

破产时刻和破产赤字对保险公司破产概率的影响研究^{*}

——基于 Erlang 风险模型

杨利平¹, 周纹心²

(1. 重庆大学 数学与统计学院, 重庆 401331; 2. 重庆师范大学 财务处, 重庆 401331)

摘要:【目的】保险公司作为市场经济中重要活动主体,优胜劣汰是自由经济运行的必然结果,为了了解保险公司的生存现状,研究了当初始盈余值大于0时,个人索赔额服从 Erlang(3)分布,索赔时间间隔服从 Erlang(2)分布的 Sparre Andersen 风险模型。【方法】通过期望折现罚金函数,运用拉格朗日隐函数定理和拉普拉斯变换的技巧进行求解。【结果】得到破产时间和破产赤字的联合概率密度函数。【结论】根据中国上市保险公司的实际数据,对中国保险公司破产概率进行了实证研究,并证明该模型是有效的。

关键词:破产时刻;破产赤字;Erlang 分布

中图分类号:O213.9;O211.3

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2019)03-0091-07

1 研究背景

毕秀春等人^[1]推广了 Sparre Andersen 风险模型,并且得到了破产概率的尾等价式。毕秀春等人^[2]进一步研究了延迟更新风险模型,在假定个人索赔分布是重尾分布的前提下得到了破产概率的局部等价式。对于经典的风险模型,当个人索赔额分布是 Erlang(2)或者两个指数族分布的混合分布时,Dickson^[3]推导出破产时刻和破产赤字的联合密度函数。对于经典的风险模型,当个人索赔额分布是 Erlang 分布的无限混合分布时,Dickson 等人和郭晓莉等人^[4-5]给出了有限时间破产概率公式。李荣等人^[6]研究了 Sparre Andersen 风险模型,考虑了有意外巨额赔付情况下保险公司的破产概率,并得到尾等价式,此结果反映了特殊的巨额索赔对破产的影响程度。

通过带有索赔次数的期望折现罚金更新方程,运用拉格朗日隐函数定理和拉普拉斯变换等工具,推导出初始盈余等于0时破产时间和破产赤字的联合密度函数的拉普拉斯变换,然后运用拉普拉斯变换的技巧,得到了初始盈余大于0的情况下破产时刻和破产赤字的联合密度函数。以索赔分布服从 Erlang(3)为例,得到了该模型破产时刻和破产赤字的联合密度函数。文献[7]研究了当个人索赔额分布服从指数分布和 Erlang(2)分布时,破产时间和破产赤字的联合密度函数。不同于文献[7]的研究,本文把个人索赔分布推广到三阶 Erlang 分布,由于三阶 Erlang 分布比二阶 Erlang 分布复杂得多,这就给计算和理论推导带来了许多困难。推导过程中,利用拉格朗日隐函数定理得到的转换关系(4)式、(5)式中存在 n 重卷积,而通常情况下解出 n 重卷积非常复杂,因此本文利用拉普拉斯卷积定理把 n 重卷积转换成乘积的形式。最后为了检验理论的有效性,利用国泰安数据库搜集了中国上市保险公司的大数据,对中国保险公司的破产概率进行了实证研究。研究结果证明所提出的模型以及结论与真实情况吻合,对市场行为具有一定的指导意义。

2 破产时刻和破产赤字的联合密度函数

本文考虑了 Dickson 等人^[8]提出的模型。该模型考虑索赔时间间隔服从 Erlang(2)分布的精算风险模型。Erlang(2)分布的尺度参数为 λ , p 表示个人索赔额的密度函数,个人索赔额密度函数的 k 阶矩为 m_k ,用 $\hat{p}$ 表示 p

* 收稿日期:2018-07-18 修回日期:2019-03-30 网络出版时间:2019-05-09 19:30

资助项目:重庆市自然科学基金(No. cstc2016jcyjA0836);重庆市社会科学规划培育项目(No. 2018PY69)

第一作者简介:杨利平,女,讲师,研究方向为数量经济学,E-mail: ylp_hzq2017@163.com;通信作者:周纹心,女,E-mail: zhouwxyty@126.com

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190509.1930.034.html>

的拉普拉斯变换, 定义为 $\hat{p}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} p(x) dx, s \geq 0$ 。令 $P = 1 - \bar{P}$ 表示索赔额的分布函数, 其中 $\bar{P} = \int_x^\infty p(x) dx$ 。 c 表示保险公司单位时间保费收入并假设 $\frac{2c}{\lambda} > m_1$ 。令 $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ 表示盈余过程, T 表示破产时刻, $Y = |-\{U(T)\}|$ 代表破产时的赤字。则定义为 T 和 Y 的二元拉普拉斯变换为:

$$\varphi(\mu) = E[e^{(-\delta T - \lambda Y)} I_{(T < \infty)} | U(0) = \mu], \delta \geq 0, s \geq 0.$$

其中: μ 表示初始的盈余, $w(\mu, t)$ 表示 T 的密度函数, $w(\mu, y, t)$ 代表 T 和 Y 的联合密度函数。因此 $\varphi(\mu) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t - \lambda y} w(\mu, y, t) dy dt$ 。

首先考虑初始盈余为 0 时, 破产时刻和破产赤字的联合概率密度函数。假设个人索赔额的密度函数为:

$$p(x+y) = \sum_{i=1}^n \eta_i(x) t_i(y), \quad (1)$$

其中 $\{\eta_i, t_i\}_{i=1}^m$ 是一些特殊的函数。Willmot^[9]证明了这种因式分解可以应用到个人索赔额分布是具有相同尺度参数的 Erlang 分布混合的情形。进一步假设密度函数 $\{t_i\}$ 也是具有相同尺度参数的 Erlang 分布混合的函数, 则有 $\bar{P}(x+y) = \int_y^\infty p(x+v) dv = \int_y^\infty \sum_{j=1}^m \eta_j(x) t_j(v) dv = \sum_{j=1}^m \eta_j(x) \bar{T}_j(y)$ 成立, 其中 $T_j = 1 - \bar{T}_j$ 是 t_j 的分布函数。

类似地, 假设 η_j 满足(1)式:

$$\eta_j(x+y) = \sum_{i=1}^n \xi_{ij}(x) \zeta_{ij}(y). \quad (2)$$

根据文献[10]有 $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t - \lambda y} w(0, y, t) dy dt = \frac{\lambda^2}{c^2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-r_1 x} e^{-r_2 y} \bar{w}(x+y) dy dx$, 其中 $\bar{w}(\mu) = \int_0^\infty e^{-sx} p(\mu+z) dz$,

把(1)式代入以 $\bar{w}(\mu)$ 可得 $\bar{w}(\mu) = \int_0^\infty e^{-sx} p(\mu+z) dz = \int_0^\infty e^{-sx} \sum_{j=1}^m \eta_j(\mu) t_j(z) dz = \sum_{j=1}^m \eta_j(\mu) \hat{t}_j(s)$, 再由(2)式可得

$\bar{w}(x+y) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \xi_{ij}(x) \zeta_{ij}(y) \hat{t}_j(s)$ 。因此有:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t - \lambda y} w(0, y, t) dy dt = \frac{\beta^2}{c^2} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \hat{\xi}_{ij}(r_1) \hat{\zeta}_{ij}(r_2) \hat{t}_j(s). \quad (3)$$

(3)式是当初始盈余 $\mu=0$ 时, 破产时刻和破产赤字的联合密度函数的二元拉普拉斯变换。本研究主要讨论个人索赔额的密度函数服从参数为 β 的 Erlang(3)分布, 分布函数满足具有相同尺度参数的 Erlang 分布的混合, 已知该分布的密度函数为 $x > 0, p(x) = \frac{\beta^3}{2} x^2 e^{-\beta x}$ 和 $x \leq 0, p(x) = 0$, 利用前面提出的因式分解理论可以得到:

$$p(x+y) = \frac{\beta^2}{2} x^2 e^{-\beta x} \beta e^{-\beta y} + e^{-\beta x} \frac{\beta^3}{2} y^2 e^{-\beta y} + \beta x e^{-\beta x} \beta^2 y e^{-\beta y}.$$

令 $\eta_1 = \frac{\beta^2}{2} x^2 e^{-\beta x}, \eta_2 = \beta x e^{-\beta x}, \eta_3 = e^{-\beta x}, \tau_1 = \beta e^{-\beta y}, \tau_2 = \beta^2 y e^{-\beta y}, \tau_3 = \frac{\beta^3}{2} y^2 e^{-\beta y}, \tau_i (i=1, 2, 3)$ 是 Erlang 分布的密度函数, 得到 $\tau_i (i=1, 2, 3)$ 的拉普拉斯变换: $\hat{\tau}_1 = \frac{\beta}{\beta+s}, \hat{\tau}_2 = \left(\frac{\beta}{\beta+s}\right)^2, \hat{\tau}_3 = \left(\frac{\beta}{\beta+s}\right)^3$ 。容易验证 $\eta_i (i=1, 2, 3)$ 满足(2)式, 并且 $\eta_i (i=1, 2, 3)$ 可以表示为:

$$\eta_1(x+y) = \frac{\beta^2}{2} x^2 e^{-\beta x} e^{-\beta y} + x e^{-\beta x} \beta^2 e^{-\beta y} + \frac{1}{\beta} e^{-\beta x} \frac{\beta^3}{2} y^2 e^{-\beta y},$$

$$\eta_2(x+y) = \beta x e^{-\beta x} e^{-\beta y} + \frac{1}{\beta} e^{-\beta x} \beta^2 y e^{-\beta y}, \eta_3(x+y) = e^{-\beta x} e^{-\beta y}.$$

由 $\eta_j(x+y) (j=1, 2, 3)$ 的表达式可以找到 $\{\xi_{ij}, \zeta_{ij}\}_{i,j=1}^3$ 的表达式, 并对 $\{\xi_{ij}, \zeta_{ij}\}_{i,j=1}^3$ 各项分别做拉普拉斯变换后代入(3)式可得:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t - \lambda y} w(0, y, t) dy dt = \frac{\lambda^2}{c^2} \left(\frac{\beta^2}{(\beta+r_1)^3 (\beta+r_2)} + \frac{\beta^2}{(\beta+r_2)^2 (\beta+r_1)^2} + \frac{\beta^2}{(\beta+r_1) (\beta+r_2)^3} \right) \times \left(\frac{\beta}{\beta+s} \right) + \frac{\lambda^2}{c^2} \left(\frac{\beta}{(\beta+r_1)^2 (\beta+r_2)} + \frac{\beta}{(\beta+r_1) (\beta+r_2)} \right) \times \left(\frac{\beta}{\beta+s} \right)^2 + \frac{\lambda^2}{c^2} \frac{1}{(\beta+r_1) (\beta+r_2)} \left(\frac{\beta}{\beta+s} \right)^3. \quad (4)$$

进一步引用文献[3],当 $n=3, q_3=1$ 可得:

$$w(\mu, y, t) = h_1(\mu, t)\beta e^{-\beta y} + h_2(\mu, t)\beta^2 y e^{-\beta y} + h_3(\mu, t)\frac{\beta^3}{2} y^2 e^{-\beta y}. \quad (5)$$

其中 $h_i(\mu, t) (i=1, 2, 3)$ 是一些特殊的函数, 见(11)~(13)式。

接下来由(5)式及 Dikson^[3]提出的方法可得 $h_i(\mu, t) (i=1, 2, 3)$ 的表达式。具体来说, 令 $\hat{h}_i(s, \delta) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s\mu - \delta t} h_i(\mu, t) dt d\mu, i=1, 2, 3$, 并令 $\hat{h}_i(0, \delta) = \int_0^\infty e^{-\delta t} h_i(0, \delta) dt, i=1, 2, 3$ 。根据文献[3]有:

$$w(\mu, y, t) = \int_{\tau=0}^t \int_{x=0}^\mu w(\mu-x, y, t-\tau) dx d\tau + w(0, \mu+y, t). \quad (6)$$

把(5)式代入(6)式可得:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^3 h_i(\mu, t) \frac{\beta^i y^{i-1} e^{-\beta y}}{\Gamma(i)} &= \int_0^t \int_0^\mu h_3(0, t) \frac{\beta^3 y^2 e^{-\beta y}}{2} \left[\sum_{i=0}^3 h_i(\mu-x, t-\tau) \frac{\beta^i y^{i-1} e^{-\beta y}}{\Gamma(i)} \right] dx d\tau + \\ &\int_0^t \int_0^\mu h_2(0, t) \beta^2 y e^{-\beta y} \left[\sum_{i=0}^3 h_i(\mu-x, t-\tau) \frac{\beta^i y^{i-1} e^{-\beta y}}{\Gamma(i)} \right] dx d\tau + \\ &\int_0^t \int_0^\mu h_1(0, t) \beta e^{-\beta y} \left[\sum_{i=0}^3 h_i(\mu-x, t-\tau) \frac{\beta^i y^{i-1} e^{-\beta y}}{\Gamma(i)} \right] dx d\tau + \\ &h_3(0, t) \frac{\beta^3}{2} (\mu+y)^2 e^{-\beta(\mu+y)} + h_2(0, t) \beta^2 (\mu+y) e^{-\beta(\mu+y)} + h_1(0, t) \beta e^{-\beta(\mu+y)}. \end{aligned}$$

其中, 令:

$$\begin{aligned} h_3(\mu, t) &= \int_0^t \int_0^\mu \left(\sum_{i=0}^3 h_i(0, t) \frac{\beta^i y^{i-1} e^{-\beta y}}{\Gamma(i)} \right) h_3(\mu-x, t-\tau) dx d\tau + h_3(0, t) e^{-\beta \mu}, \\ h_2(\mu, t) &= \int_0^t \int_0^\mu \left(\sum_{i=0}^3 h_i(0, t) \frac{\beta^i y^{i-1} e^{-\beta y}}{\Gamma(i)} \right) h_2(\mu-x, t-\tau) dx d\tau + h_2(0, t) \beta \mu e^{-\beta \mu} + h_2(0, t) e^{-\beta \mu} \end{aligned}$$

以及

$$h_1(\mu, t) = \int_0^t \int_0^\mu \left(\sum_{i=0}^3 h_i(0, t) \frac{\beta^i y^{i-1} e^{-\beta y}}{\Gamma(i)} \right) h_1(\mu-x, t-\tau) dx d\tau + h_1(0, t) \frac{\beta^2}{2} \mu^2 e^{-\beta \mu} + h_1(0, t) \beta \mu e^{-\beta \mu} + h_1(0, t) e^{-\beta \mu}.$$

首先计算 $h_3(\mu, t)$ 的具体表达式, 有:

$$\hat{h}_3(s, \delta) = \frac{\hat{h}_3(0, \delta) \frac{1}{\beta+s}}{1 - \sum_{i=1}^3 \hat{h}_i(0, \delta) \left(\frac{\beta}{\beta+s} \right)^i} = \frac{1}{\beta} \sum_{n=0}^\infty \sum_{r=0}^n \sum_{p=0}^{n-r} \binom{n}{r} \binom{n-r}{p} \hat{h}_3(0, \delta)^{r+1} \hat{h}_2(0, \delta)^p \hat{h}_1(0, \delta)^{n-r-p} \left(\frac{\beta}{\beta+s} \right)^{n+2r+p+1}. \quad (7)$$

把(4)式代入(7)式可得:

$$\begin{aligned} \hat{h}_3(s, \delta) &= \frac{1}{\beta} \sum_{n=0}^\infty \sum_{r=0}^n \sum_{p=0}^{n-r} \binom{n}{r} \binom{n-r}{p} \frac{\lambda^{2n+2} \beta^{2n-2r-p}}{c^{2n+2}} \sum_{x=0}^p \binom{p}{x} \sum_{d=0}^{n-r-p} \binom{n-r-p}{d} \cdot \\ &\sum_{z=0}^{n-r-p-d} \binom{n-r-p-d}{z} \left(\frac{1}{\beta+r_1} \right)^{n+1+x+2d+z} \left(\frac{1}{\beta+r_2} \right)^{3n+1-2r-p-x-2d-z} \left(\frac{\beta}{\beta+s} \right)^{n+2r+p+1}. \end{aligned}$$

因此得到 $h_3(\mu, t)$ 的二重拉普拉斯变换的表达式, 利用卷积定理就可以计算出 $h_3(\mu, t)$ 的表达式。当 $\hat{f}(r_1) = \frac{1}{(\beta+r_2)^{k+1}}$ 时, 根据文献[7]可得:

$$\begin{aligned} g(t) &= c e^{-\lambda t} \frac{(ct)^k e^{-\beta ct}}{\Gamma(k+1)} + \sum_{m=1}^\infty \frac{\lambda^m t^{m-1} e^{-\lambda t}}{m!} \int_0^{ct} y q^*(ct-y) \frac{y^k e^{-\beta y}}{\Gamma(k+1)} dy = \frac{c e^{-\lambda t} (ct)^k e^{-\beta ct}}{\Gamma(k+1)} + \\ &\sum_{m=1}^\infty \frac{\lambda^m t^{m-1} e^{-\lambda t}}{m!} \int_0^{ct} y \frac{\beta^{\frac{3m}{2}} (ct-y)^{\frac{3m}{2}-1} e^{-\beta(ct-y)}}{\Gamma(m)} \frac{y^k e^{-\beta y}}{\Gamma(k+1)} dy = \frac{c(ct)^k e^{-(\lambda+\beta c)t}}{k!} \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{(k+2)^{\frac{3m}{2}}} \frac{(\lambda \beta^{\frac{3}{2}} ct^{\frac{5}{2}})^m}{m!}, \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$ 。特别地, 当 $\hat{f}(r_1) = \frac{1}{(\beta+r_1)^{n+1+x+2d+z}}$ 时, 有:

$$g(t) = \frac{c(ct)^{n+x+2d+z} e^{-(\lambda+\beta c)t}}{(n+x+2d+z)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x+2d+z+2)_{\frac{3m}{2}}} \frac{(\lambda\beta^{\frac{3}{2}} ct^{\frac{5}{2}})^m}{m!} =: A(t)。$$

$$\text{同理, 当 } \hat{f}(r_2) = \frac{1}{(\beta+r_2)^{n+1}} \text{ 时, 运用文献[6]可得: } h(t) = \frac{c(ct)^n e^{-(\lambda+\beta c)t}}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)_{\frac{3k}{2}}} \frac{(-\lambda\beta^{\frac{3}{2}} ct^{\frac{5}{2}})^k}{k!}。$$

特别地, 当 $\hat{f}(r_2) = \frac{1}{(\beta+r_2)^{3n+1-2r-p-x-2d-z}}$ 时, $h(t)$ 可表示为:

$$h(t) = \frac{c(ct)^{3n-2r-p-x-2d-z} e^{-(\lambda+\beta c)t}}{(3n-2r-p-x-2d-z)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3n-2r-p-x-2d-z+2)_{\frac{3k}{2}}} \frac{(-\lambda\beta^{\frac{3}{2}} ct^{\frac{5}{2}})^k}{k!} =: B(t)。$$

令 $C(t)$ 是 $A(t)$ 和 $B(t)$ 的卷积, 则有:

$$h_3(\mu, t) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^n \sum_{p=0}^{n-r} \binom{n}{r} \binom{n-r}{p} \frac{\beta_{n+2r+p+1} \mu^{n+2r+p} e^{-\beta\mu}}{T(n+2r+p+1)} \times \frac{\lambda^{2n+2} \beta^{2n-2r-p}}{c^{2n+2}} \sum_{x=0}^p \binom{p}{x} \sum_{d=0}^{n-r-p} \binom{n-r-p}{d} \sum_{z=0}^{n-r-p-d} \binom{n-r-p-d}{z} C(t)。 \quad (9)$$

接下来计算 $C(t)$ 。

因为:

$$A(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{t^{\frac{5m}{2}+n+x+2d+z} e^{-(\lambda+\beta c)t}}{\Gamma(2m+n+x+2d+z+1)}, \quad B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{t^{3n-2r-p-x-2d-z+\frac{5k}{2}} e^{-(\lambda+\beta c)t}}{\Gamma(3n-2r-p-x-2d-z+2k+1)},$$

其中:

$$a_m = \frac{c^{n+x+2d+z+1} (\lambda\beta c)^m \Gamma(2m+n+x+2d+z+1)}{m! (n+x+2d+z)! (n+x+2+2d+z)_{\frac{3m}{2}}},$$

$$b_k = \frac{c^{3n-2r-p-x-2d-z+2k+1} (-\lambda\beta c)^k \Gamma(3n-2r-p-x-2d-z+2k+1)}{(3n-2r-2p-x-2d-z+2)_{\frac{3k}{2}} k! (3n-2r-p-x-2d-z)!}。$$

由于 n, r, p 是固定的, 则 $A(t)$ 的第 m 项与 $B(t)$ 的第 k 项卷积的拉普拉斯变换为:

$$\frac{a_m b_k}{(\lambda+\beta c+s)^{4n-2r-p+2+\frac{5k}{2}+\frac{5m}{2}}}。 \quad (10)$$

$A(t)$ 的第 m 项与 $B(t)$ 的第 k 项卷积可由 (10) 式求拉普拉斯变换的逆变换得到, 即 $\frac{a_m b_k t^{\frac{5m}{2}+4n-2r-p+\frac{5k}{2}+1} e^{-(\lambda+\beta c)t}}{\Gamma\left(\frac{5m}{2}+4n-2r-p+\frac{5k}{2}+2\right)}。$

现在考虑 $\frac{t^{4n-2r-p+\frac{5m}{2}+\frac{5k}{2}+1} e^{-(\lambda+\beta c)t}}{\Gamma\left(4n-2r-p+2+\frac{5m}{2}+\frac{5k}{2}\right)}$ 的系数, 令 $m+k=l, l=0, 1, 2, \dots$, 则系数 τ_l 为:

$$\tau_l = \sum_{i=0}^l a_i b_{l-i} = \frac{c^{4n-2r-p+2} (\lambda\beta^{\frac{3}{2}} c)^m}{(n+x+2d+z)! (3n-2r-p-x-2d-z)! l!} \sum_{i=0}^l (-1)^{l-i} \binom{l}{i} \times \frac{\Gamma(2i+n+x+2d+z+1)}{(n+2+x+2d+z)_{\frac{3i}{2}}} \times \frac{\Gamma(2(l-i)+3n-2r-p-x-2d-z+1)}{(3n-2r-2d-p-x-z+2)_{l-\frac{3i}{2}}}。$$

令 $\delta_1 = \sum_{i=0}^l (-1)^{l-i} \binom{l}{i} \times \frac{\Gamma(2i+n+x+2d+z+1)}{(n+x+2d+z+2)_{\frac{3i}{2}}} \times \frac{\Gamma(2(l-i)+3n-2r-p-x-2d-z+1)}{(3n-2r-2d-p-x-z+2)_{l-\frac{3i}{2}}}$, 则可得:

$$C(t) = \frac{c(ct)^{4n-2r-p+1} e^{-(\lambda+\beta c)t}}{(n+x+2d+z)! (3n-2r-p-x-2d-z)!} \times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\lambda\beta^{\frac{3}{2}} ct^{\frac{5}{2}})^l}{l!} \frac{\delta_1}{\Gamma(4n-2r-p+2+2l)}。$$

把 $C(t)$ 的表达式代入 (9) 式, 即可得到 $h_3(\mu, t)$ 的表达式:

$$h_3(\mu, t) = e^{-\beta\mu-(\lambda+\beta c)t} \frac{\lambda^2}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)^{2n} \beta^{3n}}{c^{2n}} \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \sum_{p=0}^{n-r} \binom{n-r}{p} \frac{\mu^{n+2r+p}}{(n+2r+p)!} \times \sum_{x=0}^p \binom{p}{x} \sum_{d=0}^{n-r-p} \binom{n-r-p}{d} \sum_{z=0}^{n-r-p-d} \binom{n-r-p-d}{z} \frac{(ct)^{4n-2r-p+1}}{(n+x+2d+z)!} \times \frac{1}{(3n-2r-p-x-2d-z)!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\lambda\beta^{\frac{3}{2}} ct^{\frac{5}{2}})^l}{l!} \frac{\delta_1}{\Gamma(4n-2r-p+2l+2)}。 \quad (11)$$

同理可得:

$$\begin{aligned} h_2(\mu, t) = & \beta e^{-\beta\mu - (\lambda + \beta c)t} \frac{\lambda^2}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)^{2n} \beta^{3n}}{c^{2n}} \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \sum_{p=0}^{n-r} \binom{n-r}{p} \times \\ & \frac{\mu^{n+2r+p+1}}{(n+2r+p+1)!} \sum_{x=0}^p \binom{p}{x} \sum_{d=0}^{n-r-p} \binom{n-r-p}{d} \sum_{z=0}^{n-r-p-d} \binom{n-r-p-d}{z} \times \\ & \frac{(ct)^{4n-2r-p+1}}{(n+x+2d+z)! (3n-2r-p-x-2d-z)!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\lambda \beta^{\frac{3}{2}} ct^{\frac{5}{2}})^l}{l!} \frac{\delta_1}{\Gamma(4n-2r-p+2l+2)} + \\ & \beta c t^2 \lambda^2 e^{-\beta\mu - (\lambda + \beta c)t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)^{2n} \beta^{3n}}{c^{2n}} \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \sum_{p=0}^{n-r} \binom{n-r}{p} \times \\ & \frac{\mu^{n+2r+p}}{(n+2r+p)!} \sum_{x=0}^{p+1} \binom{p+1}{x} \sum_{d=0}^{n-r-p} \binom{n-r-p}{d} \sum_{z=0}^{n-r-p-d} \binom{n-r-p-d}{z} \times \\ & \frac{(ct)^{4n-2r-p}}{(n+x+2d+z)! (3n-2r-p-x-2d-z+1)!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\lambda \beta^{\frac{3}{2}} ct^{\frac{5}{2}})^l}{l!} \frac{\delta_2}{\Gamma(4n-2r-p+2l+3)}. \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $\delta_2 = \sum_{i=0}^l (-1)^{l-i} \binom{l}{i} \frac{\Gamma(2i+n+x+2d+z+1)}{(n+x+2d+z+2)^{\frac{3i}{2}}} \frac{\Gamma(2(l-i)+3n-2r-p-2d-z+2)}{(3n-2r-p-x-z-2d+3)_{l-\frac{3i}{2}}}$, 以及

$$\begin{aligned} h_1(\mu, t) = & \beta^2 c^2 t^3 \lambda^2 e^{-\beta\mu - (\lambda + \beta c)t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)^{2n} \beta^{3n}}{c^{2n}} \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \sum_{p=0}^{n-r} \binom{n-r}{p} \frac{\mu^{n+2r+p}}{(n+2r+p)!} \times \\ & \sum_{x=0}^p \binom{p}{x} \sum_{d=0}^{n-r-p+1} \binom{n+1-r-p}{d} \sum_{z=0}^{n+1-r-p-d} \binom{n+1-r-p-d}{z} \frac{(ct)^{4n-2r-p}}{(n+x+2d+z)!} \times \\ & \frac{1}{(3n-2r-p-x-2d-z+2)!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\lambda \beta^{\frac{3}{2}} ct^{\frac{5}{2}})^l}{l!} \frac{\delta_3}{\Gamma(4n-2r-p+2l+4)} + \\ & \beta c t^2 \lambda^2 e^{-\beta\mu - (\lambda + \beta c)t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)^{2n} \beta^{3n}}{c^{2n}} \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \sum_{p=0}^{n-r} \binom{n-r}{p} \frac{\mu^{n+2r+p+1}}{(n+2r+p+1)!} \times \\ & \sum_{x=0}^{p+1} \binom{p+1}{x} \sum_{d=0}^{n-r-p} \binom{n-r-p}{d} \sum_{z=0}^{n-r-p-d} \binom{n-r-p-d}{z} \frac{(ct)^{4n-2r-p}}{(n+x+2d+z)!} \times \\ & \frac{1}{(3n-2r-p-x-2d-z+1)!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\lambda \beta^{\frac{3}{2}} ct^{\frac{5}{2}})^l}{l!} \frac{\delta_2}{\Gamma(4n-2r-p+2l+3)} + \\ & \frac{\beta^2}{2} t \lambda^2 e^{-\beta\mu - (\lambda + \beta c)t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)^{2n} \beta^{3n}}{c^{2n}} \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \sum_{p=0}^{n-r} \binom{n-r}{p} \frac{\mu^{n+2r+p+2}}{(n+2r+p+2)!} \times \\ & \frac{1}{(3n-2r-p-x-2d-z)!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\lambda \beta^{\frac{3}{2}} ct^{\frac{5}{2}})^l}{l!} \frac{\delta_1}{\Gamma(4n-2r-p+2l+2)}, \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $\delta_3 = \sum_{i=0}^l (-1)^{l-i} \binom{l}{i} \frac{\Gamma(2i+n+x+2d+z+1)}{(n+x+2d+z+2)^{\frac{3i}{2}}} \frac{\Gamma(2(l-i)+3n+2r-p-2d-z+3)}{(3n-2r-p-x-2d-z+4)_{l-\frac{3i}{2}}}$.

3 中国上市保险公司破产概率的实证研究

本研究选择 6 家中国上市保险公司(表 1)在 2015 年 1 月—2018 年 9 月的每个季度的数据,数据来源于国泰安数据库,共计 102 个数据作为本文实证研究的样本。根据上市保险公司的数据,保费收入及赔付支出情况见表 2;根据《中华人民共和国保险法》第 97 条、第 98 条的规定,保险公司应当按照其注册资本总额的 20%提取保证金,本研究通过计算整理得到初始盈余值,见表 2。

表 1 上市保险公司名单

Tab. 1 List of listed insurance companies

序号	证券代码	上市公司名称	序号	证券代码	上市公司名称
1	000627	天茂集团	4	601336	新华保险
2	600291	西水股份	5	601601	中国太保
3	601318	中国平安	6	601628	中国人寿

表 2 上市保险公司明细
Tab. 2 The details of listed insurance company

会计年度	保费收入/亿元	赔付支出/亿元	初始盈余/亿元	保费收入/赔付支出	初始盈余/赔付支出
2015 年	1 235.555 0	384.843	18.655 3	3.21	0.05
2016 年	1 537.880 5	540.032	21.137 8	2.85	0.04
2017 年	1 895.796 5	605.097	21.405 2	3.13	0.04
2018 年	1 775.419 4	474.622	21.586 9	3.74	0.05
总平均值	1 611.162 9	501.148	20.696 3	3.23	0.05

为了更加直观地说明上市保险公司破产概率的分布,在对参数赋值后,得到破产赤字、破产时间和破产概率的三维图,见图 1。引起保险公司破产的直接原因是赔付支出,从而根据上市保险公司的数据,将赔付支出设定为 1,保费收入相对于赔付支出的比例为 3.23,初始盈余相对于赔付支出的比例为 0.05,同时设定索赔时间间隔尺度参数为 1,描绘了 $w(\mu,y,t)$ 的图像。

研究发现:1) 当保费收入率、理赔时间间隔和理赔额确定时,破产概率随着初始盈余的增加而减少,这与保险公司的实际运作是相符合的,表明了具有充分初始资本的重要性。

2) 当初始盈余、理赔时间间隔和理赔额确定时,随着保费收入率的增加破产概率在相应地减少,本文保费收入较赔付支出的比例较高,除了考虑中国保险收费厘定较高因素,同时也说明中国保险行业的赔付机制的相关制度仍需完善,以合理保障已购买保险的消费者的相关权益。

3) 当初始盈余、保费收入率和理赔额确定时,随着索赔时间间隔的增加也即理赔强度的减小,破产的概率减小。这就表明建立激励机制鼓励业务人员拓展更多帮助客户防灾减灾相关的业务,对保险公司减低风险而言大有裨益。

4) 当保费收入率、初始盈余和破产时间间隔确定时,破产概率随着理赔额的增加而增加,因此对于保险公司合理持续经营来说理赔额的合理厘定非常重要。

4 结语

本研究主要考虑了在 Sparre Andersen 风险模型下破产时刻和破产赤字的联合密度函数,通过带有索赔次数的期望折现罚更新方程,运用拉格朗日隐函数定理和拉普拉斯变换等工具,推导出初始盈余等于 0 时破产时间和破产赤字的联合密度函数的拉普拉斯变换,然后运用拉普拉斯变换的技巧,得到了初始盈余大于 0 的情况下破产时刻和破产赤字的联合密度函数。最后进行了实证分析,经研究发现保费收入率、破产时间间隔、初始盈余和理赔额等因素之间的关系。本研究考虑了保费收入率为常数与实际有一定差异,未考虑利率的影响,而众所周知保险公司的绝大部分利润都来自于投资收入,因此接下来的研究重点应该转向带有利率的保险风险模型。

参考文献:

[1] 毕秀春,李荣,苏玉霞,等.一类风险模型的破产概率[J].曲阜师范大学学报(自然科学版),2010,36(2):35-38.
BI X C,LI R,SU Y X,et al. Ruinprobability for a risk model [J].Journal of Qufu Normal University (Natural Science), 2010,36(2):35-38.

[2] 毕秀春,尹传存.更新风险模型中破产概率的一个局部结果[J].高校应用数学学报 A 辑(中文版),2005,20(1):29-36.

[3] DICKSON D C M. Some explicit solutions for the joint density of the time of ruin and the deficitat ruin[J].ASTIN Bulletin,2008,38(1):259-276.

BI X C,YIN C C. A partial result of ruin probability in the new risk model[J].Applied Mathematics A Journal (Chinese Version),2005,20(1):29-36.

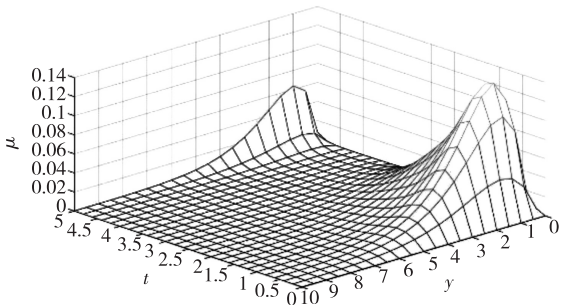


图 1 破产概率三维图

Fig. 1 3D graph of ruin probability

- [4] DICKSON D C M, WILLMOT G E. The density of the time to ruin in the classical Poisson risk model[J]. ASTIN Bulletin, 2005, 35(1): 45-60.
- [5] 郭晓莉, 文丽壹. 保险和金融风险相依的破产概率研究[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2016, 30(5): 135-140.
- GUO X L, WEN Y L. The ruin probability with dependent insurance and financial risks[J]. Journal of Chongqing University of Technology (Natural Science), 2016, 30(5): 135-140.
- [6] 李荣, 毕秀春, 张曙光. 保费率-巨灾索赔相依的风险模型的破产概率[J]. 数学的实践与认识, 2014, 44(5): 1-6.
- LI R, BI X C, ZHANG S G. Insurance rate-ruin probability of risk model for catastrophe claims[J]. Practice and understanding of mathematics, 2014, 44(5): 1-6.
- [7] DAVID D C M, LI S. Finite time ruin problems for the Erlang(2) risk model[J]. Insurance Mathematics and Economics, 2009, 46(1): 12-18.
- [8] DICKSON D C M, HIPPE C. On the time to ruin for Erlang(2) risk processes[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2001, 29(3): 333-334.
- [9] WILLMOT G E. On the discounted penalty function in the renewal risk model with general inter-claim times[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2007, 41(1): 17-31.
- [10] SUN L J. The expected discounted penalty at ruin in the Erlang(2) risk process[J]. Stochastic and Probability Letters, 2005, 72(3): 205-217.

Study the Influence of Time to Ruin and Deficit at Ruin on Insurance Company Based on Erlang Risk Model

YANG Liping¹, ZHOU Wenxin²

(1. School of Mathematical Sciences, Chongqing University, Chongqing 401331;

2. School of Financial Department, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [Purposes] Although insurance companies play an important role in market economy, survival of the fittest is the inevitable result of free economy. In order to understand the real situation of insurance company survival, it studies the Sparre Andersen risk model with the individual claim amount obeying Erlang(3) distribution and the claim time interval obeying Erlang(2) distribution when the initial surplus value is greater than zero. [Methods] Applying the expected discounted penalty function. [Findings] The joint density of time to ruin and the deficit at ruin is obtained by using Lagrange implicit function theorem and the Laplace transform. [Conclusions] Finally, according to the actual data of Chinese listed insurance companies, an empirical study on the ruin probability of Chinese insurance companies is carried out, and the model is proved to be effective.

Keywords: time to ruin; deficit at ruin; Erlang distribution

(责任编辑 黄 颖)