat{s}^{-})$ 是(SOP)的 ε-最优解。 证毕

定理 2 令 $\varepsilon>0$,$C\subset\mathbf{R}^p_{\geqq}$ 是 co-radiant 集,$\beta<-\delta_{-C(\varepsilon)}(\lambda+\gamma)$,$0\leqslant\varepsilon\leqslant\max\{0,\beta\}$,$\lambda+\gamma\geqslant 0$,$\mu\geqq 0$。若 $(\hat{x},\hat{s}^{+},\hat{s}^{-})$ 是(SOP)的 ε-最优解,则 $\hat{x}$ 是(MOP)的 (C,ε)-弱有效解。

证明 用反证法。若 $\hat{x}$ 不是(MOP)的 (C,ε)-弱有效解,则 $(f(X)-f(\hat{x}))\cap(-\mathrm{int}C(\varepsilon))\neq\varnothing$。故存在 $c\in\mathrm{int}C$,$\bar{x}\in X$ 使得 $f(\bar{x})-f(\hat{x})=-\varepsilon c$。从而有:

$$f_i(\bar{x})+\varepsilon c_i+\hat{s}_i^{+}-\hat{s}_i^{-}=f_i(\hat{x})+\hat{s}_i^{+}-\hat{s}_i^{-}\leqslant\alpha_i, i=1,2,\cdots,p。\tag{1}$$

令 $s_i^+=\hat{s}_i^-+\varepsilon c_i$。由 $C\subset\mathbf{R}_{\geqq}^p$ 和 $c\in\mathrm{int}C$ 可知，$c_i>0,i=1,2,\cdots,p$。则 $s_i^+>\hat{s}_i^+,i=1,2,\cdots,p$。由(1)式可得，$(\bar{x},s^+,\hat{s}^-)$是(SOP)的可行解。此外，

$$\sum_{i=1}^p\lambda_i f_i(\bar{x})-\sum_{i=1}^p\gamma_i s_i^+ +\sum_{i=1}^p\mu_i\hat{s}_i^-=\sum_{i=1}^p\lambda_i(f_i(\hat{x})-\varepsilon c_i)-\sum_{i=1}^p\gamma_i(\hat{s}_i^+ +\varepsilon c_i)+\sum_{i=1}^p\mu_i\hat{s}_i^-=$$
$$\sum_{i=1}^p\lambda_i f_i(\hat{x})-\sum_{i=1}^p\gamma_i\hat{s}_i^+ +\sum_{i=1}^p\mu_i\hat{s}_i^- -\sum_{i=1}^p(\lambda_i+\gamma_i)\varepsilon c_i\text{ 。}$$

下证：

$$\sum_{i=1}^p(\lambda_i+\gamma_i)\varepsilon c_i>\varepsilon\text{ 。}\tag{2}$$

若 $\delta_{-C(\varepsilon)}(\lambda+\gamma)=0$，则 $\varepsilon=0$。由 $\lambda+\gamma\geqslant0$ 可得，存在 j 使得 $\lambda_j+\gamma_j>0$，则有 $\sum_{i=1}^p(\lambda_i+\gamma_i)\varepsilon c_i\geqslant(\lambda_j+\gamma_j)\varepsilon c_j>0=\varepsilon$ 。

若 $\delta_{-C(\varepsilon)}(\lambda+\gamma)<0$，则 $\varepsilon=\beta<-\delta_{-C(\varepsilon)}(\lambda+\gamma)$。故 $\sum_{i=1}^p(\lambda_i+\gamma_i)\varepsilon c_i\geqslant-\delta_{-C(\varepsilon)}(\lambda+\gamma)>\varepsilon$，即有(2)式成立。

因此，$\sum_{i=1}^p\lambda_i f_i(\bar{x})-\sum_{i=1}^p\gamma_i s_i^+ +\sum_{i=1}^p\mu_i\hat{s}_i^-<\sum_{i=1}^p\lambda_i f_i(\hat{x})-\sum_{i=1}^p\gamma_i\hat{s}_i^+ +\sum_{i=1}^p\mu_i\hat{s}_i^- -\varepsilon$ 。这与$(\hat{x},\hat{s}^+,\hat{s}^-)$是(SOP)的 ε-最优解矛盾，故$\hat{x}$是(C,ε)-弱有效解。 证毕

注 若 $C\not\subset\mathbf{R}_{\geqq}^p$，则定理 2 在 C 是凸 co-radiant 集条件下也不一定成立。

例 令 $\varepsilon=1,C=\{(x_1,x_2)\mid x_1\in\mathbf{R},x_2\geqslant1\},\lambda=(1,0),\gamma=\mu=(0,0),X=\{(x_1,x_2)\mid x_1=0,-2\leqslant x_2\leqslant0\}$，$f(x)=x$。则 C 是凸 co-radiant 集且 $C(\varepsilon)=\{(x_1,x_2)\mid x_1\in\mathbf{R},x_2\geqslant1\}$，但 $C\not\subset\mathbf{R}_{\geqq}^p$。此外 $f(X)=\{x=(x_1,x_2)\mid x_1=0,-2\leqslant x_2\leqslant0\}$，$\lambda+\gamma=(1,0),\varepsilon=0$。进一步，取$\hat{x}=(0,0)$。显然，$\hat{x}$是(SOP)的 ε-最优解，但$\hat{x}$不是(MOP)的(C,ε)-弱有效解。

推论 1 令 $E\subset\mathbf{R}_{\geqq}^p$ 是关于 $\mathbf{R}_{\geqq}^p$ 的改进集，$\beta<-\delta_{-E}(\lambda+\gamma),0\leqslant\varepsilon\leqslant\max\{0,\beta\},\lambda+\gamma\geqslant0,\mu\geqq0$。若 $(\hat{x},\hat{s}^+,\hat{s}^-)$是(SOP)的 ε-最优解，则$\hat{x}$是(MOP)的 E-弱有效解。

证明 由 $E\subset\mathbf{R}_{\geqq}^p$ 是关于 $\mathbf{R}_{\geqq}^p$ 的改进集易证 E 是 co-radiant 集。从而利用定理 2 可得$\hat{x}$是(MOP)的 E-弱有效解。 证毕

定理 3 令 $\varepsilon>0,C\subset\mathbf{R}_{\geqq}^p$ 是 co-radiant 集，$\beta<-\delta_{-C(\varepsilon)}(\lambda+\gamma),0\leqslant\varepsilon\leqslant\max\{0,\beta\},\lambda+\gamma>0,\mu\geqq0$。若 $(\hat{x},\hat{s}^+,\hat{s}^-)$是(SOP)的 ε-最优解，则$\hat{x}$是(MOP)的(C,ε)-有效解。

证明 用反证法。若$\hat{x}$不是(MOP)的(C,ε)-有效解，则$(f(X)-f(\hat{x}))\cap(-C(\varepsilon))\not\subset\{0\}$。故存在 $c\in C\backslash\{0\},\bar{x}\in X$ 使得 $f(\bar{x})-f(\hat{x})=-\varepsilon c$。从而有：

$$f_i(\bar{x})+\varepsilon c_i+\hat{s}_i^+-\hat{s}_i^-=f_i(\hat{x})+\hat{s}_i^+-\hat{s}_i^-\leqslant\alpha_i,i=1,2,\cdots,p\text{。}\tag{3}$$

令 $s_i^+=\hat{s}_i^+ +\varepsilon c_i$，由 $C\subset\mathbf{R}_{\geqq}^p$ 和 $c\neq0$ 可知，存在 j 使得 $c_j>0$，则 $s_j^+>\hat{s}_j^+$。由(3)式可得，$(\bar{x},\hat{s}^+,\hat{s}^-)$是(SOP)的可行解。

此外，类似定理 2 的证明方法可得 $\sum_{i=1}^p\lambda_i f_i(\bar{x})-\sum_{i=1}^p\gamma_i s_i^+ +\sum_{i=1}^p\mu_i\hat{s}_i^-<\sum_{i=1}^p\lambda_i f_i(\hat{x})-\sum_{i=1}^p\gamma_i\hat{s}_i^+ +\sum_{i=1}^p\mu_i\hat{s}_i^- -\varepsilon$，这与$(\hat{x},\hat{s}^+,\hat{s}^-)$是 ε-最优解矛盾。故$\hat{x}$是(MOP)的(C,ε)-有效解。 证毕

推论 2 令 $E\subset\mathbf{R}_{\geqq}^p$ 是关于 $\mathbf{R}_{\geqq}^p$ 的改进集，$\beta<-\delta_{-C(\varepsilon)}(\lambda+\gamma),0\leqslant\varepsilon\leqslant\max\{0,\beta\},\lambda+\gamma>0,\mu\geqq0$。如果 $(\hat{x},\hat{s}^+,\hat{s}^-)$是(SOP)的 ε-最优解，则$\hat{x}$是(MOP)的 E-有效解。

证明 由 $E\subset\mathbf{R}_{\geqq}^p$ 是 co-radiant 集和定理 3 可得$\hat{x}$是(MOP)的 E-有效解。 证毕

定理 4 令 $\varepsilon>0,C\subset\mathbf{R}_{\geqq}^p$ 是 co-radiant 集，$\beta<-\delta_{-C(\varepsilon)}(\lambda+\gamma),0\leqslant\varepsilon\leqslant\max\{0,\beta\},\lambda+\gamma\geqq0,\mu\geqq0$。若 $(\hat{x},\hat{s}^+,\hat{s}^-)$是(SOP)的 ε-严格最优解，则$\hat{x}$是(MOP)的(C,ε)-有效解。

证明 用反证法。若$\hat{x}$不是(MOP)的(C,ε)-有效解，则$(f(X)-f(\hat{x}))\cap(-C(\varepsilon))\not\subset\{0\}$。故存在 $c\in C\backslash\{0\}$，$\bar{x}\in X$ 使得 $f(\bar{x})-f(\hat{x})=-\varepsilon c$。从而有：

$$f_i(\bar{x})+\varepsilon c_i+\hat{s}_i^+-\hat{s}_i^-=f_i(\hat{x})+\hat{s}_i^+-\hat{s}_i^-\leqslant\alpha_i,i=1,2,\cdots,p\text{。}\tag{4}$$

令 $s_i^+=\hat{s}_i^-+\varepsilon c_i$。由 $C\subset\mathbf{R}_{\geqq}^p$ 和 $c\neq0$ 可知，存在 j 使得 $c_j>0$，则 $s_j^+>\hat{s}_j^-$ 。由(4)式可得，$(\bar{x},\hat{s}^+,\hat{s}^-)$是(SOP)的可行解。此外，有：

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(\overline{x})-\sum_{i=1}^{p}\gamma_i s_i^{+}+\sum_{i=1}^{p}\mu_i \hat{s}_i^{-}=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i(f_i(\hat{x})-\varepsilon c_i)-\sum_{i=1}^{p}\gamma_i(\hat{s}_i^{+}+\varepsilon c_i)+\sum_{i=1}^{p}\mu_i \hat{s}_i^{-}\leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(\hat{x})-\sum_{i=1}^{p}\gamma_i \hat{s}_i^{+}+\sum_{i=1}^{p}\mu_i \hat{s}_i^{-}-\varepsilon$$

这与$(\hat{x},\hat{s}^{+},\hat{s}^{-})$是ε-最优解矛盾。故$\hat{x}$是(MOP)的$(C,\varepsilon)$-有效解。 证毕

推论 3 令$E\subset \mathbf{R}^{p}_{\geqq}$是关于$\mathbf{R}^{p}_{\geqq}$的改进集,$\beta<-\delta_{-C(\varepsilon)}(\lambda+\gamma)$,$0\leqslant\varepsilon\leqslant\max\{0,\beta\}$,$\lambda+\gamma\geqq 0$,$\mu\geqq 0$。若$(\hat{x},\hat{s}^{+},\hat{s}^{-})$是(SOP)的ε-严格最优解,则$\hat{x}$是(MOP)的$E$-有效解。

证明 由$E\subset \mathbf{R}^{p}_{\geqq}$是 co-radiant 集和定理 4 可得$\hat{x}$是(MOP)的$E$-有效解。 证毕

参考文献:

[1] KUTATELADZE S S. Convex ε-programming [J]. Soviet Mathematics Doklady, 1979, 20(2): 391-393.

[2] LORIDAN P. ε-solutions in vector minimization problems [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1984, 43(2): 265-276.

[3] GUTIÉRREZ C, JIMÉNEZ B, NOVO V. A unified approach and optimality conditions for approximate solutions of vector optimization problems[J]. Siam Journal on Optimization, 2006, 17(3): 688-710.

[4] CHICOO M, MIGNANEGO F, PUSILLO L, et al. Vector optimization problem via improvement sets[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2011, 150(3): 516-529.

[5] GUTIÉRREZ C, JIMÉNEZ B, NOVO V. Improvement sets and vector optimization[J]. European Journal of Operational Research, 2012, 223(2): 304-311.

[6] ZHAO K Q, YANG X M, PENG J W. Weak E-optimal solution in vector optimization [J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2013, 17(4): 1287-1302.

[7] ZHAO K Q, YANG X M. E-Benson proper efficiency in vector optimization[J]. Optimization, 2015, 64(4): 739-752.

[8] XIA Y M, ZHANG W L, ZHAO K Q. Characterizations of improvement sets via quasi interior and applications in vector optimization[J]. Optimization Letters, 2016, 10(4): 769-780.

[9] ENGAU A, WIECEK M M. Generating ε-efficient solutions in multiobjective programming[J]. European Journal of Operational Research, 2007, 177(3): 1566-1579.

[10] GHAZNAVI-GHOSONI B A, KHORRAM E, SOLEIMANI-DAMANEH M. Scalarization for characterization of approximate strong/weak/proper efficiency in multi-objective optimization[J]. Optimization, 2013, 62(6): 703-720.

[11] 徐威娜,朱巧,赵克全.多目标优化近似解的一些非线性标量化性质[J].重庆师范大学学报(自然科学版),2017,34(6):7-10.

XU W N, ZHU Q, ZHAO K Q. Nonlinear scalarization characterizations of approximate solutions in multi-objective optimization[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2017, 34(6): 7-10.

[12] RATERGAR N, KHORRAM E. A combined scalarizing method for multi-objective programming problems[J]. European Journal of Operational Research, 2014, 236(1): 229-237.

Operations Research and Cybernetics

Combined Scalarizations for Approximate Solutions of Multi-Objective Optimization Problems

HE Aihua, ZHANG Xiaoqing, ZHAO Kequan

(Department of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [**Purposes**] The scalarization properties of approximate solutions for multi-objective optimization problems is studied here. [**Methods**] Co-radiant sets and improved sets are used to establish approximate solutions of multi-objective optimization problems by a kind of combined scalarization method. [**Findings**] The combined scalarization results of ε-effective solution, (C,ε)-efficient solutions, E-efficient solutions, (C,ε)-weakly efficient solutions and E-weakly efficient solutions of the multi-objective optimization problem are obtained. [**Conclusions**]These combined scalarization results provide a theoretical basis for designing approximate solutions of multi-objective optimization problems.

Keywords: multi-objective optimization; ε-efficient solutions; (C,ε)-(weakly) efficient solutions; E-(weakly) efficient solutions; combined scalarization

(责任编辑 黄 颖)