运筹学与控制论

10.11721/cqnuj20190401

两阶段供应链下极小化最大完工时间的单机系列批排序*

张新功[1],陈 娟[2]

(1.重庆师范大学 数学科学学院,重庆 401331;2.重庆市大渡口区公民小学校,重庆 400084)

摘要:【目的】考虑单机情况下的加工和运输两阶段的供应链排序问题。【方法】在生产阶段,将所有工件在加工之前划分成批,在一台有限批容量的机器上加工,工件的实际加工时间是关于该工件退化率和加工位置的函数;在运输阶段,有一辆运输车,且每次只能运输一批工件,即车的容量等于批的容量。通过分析用运输车的车容量限制与工件个数的关系。【结果】由最优算法得到了一个最优排序和最小化最大完工时间。【结论】首先给出最大完工时间问题的一个下界,然后指出在当工件个数小于等于运输车的容量限制时,提供出来一个最优算法。对于当工件个数大于运输车的容量限制时,证明了当工件满足一定条件时,该问题也存在最优算法。

关键词:批排序;供应链;退化率;时间与位置相关

中图分类号:O223 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2019)04-0001-06

在实际生产中,如何高效协调生产和运输两阶段之间关系以提高生产效率、增加市场竞争力的问题已经越来越受到关注。Hall 等人[1]首次提出了供应链排序概念,之后出现了各种不同的关于供应链排序问题的研究。Zegordi 等人[2]研究了多个生产商处在不同地理位置,并且运输车辆的速度不同的两阶段供应链排序问题,用动态规划算法给出了目标函数是最大完工时间问题的解。

关于工件退化问题已经有很多研究。Wang 等人[3]考虑了工件同时带有退化效应和学习效应的单机排序问题,并用启发式算法给出了目标函数为总完工时间问题的解法。Wang 等人[4]考虑了非线性退化的单机排序问题,并证明了非线性退化条件下的极小化最大完工时间是多项式时间可解的。谢秋莲等人[5]研究了带有线性位置退化及维修区间的单机排序问题,证明了在最大完工时间情形下工件满足组平衡原则,总完工时间问题转化为线性指派问题,并给出了这两个问题的多项式时间算法。

目前在批排序的研究中,Li 等人[6]对加工时间线性退化的批排序问题给出了详细说明。系列批排序问题与成组排序有很多相似之处,成组排序是根据生产的具体要求进行提前分组加工,在系列批排序中要考虑机器的生产能力,也就是批的最大容量是必须考虑的因素,但成组排序中不需要考虑。另一方面,在成组排序中,所有工件已经提前被分在确定的组里,而系列批排序中工件如何分批,以及批之间的加工顺序需要同时考虑。Pei 等人[7]把两阶段供应链、退化效应和系列批综合在一起考虑,建立了一个最优算法解决在有缓冲区的情况下的极小化最大完工时间,建立了一个启发式算法解决无缓冲区的情况下极小化最大完工时间。本文研究具有位置效应的情形。首先,分别考虑了当 $n\leqslant c$ 和 $n>c$ 两种情形下的最大完工时间问题的下界,并给出解决该问题的一个最优算法,这里的 c 为批与运输车辆的最大容量。然后,对于 $n>c$ 的情形,进一步考虑 $T\leqslant Q_2$,$T\geqslant Q_m$ 和 $Q_2<T<Q_m$ 这 3 种子情形,这里的 T 是车辆在生产商和顾客之间往返一次所用时间,并证明当工件满足一定条件时,该问题存在最优算法。

1 模型描述与符号介绍

本文所要用到的符号如下。J_i 为第 i 个工件,其中 $i=1,2,\cdots,n$(下同);P_i 为工件 J_i 的加工时间;b_i 为工件 J_i 的退化率;a 为学习指数,$a>0$;a_0 为固定常数;t_0 为所有工件在 t_0 可以加工;n 表示所有工件的个数;m 为批的

* **收稿日期**:2017-11-01 **修回日期**:2019-02-28 **网络出版时间**:2019-07-15 12:30

资助项目:国家自然科学基金面上项目(No. 11571321;No. 715610007);国家自然科学基金重点项目(No. 11431004);重庆市研究生教育教学改革研究重点项目(No. yig182019);重庆市基础科学与前沿技术研究专项(No. cstc2018jcyjAX0631)

第一作者简介:张新功,男,教授,博士,研究方向为排序论,E-mail:zxg7980@163.com;**通信作者**:陈娟,女,E-mail:cj123581321@163.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190715.1230.036.html

数量;B_k为第 k 批,其中 $k=1,2,\cdots,m$(下同);Q_k 为第 k 批的实际加工时间;n_k为第 k 批的数量;c 为批与运输车辆的最大容量;r 为工件的位置;T 为工件到客户的往返运输时间;$S_{1k}(S_{2k})$为加工(运输)第 k 批工件的开始时间;$C_{1k}(C_{2k})$为加工(运输)第 k 批工件的结束时间;$C_{\max}$为所有工件的最大完工时间。

本文研究供应链排序包括两个阶段,即加工阶段和运输阶段。在加工阶段,由 n 个工件构成的工件集合$\{J_1,J_2,\cdots,J_n\}$在 $t_0=0$ 已经到达,并且都可以开始加工。工件在加工之前被划分成批,然后在一台批处理机上加工。Xuan 等人[8]指出在系列批排序里,要求同一批的工件连续加工。批完工时间被定义为批内工件加工时间之和,批的最大容量为 c,每批的工件个数不能超过批的最大容量 c,即 $n_k\leqslant c$。工件 J_i 的实际加工时间是关于退化率和加工位置相关的函数,即 $P_i=(a_0+b_it_0)r^a$,$i=1,2,\cdots,n$。

在运输阶段,只有一辆车在来回运输已经加工好的工件,车辆的最大容量正好等于批的最大容量且每次只能运输一批工件,车辆在生产商和顾客之间往返一次所用时间为常数 T,则单程的时间为$\frac{T}{2}$。在供应链排序中,通常研究两种类型的问题:第一种是在生产商一方存在仓库存放已经加工的工件,不管车辆到达与否,机器都可以立即加工下一批工件。第二种则是生产商一方没有仓库存放已经加工的工件,机器必须等到运输上一批的车辆到达以后才能加工下一批工件。本文主要研究第一种类型,即存在仓库存放已经加工的工件,机器可以立即加工下一批工件,目标是极小化加工与运输两阶段的最大完工时间。用 Graham[9]的三参数表示法可将问题表述成 $M\to V\,|\,P_i=(a_0+b_it_0)r^a,s\text{-batch},T,\text{buffer}\,|\,C_{\max}$。

2 最大完工时间问题

引理 1 研究问题模型 $M\to V\,|\,P_i=(a_0+b_it_0)r^a,s\text{-batch},T,\text{buffer}\,|\,C_{\max}$最优排序满足性质:

$$C^*_{\max}\geqslant\begin{cases}\max\left\{t_0+Q_1+\left(\left\lceil\frac{n}{c}\right\rceil-\frac{1}{2}\right)T,t_0\prod\limits_{i=1}^{n}(1+b_ii^a)+a_0\sum\limits_{j=1}^{n}j^a\prod\limits_{i=j+1}^{n}(1+b_ii^a)+\frac{T}{2}\right\},n>c;\\ t_0\prod\limits_{i=1}^{n}(1+b_ii^a)+a_0\sum\limits_{j=1}^{n}j^a\prod\limits_{i=j+1}^{n}(1+b_ii^a)+\frac{T}{2},n\leqslant c。\end{cases}\tag{1}$$

证明 当 $n>c$ 时,机器加工完第一批工件以后,假设在运输阶段没有空闲时间,即从第二批开始每一批加工时间都会等于或小于运输时间,则可计算出最大完工时间的一个下界,$C^*_{\max}\geqslant t_0+Q_1+\left(\left\lceil\frac{n}{c}\right\rceil-\frac{1}{2}\right)T$。同理,在生产阶段中,假设每批工件加工完以后,马上就会被运走,即从第二批开始每一批加工时间都会不小于运输时间 T,则最大完工时间的一个下界为 $C^*_{\max}\geqslant t_0\prod\limits_{i=1}^{n}(1+b_ii^a)+a_0\sum\limits_{j=1}^{n}j^a\prod\limits_{i=j+1}^{n}(1+b_ii^a)+\frac{T}{2}$。因此有 $C^*_{\max}\geqslant\max\left\{t_0+Q_1+\left(\left\lceil\frac{n}{c}\right\rceil-\frac{1}{2}\right)T,t_0\prod\limits_{i=1}^{n}(1+b_ii^a)+a_0\sum\limits_{j=1}^{n}j^a\prod\limits_{i=j+1}^{n}(1+b_ii^a)+\frac{T}{2}\right\}$。

当 $n\leqslant c$ 时,此时只有一批工件加工,则最大完工时间的下界为:

$$C^*_{\max}\geqslant t_0\prod_{i=1}^{n}(1+b_ii^a)+a_0\sum_{j=1}^{n}j^a\prod_{i=j+1}^{n}(1+b_ii^a)+\frac{T}{2}。$$

证毕

本文研究分批排序问题,通过讨论工件数 n 与批容量 c 的大小关系,对问题进行分析并求解。下面的定理 1 给出了当 $n\leqslant c$ 时,最优排序是所有工件按照退化率非增的顺序排列并在同一批加工。

定理 1 研究问题 $M\to V\,|\,P_i=(a_0+b_it_0)r^a,s\text{-batch},T,\text{buffer}\,|\,C_{\max}$,如果 $n\leqslant c$,那么在最优排序中,所有工件按照退化率非增的顺序排列并在同一批加工。

证明 当 $n\leqslant c$,假设存在一个最优排序满足 $m>1$。因为 $n\leqslant c$,工件能从其他批里移动到 B_1 中,则最大完工时间为 $C'_{\max}=C'_{21}=a_0\sum\limits_{j=1}^{n}j^a\prod\limits_{i=j+1}^{n}(1+b_ii^a)+\frac{T}{2}\leqslant C^*_{\max}$。

移动以后的排序仍然满足最优排序的性质。 证毕

基于定理 1,所有的工件都在 B_1 中加工,工件按照退化率非增的顺序排列,把排序记为 π^*。对于 π^* 中任意两个相邻的工件 J_i 和 J_j,工件 J_i 在第 r 位置加工,工件 J_j 在第 $r+1$ 位置上加工,工件 J_i 的开始加工时间为 t,完工时间为 $C_i(\pi^*)$,工件 J_j 完工时间为 $C_j(\pi^*)$,则有:

$$C_i(\pi^*)=t+(a_0+b_it)r^a=(1+b_ir^a)t+a_0r^a,$$

$C_j(\pi^*)=C_i(\pi^*)+(a_0+b_iC_i(\pi^*))(r+1)^a=(1+b_j(r+1)^a)(1+b_ir^a)t+(1+b_j(r+1)^a)a_0r^a+a_0(r+1)^a$。通过交换 J_i 和 J_j 工件位置，其余工件位置不变，得到另一个排序记为 π'，此时工件 J_i 的完工时间为 $C_i(\pi')$，则有：

$$C_i(\pi')=(1+b_i(r+1)^a)(1+b_jr^a)t+(1+b_i(r+1)^a)a_0r^a+a_0(r+1)^a,$$
$$C_i(\pi')-C_j(\pi^*)=(b_i-b_j)((r+1)^a-r^a)t+(b_i-b_j)(r+1)^aa_0r^a\geqslant 0。$$

所以原排序是最优排序。　　证毕

对于两阶段供应链、工件的退化效应和系列批排序问题，关于有缓冲区，即有仓库存放已经加工的工件的排序问题的研究还很少，本文采用 Pei 等人[7]解决含有缓冲区的排序问题的一个最优算法以得到最大完工时间。

算法 1　第 1 步，把工件按退化率不增的顺序标号，即 $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$；

第 2 步，如果在一个工件列表中工件个数小于其最大容量 c，那么把所有工件放在一个批里，转到第 4 步，否则把前 $\left[n-c\left(\left\lceil\frac{n}{c}\right\rceil-1\right)\right]$ 个工件放在第一批里；

第 3 步，如果存在未排列的工件，则把前 c 个工件放在一个批里，依次迭代，否则转到第 4 步；

第 4 步，按批次自然生成的批顺序依次在机器上加工。

在定理 1 中，讨论了当 $n\leqslant c$ 时的最优排序。接下来讨论当 $n>c$ 时的情况，定理 2 研究了当工件满足一定条件时，由算法 1 可得到排序满足性质 $Q_{k+1}\geqslant Q_k\,(k=1,2,3,\cdots,m-1)$。

定理 2　对于问题 $M\to V\,|\,P_i=(a_0+b_it_0)r^a,s\text{-batch},T,\text{buffer}\,|\,C_{\max}$，如果 $n>c$，有：

$$\left[1+b_{\sum_{h=1}^{k}n_h+1}\left(\sum_{h=1}^{k}n_h+1\right)^a\right]\left[1+b_{\sum_{h=1}^{k}n_h+2}\left(\sum_{h=1}^{k}n_h+2\right)^a\right]\geqslant 2, \tag{2}$$

其中 $k=1,2,\cdots,m$，由算法 1 知该排序满足性质 $Q_{k+1}\geqslant Q_k$，$k=1,2,\cdots,m-1$。

证明　当 $k\geqslant 2$ 时，有：

$$Q_k=C_{1k}-S_{1k}=a_0\sum_{j=1}^{\sum_{l=1}^{k}n_l}j^a\prod_{i=j+1}^{\sum_{l=1}^{k}n_l}(1+b_ii^a)-a_0\sum_{j=1}^{\sum_{l=1}^{k-1}n_l}j^a\prod_{i=j+1}^{\sum_{l=1}^{k-1}n_l}(1+b_ii^a),$$

$$Q_{k+1}=C_{1,k+1}-S_{1,k+1}=a_0\sum_{j=1}^{\sum_{l=1}^{k+1}n_l}j^a\prod_{i=j+1}^{\sum_{l=1}^{k+1}n_l}(1+b_ii^a)-a_0\sum_{j=1}^{\sum_{l=1}^{k}n_l}j^a\prod_{i=j+1}^{\sum_{l=1}^{k}n_l}(1+b_ii^a),$$

$$\begin{aligned}Q_{k+1}-Q_k=a_0\Bigg[&1^a\prod_{i=2}^{\sum_{l=1}^{k+1}n_l}(1+b_ii^a)+2^a\prod_{i=3}^{\sum_{l=1}^{k+1}n_l}(1+b_ii^a)+\cdots+(n_1+n_2+\cdots+n_{k+1})^a+1^a\prod_{i=2}^{\sum_{l=1}^{k-1}n_l}(1+b_ii^a)+\\&2^a\prod_{i=3}^{\sum_{l=1}^{k-1}n_l}(1+b_ii^a)+\cdots+(n_1+n_2+\cdots+n_{k-1})^a-21^a\prod_{i=2}^{\sum_{l=1}^{k}n_l}(1+b_ii^a)-22^a\prod_{i=3}^{\sum_{l=1}^{k}n_l}(1+b_ii^a)-\cdots-2(n_1+n_2+\cdots+n_k)^a\Bigg]=\\&a_0\Bigg\{1^a\prod_{i=2}^{\sum_{l=1}^{k-1}n_l}(1+b_ii^a)\left[\prod_{i=\sum_{l=1}^{k-1}n_l+1}^{\sum_{l=1}^{k+1}n_l}(1+b_ii^a)+1-2\prod_{i=\sum_{l=1}^{k-1}n_l+1}^{\sum_{l=1}^{k}n_l}(1+b_ii^a)\right]+\\&2^a\prod_{i=3}^{\sum_{l=1}^{k-1}n_l}(1+b_ii^a)\left[\prod_{i=\sum_{l=1}^{k-1}n_l+1}^{\sum_{l=1}^{k+1}n_l}(1+b_ii^a)+1-2\prod_{i=\sum_{l=1}^{k-1}n_l+1}^{\sum_{l=1}^{k}n_l}(1+b_ii^a)\right]+\cdots+\\&(n_1+n_2+\cdots+n_{k-1}+1)^a\prod_{i=\sum_{l=1}^{k-1}n_l+2}^{\sum_{l=1}^{k}n_l}(1+b_ii^a)\left[\prod_{i=\sum_{l=1}^{k}n_l+1}^{\sum_{l=1}^{k+1}n_l}(1+b_ii^a)-2\right]+\cdots+(n_1+n_2+\cdots+n_k)^a\left[\prod_{i=\sum_{l=1}^{k}n_l+1}^{\sum_{l=1}^{k+1}n_l}(1+b_ii^a)-2\right]\Bigg\}。\end{aligned}$$

因此只需比较 $\prod_{i=\sum_{l=1}^{k}n_l+1}^{\sum_{l=1}^{k+1}n_l}(1+b_ii^a)-2\,(k=1,2,\cdots,m)$ 与 0 的大小关系。

基于(2)式知 $Q_{k+1} \geqslant Q_k$。则当 $k=1$ 时，有：

$$Q_1 = a_0 \sum_{j=1}^{n_1} j^a \prod_{i=j+1}^{n_1} (1+b_i i^a),\ Q_2 = a_0 \sum_{j=1}^{n_1+n_2} j^a \prod_{i=j+1}^{n_1+n_2} (1+b_i i^a) - a_0 \sum_{j=1}^{n_1} j^a \prod_{i=j+1}^{n_1} (1+b_i i^a),$$

$$Q_2 - Q_1 = a_0 \sum_{j=1}^{n_1+n_2} j^a \prod_{i=j+1}^{n_1+n_2} (1+b_i i^a) - 2a_0 \sum_{j=1}^{n_1} j^a \prod_{i=j+1}^{n_1} (1+b_i i^a) \geqslant$$

$$a_0 \left[1^a \prod_{i=2}^{n_1} (1+b_i i^a) \left(\prod_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} (1+b_i i^a) - 2 \right) + 2^a \prod_{i=3}^{n_1} (1+b_i i^a) \left(\prod_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} (1+b_i i^a) - 2 \right) + \cdots + n_1^a \left(\prod_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} (1+b_i i^a) - 2 \right) \right]。$$

由定理中的条件得 $Q_2 \geqslant Q_1$ 成立。　　证毕

上述定理讨论了当工件满足(2)式时，由算法1可得该排序满足 $Q_{k+1} \geqslant Q_k$。接下来在 $n>c$ 和(2)式的前提下，进一步研究 $T \leqslant Q_2$ 时，工件的最优排序和最大完工时间。

定理3　对于问题 $M \to V \mid P_i = (a_0 + b_i t_0) r^a, s\text{-batch}, T, \text{buffer} \mid C_{\max}$，如果 $n>c$，有：

$$\left[1 + b_{\sum_{h=1}^{k} n_h + 1} \left(\sum_{h=1}^{k} n_h + 1 \right)^a \right] \left[1 + b_{\sum_{h=1}^{k} n_h + 2} \left(\sum_{h=1}^{k} n_h + 2 \right)^a \right] \geqslant 2,$$

其中 $k=1,2,\cdots,m$，当 $T \leqslant Q_2$ 时，由算法1可得一个最优排序，且最大完工时间为：

$$C_{\max} = a_0 \sum_{j=1}^{n} j^a \prod_{i=j+1}^{n} (1+b_i i^a) + \frac{T}{2}。$$

证明　由定理中的条件易知，$T \leqslant Q_2 \leqslant Q_3 \leqslant \cdots \leqslant Q_m$，因此 B_k 在运输阶段的完工时间为：

$$C_{2k} = a_0 \sum_{j=1}^{\sum_{h=1}^{k} n_h} j^a \prod_{i=j+1}^{\sum_{h=1}^{k} n_h} (1+b_i i^a) + \frac{T}{2}。$$

因此有 $C_{\max} = C_{2m} = a_0 \sum_{j=1}^{\sum_{h=1}^{m} n_h} j^a \prod_{i=j+1}^{\sum_{h=1}^{m} n_h} (1+b_i i^a) + \frac{T}{2} = a_0 \sum_{j=1}^{n} j^a \prod_{i=j+1}^{n} (1+b_i i^a) + \frac{T}{2}$。　　证毕

定理3中叙述了从第二批开始每一批的加工时间都不小于往返的运输时间，所以最大完工时间为所有批加工时间和加上最后一批的运输时间 $\frac{T}{2}$。接下来在 $n>c$ 和(2)式的前提下，进一步研究 $T \geqslant Q_m$ 时，工件的最优排序和最大完工时间。

定理4　对于问题 $M \to V \mid P_i = (a_0 + b_i t_0) r^a, s\text{-batch}, T, \text{buffer} \mid C_{\max}$，若：

$$n > c, \left[1 + b_{\sum_{h=1}^{k} n_h + 1} \left(\sum_{h=1}^{k} n_h + 1 \right)^a \right] \left[1 + b_{\sum_{h=1}^{k} n_h + 2} \left(\sum_{h=1}^{k} n_h + 2 \right)^a \right] \geqslant 2,$$

则当 $T \geqslant Q_m$ 时，由算法1可得一个最优排序，且最大完工时间为：

$$C_{\max} = a_0 \sum_{j=1}^{n-c\left(\left\lceil \frac{n}{c} \right\rceil - 1\right)} j^a \prod_{i=j+1}^{n-c\left(\left\lceil \frac{n}{c} \right\rceil - 1\right)} (1+b_i i^a) + \left(\left\lceil \frac{n}{c} \right\rceil - \frac{1}{2} \right) T。$$

证明　$C_{\max} = C_{2m} = C_{2\lceil \frac{n}{c} \rceil} = S_{2\lceil \frac{n}{c} \rceil} + \frac{T}{2} = \max\{ S_{2(\lceil \frac{n}{c} \rceil - 1)} + T, C_{1\lceil \frac{n}{c} \rceil} \} + \frac{T}{2} =$

$$C_{11} + T\left(\left\lceil \frac{n}{c} \right\rceil - 1 \right) + \frac{T}{2} = a_0 \sum_{j=1}^{n-c\left(\left\lceil \frac{n}{c} \right\rceil - 1\right)} j^a \prod_{i=j+1}^{n-c\left(\left\lceil \frac{n}{c} \right\rceil - 1\right)} (1+b_i i^a) + \left(\left\lceil \frac{n}{c} \right\rceil - \frac{1}{2} \right) T。$$

证毕

上面讨论了在 $n>c$ 和(2)式的前提下，当 $T \geqslant Q_m$ 时，即当往返运输时间不小于每一批的加工时间时，那么最大完工时间为第一批的加工时间与 $\left(\left\lceil \frac{n}{c} \right\rceil - \frac{1}{2} \right) T$ 的和。接下来考虑 $T \geqslant Q_2$ 的情况下，通过一定条件的限制，使它的最大完工时间为所有批加工时间和加上最后一批的运输时间 $\frac{T}{2}$。

定理5　模型 $M \to V \mid P_i = (a_0 + b_i t_0) r^a, s\text{-batch}, T, \text{buffer} \mid C_{\max}$，如果 $T \geqslant Q_2$，则有：

$$T\left(\left\lceil \frac{n}{c} \right\rceil - 1 \right) + a_0 \sum_{j=1}^{n-c\left(\left\lceil \frac{n}{c} \right\rceil - 1\right)} j^a \prod_{i=j+1}^{n-c\left(\left\lceil \frac{n}{c} \right\rceil - 1\right)} (1+b_i i^a) \leqslant a_0 \sum_{j=1}^{n} j^a \prod_{i=j+1}^{n} (1+b_i i^a)。\tag{3}$$

那么根据算法 1 可得一个最优排序,且最大完工时间为 $C_{\max}=a_0\sum\limits_{j=1}^{n}j^a\prod\limits_{i=j+1}^{n}(1+b_i i^a)+\dfrac{T}{2}$。

证明　由条件知,一定存在两个批 B_p 和 B_q,满足 $S_{2p}+T\geqslant C_{1p+1}$,$S_{2q}+T\leqslant C_{1q+1}$,$1\leqslant p<q\leqslant\left\lceil\dfrac{n}{c}\right\rceil-1$,则 B_{q+1} 在运输阶段的完工时间为:

$$C_{2q+1}=S_{2q+1}+\frac{T}{2}=\max\{S_{2q}+T,C_{1q+1}\}+\frac{T}{2}=C_{1q+1}+\frac{T}{2}=\sum_{j=1}^{\sum_{l=1}^{q+1}n_l}j^a\prod_{i=j+1}^{\sum_{l=1}^{q+1}n_l}(1+b_i i^a),$$

$$C_{\max}=C_{2m}=a_0\sum_{j=1}^{\sum_{l=1}^{m}n_l}j^a\prod_{i=j+1}^{\sum_{l=1}^{m}n_l}(1+b_i i^a)+\frac{T}{2}。$$

证毕

前面几个定理给出了当工件分别满足(2),(3)式时,工件的最优排序和最大完工时间。接下来研究 $T\geqslant Q_2$ 时,在一定条件下,最优排序满足如下的两条性质。

定理 6　对于问题模型 $M\rightarrow V\mid P_i=(a_0+b_i t_0)r^a, s\text{-batch}, T, \text{buffer}\mid C_{\max}$,如果:

$$T\geqslant Q_2,T\left(\left\lceil\frac{n}{c}\right\rceil-1\right)+a_0\sum_{j=1}^{n-c\left(\left\lceil\frac{n}{c}\right\rceil-1\right)}j^a\prod_{i=j+1}^{n-c\left(\left\lceil\frac{n}{c}\right\rceil-1\right)}(1+b_i i^a)\geqslant a_0\sum_{j=1}^{n}j^a\prod_{i=j+1}^{n}(1+b_i i^a),$$

则最优排序满足下面的性质:1) $m=\left\lceil\dfrac{n}{c}\right\rceil$;2) $n_1=n-c\left(\left\lceil\dfrac{n}{c}\right\rceil-1\right)$。

证明　1) 由于批的数量最少可能是 $\left\lceil\dfrac{n}{c}\right\rceil$,所以 $m\geqslant\left\lceil\dfrac{n}{c}\right\rceil$。当 $m=\left\lceil\dfrac{n}{c}\right\rceil$ 时,把最大完工时间记为 $C_{\max}$。假设存在一个最优排序满足 $m>\left\lceil\dfrac{n}{c}\right\rceil$,最大完工时间为 $C'_{\max}$。

$$C_{\max}=a_0\sum_{j=1}^{n-c\left(\left\lceil\frac{n}{c}\right\rceil-1\right)}j^a\prod_{i=j+1}^{n-c\left(\left\lceil\frac{n}{c}\right\rceil-1\right)}(1+b_i i^a)+T\left(\left\lceil\frac{n}{c}\right\rceil-\frac{1}{2}\right),C'_{\max}=a_0\sum_{j=1}^{n_1}j^a\prod_{i=j+1}^{n_1}(1+b_i i^a)+T\left(m-\frac{1}{2}\right),$$

$$C'_{\max}-C_{\max}\geqslant T-a_0\sum_{j=1}^{n-c\left(\left\lceil\frac{n}{c}\right\rceil-1\right)}j^a\prod_{i=j+1}^{n-c\left(\left\lceil\frac{n}{c}\right\rceil-1\right)}(1+b_i i^a)\geqslant T-Q_1>0,$$

所以 $C'_{\max}>C_{\max}$,与假设矛盾,即 $m=\left\lceil\dfrac{n}{c}\right\rceil$。

2) 由于 $m=\left\lceil\dfrac{n}{c}\right\rceil$,因此 $n_1\geqslant n-c\left(\left\lceil\dfrac{n}{c}\right\rceil-1\right)$。反证,假设存在一个最优排序 π^* 满足 $m=\left\lceil\dfrac{n}{c}\right\rceil$,且 $n_1>n-c\left(\left\lceil\dfrac{n}{c}\right\rceil-1\right)$,将批 B_1 中的一个工件 J_x 转移到 $B_k(n_k<c)$ 中得到一个新的排序 π',它的最大完工时间为 $C_{\max}(\pi')$。

$$C_{\max}(\pi')-C_{\max}(\pi^*)=$$

$$a_0 1^a\prod_{i=2}^{x-1}(1+b_i i^a)\left[(1+b_{x+1}x^a)\cdots(1+b_{n_1}(n_1-1)^a)-(1+b_x x^a)(1+b_{x+1}(x+1)^a)\cdots(1+b_{n_1}n_1{}^a)\right]+\cdots+$$
$$a_0(x-1)^a\left[(1+b_{x+1}x^a)\cdots(1+b_{n_1}(n_1-1)^a)-(1+b_x x^a)(1+b_{x+1}(x+1)^a)\cdots(1+b_{n_1}n_1{}^a)\right]+\cdots+$$
$$a_0(n_1-1)^a\left[1-1+b_{n_1}n_1{}^a\right]<0,$$

即 $C_{\max}(\pi')<C_{\max}(\pi^*)$,这是矛盾的,则 $n_1=n-c\left(\left\lceil\dfrac{n}{c}\right\rceil-1\right)$。

证毕

综合上述几个定理,能得到以下结论:1) 当 $n\leqslant c$ 或当 $n>c$,$T\leqslant Q_2$,在(2)式条件下或当 $n>c$,$T\geqslant Q_2$,在(3)式条件下,通过最优算法能得到一个最优排序和 $C^*_{\max}=a_0\sum\limits_{j=1}^{n}j^a\prod\limits_{i=j+1}^{n}(1+b_i i^a)+\dfrac{T}{2}$。2) 当 $n>c$,$T\geqslant Q_m$ 和在(2)式的条件下,通过最优算法能得到一个最优排序和 $C^*_{\max}=a_0\sum\limits_{j=1}^{n-c\left(\left\lceil\frac{n}{c}\right\rceil-1\right)}j^a\prod\limits_{i=j+1}^{n-c\left(\left\lceil\frac{n}{c}\right\rceil-1\right)}(1+b_i i^a)+\left(\left\lceil\dfrac{n}{c}\right\rceil-\dfrac{1}{2}\right)T$。

3 结束语

本文主要研究工件在加工和运输两个阶段下的单机供应链排序问题,工件实际加工时间是关于工件的退化

率和加工位置的函数。目标函数是极小化最大完工时间。本文通过一个引理给出最大完工时间的一个下界，对于工件个数与车辆容量限制的两种大小关系，以及车辆在生产商和顾客之间往返一次所用时间与第 m 批加工时间大小关系，得到了通过最优算法能得到一个最优排序和最小化最大完工时间。在后续研究中主要是在仓库容量无限的情况下讨论，且在实际生产中，仓库容量和成本问题也是值得考虑的。

参考文献：

[1] HALL N G, POTTS C N. Supply chain scheduling: bachingand delivery[M]. Operations Research, 2003, 51(4): 566-584.

[2] ZEGORDI S H, BEHESHTI-NIA M A. Integrating production and transportation schedulingin a two-stage chain considering order assignment[J]. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2009, 44(9/10): 928-939.

[3] WANG J B, WANG M Z, JI P. Single machine total completion time minimization scheduling with a time-dependent learning effect and deteriorating jobs[J]. International Journal of Systems Science, 2012, 43(5): 861-868.

[4] WANG J B, WANG M Z. Single-machine scheduling with nonlinear deterioration[J]. Optimization Letters, 2012, 6(1): 97-98.

[5] 谢秋莲，张新功. 带有线性位置恶化及维修区间的单机排序问题[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2015，32(5)：32-37.
XIE Q L, ZHANG X G. Single machine scheduling with a linear position deterioration andrate-modifying maintenance [J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2015, 32(5): 32-37.

[6] LI S S, NG C T, CHENG T C E, et al. Parallel-batch scheduling of deteriorating jobs with release dates to minimize the makespan[J]. European Journal of Operational Research, 2011, 210(3): 482-488.

[7] PEI J, PANOS M P, LIU X B, et al. Serial batching scheduling of deteriorating jobs in a two-stage supply chain to minimize the makespan[J]. European Journal of Operational Research, 2015, 244(1): 13-25.

[8] XUAN H, TANG L X. Scheduling a hybrid flowshop with batch production at the laststage[J]. Computers & Operations Research, 2007, 34(9): 2718-2733.

[9] GRAHAM R L, LAWLER E L, LENSTRA J K, et al. Optimizationandapproximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey[J]. Annals of Discrete Mathematics, 1979, 5(1): 287-326.

Operations Research and Cybernetics

Single Machine with Serial Batching in a Two-Stage Supply Chain to Minimize the Makespan

ZHANG Xingong[1], CHEN Juan[2]

(1. College of Mathematics Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331;
2. Gongmin Primary School of Dadukou District of Chongqing, Chongqing 400084, China)

Abstract: [**Purposes**] The scheduling problem of a two-stage supply chain is investigated, where the job is first processed on a machine, and then the finished job is delivered into batches. [**Methods**] During the production stage the job is first divided into serial batches and process on a machine where the actual job processing time is a function of its deterioration rate and position. During the stage of transportation, the batches are delivered to a customer by a single vehicle and the vehicle can only deliver one batch at one time. [**Findings**] The relations between capacity of vehicle and the number of jobs are analyzed. [**Conclusions**] A lower bound of the maximum completion time problem is given, then the problem can be easily solved when $n \leqslant c$. it is proved that the problem also has an optimal algorithm when the jobs satisfies certain conditions when $n > c$.

Keywords: batch scheduling; supply chain; deterioration; time-dependent and position-dependent

（责任编辑　黄　颖）