DOI:10.11721/cqnuj20190418

四元数 Lyapunov 方程 $AX+XA^*=B$ 的双自共轭解*

黄敬频，王　敏，王　云

(广西民族大学 理学院，南宁 530006)

摘要：【目的】研究四元数体上连续型 Lyapunov 方程 $AX+XA^*=B$ 的双自共轭解。【方法】利用双自共轭矩阵的结构特性及矩阵变换，将原问题转化为具有自共轭结构的方程问题，再通过自共轭矩阵的向量化刻画。【结果】获得了该方程存在双自共轭解的充要条件及通解表达式。【结论】所得结果扩展了 Lyapunov 方程的解形式，同时数值算例检验了所给算法的可行性。

关键词：四元数体；Lyapunov 方程；双自共轭矩阵

中图分类号：O241.6　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**1672-6693(2019)04-0075-06

Lyapunov 方程在系统稳定性理论和控制理论研究等方面有非常广泛的作用[1-4]。近年来关于 Lyapunov 方程的研究十分活跃，并取得许多成果。比如，文献[5]讨论了一类混合型 Lyapunov 矩阵方程的对称正定解问题，文献[6]给出了四元数体上离散型 Lyapunov 矩阵方程的一种反问题解，文献[7]利用量子算法讨论了 Lyapunov 矩阵方程的求解问题。但关于该方程双结构解问题的研究目前仍未见相关的报道。

本文目的是研究四元数体上 Lyapunov 矩阵方程

$$AX+XA^*=B \tag{1}$$

的双自共轭解，其中 $A,B\in Q^{n\times n}$ 是已知矩阵，$X\in Q^{n\times n}$ 是未知矩阵。

为讨论方便，用 $\mathbf{R}^{m\times n}$，$\mathbf{C}^{m\times n}$，$Q^{m\times n}$ 分别表示全体 $m\times n$ 实矩阵、复矩阵和四元数矩阵的集合；$U^{n\times n}$ 表示 n 阶酉矩阵组成的集合；$\mathbf{SR}^{n\times n}$，$\mathbf{ASR}^{n\times n}$，$\mathbf{SC}_n(Q)$ 表示 $n\times n$ 对称、反对称、自共轭矩阵的集合；I_n 表示 n 阶单位矩阵；$\overline{A}$，A^{T}，A^*，A^+ 分别表示矩阵 A 的共轭、转置、共轭转置和 Moore-Penrose 广义逆；$\mathrm{vec}(A)$ 表示矩阵 A 按列顺序拉直向量；$\mathrm{Re}(A)$，$\mathrm{Im}(A)$ 分别表示复矩阵 A 的实部和虚部；$\|A\|=\sqrt{\mathrm{tr}(A^*A)}$ 表示四元数矩阵 A 的 Frobenius 范数；$A\otimes B$ 表示矩阵 A 与 B 的 Kronecker 积；$S_n=(e_n,e_{n-1},\cdots,e_1)$ 表示反对角线元素全为 1 的 n 阶方阵。

双自共轭矩阵可看作是实数域上双对称矩阵的推广[8]，定义如下。

定义 1　设 $A\in Q^{n\times n}$，如果 $A=A^*$ 且 $A=S_nAS_n$，则称 A 为 n 阶双自共轭四元数矩阵。全体 n 阶双自共轭四元数矩阵的集合表示为 $\mathbf{BSC}_n(Q)$。

定义 2　设 $A=(a_{ij})\in\mathbf{SR}^{n\times n}$，$B=(b_{ij})\in\mathbf{ASR}^{n\times n}$，记 $a_1=(a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1})$，$a_2=(a_{22},a_{32},\cdots,a_{n2})$，$\cdots$，$a_n=(a_{nn})$，$b_1=(b_{21},b_{31},\cdots,b_{n1})$，$b_2=(b_{32},b_{42},\cdots,b_{n2})$，$\cdots$，$b_{n-1}=(b_{n(n-1)})$，则称向量

$$\mathrm{vec_s}(A)=(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},a_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{n(n+1)/2}, \tag{2}$$

$$\mathrm{vec_a}(B)=(b_1,b_2,\cdots,b_{n-2},b_{n-1})^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{n(n-1)/2}, \tag{3}$$

分别是对称矩阵 A 与反对称矩阵 B 的拉直向量。本文具体讨论如下问题。

问题Ⅰ　已知 $A\in Q^{n\times n}$ 是四元数矩阵，$B\in Q^{n\times n}$ 是自共轭矩阵，寻找双自共轭矩阵 $X\in\mathbf{BSC}_n(Q)$ 使得 $AX+XA^*=B$。

1 问题Ⅰ的解

首先，给出双自共轭四元数矩阵的一种等价性刻画。设 $S_k=(e_k,e_{k-1},\cdots,e_1)$，记

* **收稿日期：**2018-12-31　**修回日期：**2019-01-28　**网络出版时间：**2019-07-15 12:30

资助项目：国家自然科学基金项目(No. 11661011)；广西民族大学研究生创新项目(No. gxun-chxps201813)

第一作者简介：黄敬频，男，教授，研究方向为矩阵计算及其应用，E-mail：hjp2990@126.com

网络出版地址：http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190715.1229.004.html

$$\boldsymbol{D}_{2k}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_k & \boldsymbol{I}_k\\ \boldsymbol{S}_k & -\boldsymbol{S}_k\end{pmatrix},\boldsymbol{D}_{2k+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_k & 0 & \boldsymbol{I}_k\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ \boldsymbol{S}_k & 0 & -\boldsymbol{S}_k\end{pmatrix}, \tag{4}$$

易知:$\boldsymbol{D}_{2k}\in\boldsymbol{U}^{2k\times 2k}$,$\boldsymbol{D}_{2k+1}\in\boldsymbol{U}^{(2k+1)\times(2k+1)}$。

引理1 设 $\boldsymbol{D}_{2k}$,$\boldsymbol{D}_{2k+1}$ 如(4)式所示酉阵,则双自共轭四元数矩阵的集合可表示为:

$$\mathbf{BSC}_{2k}(\boldsymbol{Q})=\left\{\boldsymbol{D}_{2k}\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}+\boldsymbol{H} & 0\\ 0 & \boldsymbol{M}-\boldsymbol{H}\end{pmatrix}\boldsymbol{D}_{2k}^{*}\,\middle|\,\boldsymbol{M},\boldsymbol{H}\in\mathbf{SC}_k(\boldsymbol{Q})\right\}, \tag{5}$$

$$\mathbf{BSC}_{2k+1}(\boldsymbol{Q})=\left\{\boldsymbol{D}_{2k+1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}+\boldsymbol{H} & \sqrt{2}\boldsymbol{C} & 0\\ \sqrt{2}\boldsymbol{C}^{*} & \rho & 0\\ 0 & 0 & \boldsymbol{M}-\boldsymbol{H}\end{pmatrix}\boldsymbol{D}_{2k+1}^{*}\,\middle|\,\boldsymbol{M},\boldsymbol{H}\in\mathbf{SC}_k(\boldsymbol{Q}),\boldsymbol{C}\in\boldsymbol{Q}^{k},\rho\in\mathbf{R}\right\}。 \tag{6}$$

证明 当 $n=2k$ 时,设 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_{11} & \boldsymbol{X}_{12}\\ \boldsymbol{X}_{21} & \boldsymbol{X}_{22}\end{pmatrix}$,其中 $\boldsymbol{X}_{11},\boldsymbol{X}_{22}\in\boldsymbol{Q}^{k\times k}$,若 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{BSC}_{2k}(\boldsymbol{Q})$,则由定义1知 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{*}$,因此有 $\boldsymbol{X}_{11},\boldsymbol{X}_{22}\in\mathbf{SC}_k(\boldsymbol{Q})$,$\boldsymbol{X}_{12}=\boldsymbol{X}_{21}^{*}$,且有:$\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_{11} & \boldsymbol{X}_{12}\\ \boldsymbol{X}_{21} & \boldsymbol{X}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{S}_k\\ \boldsymbol{S}_k & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_{11} & \boldsymbol{X}_{12}\\ \boldsymbol{X}_{21} & \boldsymbol{X}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{S}_k\\ \boldsymbol{S}_k & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{X}_{22}=\boldsymbol{S}_k\boldsymbol{X}_{11}\boldsymbol{S}_k$,$\boldsymbol{X}_{12}=\boldsymbol{S}_k\boldsymbol{X}_{21}\boldsymbol{S}_k$。

令 $\boldsymbol{X}_{11}=\boldsymbol{M}$,$\boldsymbol{X}_{12}\boldsymbol{S}_k=\boldsymbol{H}$,则 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}^{*}$,$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}^{*}$,$\boldsymbol{X}_{12}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{S}_k$,$\boldsymbol{X}_{21}=\boldsymbol{S}_k\boldsymbol{H}$,从而有:$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{M} & \boldsymbol{H}\boldsymbol{S}_k\\ \boldsymbol{S}_k\boldsymbol{H} & \boldsymbol{S}_k\boldsymbol{M}\boldsymbol{S}_k\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{M},\boldsymbol{H}\in\boldsymbol{SC}_k(\boldsymbol{Q})$。

又因为 $\boldsymbol{D}_{2k}^{*}\boldsymbol{X}\boldsymbol{D}_{2k}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_k & \boldsymbol{S}_k\\ \boldsymbol{I}_k & -\boldsymbol{S}_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{M} & \boldsymbol{H}\boldsymbol{S}_k\\ \boldsymbol{S}_k\boldsymbol{H} & \boldsymbol{S}_k\boldsymbol{M}\boldsymbol{S}_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_k & \boldsymbol{I}_k\\ \boldsymbol{S}_k & -\boldsymbol{S}_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}+\boldsymbol{H} & 0\\ 0 & \boldsymbol{M}-\boldsymbol{H}\end{pmatrix}$,所以 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{D}_{2k}\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}+\boldsymbol{H} & 0\\ 0 & \boldsymbol{M}-\boldsymbol{H}\end{pmatrix}\boldsymbol{D}_{2k}^{*}$,即 $2k$ 阶双自共轭矩阵的集合可表示为(5)式。当 $n=2k+1$ 时,若 $\hat{\boldsymbol{X}}\in\mathbf{BSC}_{2k+1}(\boldsymbol{Q})$,由定义1同理可推出

$$\hat{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{M} & \boldsymbol{C} & \boldsymbol{H}\boldsymbol{S}_k\\ \boldsymbol{C}^{*} & \rho & \boldsymbol{C}^{*}\boldsymbol{S}_k\\ \boldsymbol{S}_k\boldsymbol{H} & \boldsymbol{S}_k\boldsymbol{C} & \boldsymbol{S}_k\boldsymbol{M}\boldsymbol{S}_k\end{pmatrix},\boldsymbol{M},\boldsymbol{H}\in\mathbf{SC}_k(\boldsymbol{Q}),\boldsymbol{C}\in\boldsymbol{Q}^{k},\rho\in\mathbf{R}。$$

又因为

$$\boldsymbol{D}_{2k+1}^{*}\hat{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{D}_{2k+1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_k & 0 & \boldsymbol{I}_k\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ \boldsymbol{S}_k & 0 & -\boldsymbol{S}_k\end{pmatrix}^{*}\begin{pmatrix}\boldsymbol{M} & \boldsymbol{C} & \boldsymbol{H}\boldsymbol{S}_k\\ \boldsymbol{C}^{*} & \rho & \boldsymbol{C}^{*}\boldsymbol{S}_k\\ \boldsymbol{S}_k\boldsymbol{H} & \boldsymbol{S}_k\boldsymbol{C} & \boldsymbol{S}_k\boldsymbol{M}\boldsymbol{S}_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_k & 0 & \boldsymbol{I}_k\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ \boldsymbol{S}_k & 0 & -\boldsymbol{S}_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}+\boldsymbol{H} & \sqrt{2}\boldsymbol{C} & 0\\ \sqrt{2}\boldsymbol{C}^{*} & \rho & 0\\ 0 & 0 & \boldsymbol{M}-\boldsymbol{H}\end{pmatrix},$$

所以 $\hat{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{D}_{2k+1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}+\boldsymbol{H} & \sqrt{2}\boldsymbol{C} & 0\\ \sqrt{2}\boldsymbol{C}^{*} & \rho & 0\\ 0 & 0 & \boldsymbol{M}-\boldsymbol{H}\end{pmatrix}\boldsymbol{D}_{2k+1}^{*}$。即 $2k+1$ 阶双自共轭矩阵的集合可表示为(6)式。 证毕

其次,考虑自共轭矩阵的向量化表示。设 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}_1+\boldsymbol{Y}_2\boldsymbol{j}\in\mathbf{SC}_n(\boldsymbol{Q})$,由 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}^{*}$,$(\boldsymbol{Y}_2\boldsymbol{j})^{*}=-\boldsymbol{Y}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{j}$ 得:

$$(\mathrm{Re}(\boldsymbol{Y}_1))^{\mathrm{T}}=\mathrm{Re}(\boldsymbol{Y}_1),(\mathrm{Im}(\boldsymbol{Y}_1))^{\mathrm{T}}=-\mathrm{Im}(\boldsymbol{Y}_1),(\mathrm{Re}(\boldsymbol{Y}_2))^{\mathrm{T}}=-\mathrm{Re}(\boldsymbol{Y}_2),(\mathrm{Im}(\boldsymbol{Y}_2))^{\mathrm{T}}=-\mathrm{Im}(\boldsymbol{Y}_2),$$

于是

$$\boldsymbol{Y}\in\mathbf{SC}_n(\boldsymbol{Q})\Leftrightarrow\mathrm{Re}(\boldsymbol{Y}_1)\in\mathbf{SR}^{n\times n},\mathrm{Im}(\boldsymbol{Y}_1),\mathrm{Re}(\boldsymbol{Y}_2),\mathrm{Im}(\boldsymbol{Y}_2)\in\mathbf{ASR}^{n\times n}。 \tag{7}$$

引理2[9] 设 $\boldsymbol{e}_i$ 是单位矩阵 $\boldsymbol{I}_n$ 的第 i 列,则:

i) $\boldsymbol{X}\in\mathbf{SR}^{n\times n}\Leftrightarrow\mathrm{vec}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{K}_{\mathrm{s}}\mathrm{vec}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{X})$,其中 $\mathrm{vec}_{\mathrm{s}}(X)$ 如(2)所示,$\boldsymbol{K}_{\mathrm{s}}\in\mathbf{R}^{n^2\times\frac{n(n+1)}{2}}$ 表示为:

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{s}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 & \cdots & \boldsymbol{e}_{n-1} & \boldsymbol{e}_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{e}_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 & \cdots & \boldsymbol{e}_{n-1} & \boldsymbol{e}_n & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \boldsymbol{e}_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{e}_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{e}_2 & 0 & \cdots & \boldsymbol{e}_{n-1} & \boldsymbol{e}_n & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \boldsymbol{e}_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & 0 & \boldsymbol{e}_{n-1} & \boldsymbol{e}_n\end{pmatrix}。 \tag{8}$$

ii） $\boldsymbol{X}\in \mathbf{ASR}^{n\times n}\Leftrightarrow \mathrm{vec}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{K}_a\mathrm{vec}_a(\boldsymbol{X})$，其中 $\mathrm{vec}_a(\boldsymbol{X})$ 如(3)式所示，$\boldsymbol{K}_a\in \mathbf{R}^{n^2\times\frac{n(n-1)}{2}}$ 表示为：

$$\boldsymbol{K}_a=\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 & \cdots & \boldsymbol{e}_{n-1} & \boldsymbol{e}_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\boldsymbol{e}_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \boldsymbol{e}_3 & \cdots & \boldsymbol{e}_{n-1} & \boldsymbol{e}_n & \cdots & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{e}_1 & \cdots & 0 & 0 & -\boldsymbol{e}_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\boldsymbol{e}_1 & 0 & 0 & \cdots & -\boldsymbol{e}_2 & 0 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\boldsymbol{e}_1 & 0 & \cdots & 0 & -\boldsymbol{e}_2 & \cdots & -\boldsymbol{e}_{n-1} \end{pmatrix}。\tag{9}$$

根据(7)式和引理 2，容易得到如下表示式。

引理 3 设 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}_1+\boldsymbol{Y}_2\boldsymbol{j}\in \mathbf{SC}_n(\boldsymbol{Q})$，$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Z}_1+\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{j}\in \mathbf{SC}_n(\boldsymbol{Q})$，则有：

$$(\mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Y}_1),\mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Y}_2),\mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\overline{\boldsymbol{Y}}_1),\mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\overline{\boldsymbol{Y}}_2),\mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Z}_1),\mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Z}_2),\mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\overline{\boldsymbol{Z}}_1),\mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\overline{\boldsymbol{Z}}_2))^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}\widetilde{\boldsymbol{X}},\tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{P}\in \mathbf{C}^{8n^2\times(4n^2-2n)}$，$\widetilde{\boldsymbol{X}}\in \mathbf{R}^{(4n^2-2n)\times 1}$ 且表示为：

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{K}_s & \boldsymbol{iK}_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{K}_a & \boldsymbol{iK}_a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{K}_s & -\boldsymbol{iK}_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{K}_a & -\boldsymbol{iK}_a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{K}_s & \boldsymbol{iK}_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{K}_a & \boldsymbol{iK}_a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{K}_s & -\boldsymbol{iK}_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{K}_a & -\boldsymbol{iK}_a \end{pmatrix},\widetilde{X}=\begin{pmatrix} \mathrm{vec}_s(\mathrm{Re}(\boldsymbol{Y}_1)) \\ \mathrm{vec}_a(\mathrm{Im}\ (\boldsymbol{Y}_1)) \\ \mathrm{vec}_a(\mathrm{Re}(\boldsymbol{Y}_2)) \\ \mathrm{vec}_a(\mathrm{Im}\ (\boldsymbol{Y}_2)) \\ \mathrm{vec}_s(\mathrm{Re}(\boldsymbol{Z}_1)) \\ \mathrm{vec}_a(\mathrm{Im}\ (\boldsymbol{Z}_1)) \\ \mathrm{vec}_a(\mathrm{Re}(\boldsymbol{Z}_2)) \\ \mathrm{vec}_a(\mathrm{Im}\ (\boldsymbol{Z}_2)) \end{pmatrix},\tag{11}$$

$\boldsymbol{K}_s$，$\boldsymbol{K}_a$ 分别如(8)式，(9)式所示。

引理 4[6] 设 $\boldsymbol{A}\in \mathbf{R}^{m\times n}$，$\boldsymbol{b}\in \mathbf{R}^n$，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解当且仅当 $\boldsymbol{AA}^+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$。有解时，它的通解和最小二乘解均可表示为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}$，其中 $\boldsymbol{y}\in \mathbf{R}^n$ 是任意的。当 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{n}$ 时，方程组有唯一解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}$。

下面给出 Lyapunov 方程(1)式的双自共轭解。先讨论 $n=2k$ 时情形，记

$$\boldsymbol{D}_{2k}^*\boldsymbol{AD}_{2k}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix},\boldsymbol{D}_{2k}^*\boldsymbol{BD}_{2k}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix}\in \mathbf{SC}_{2k}(\boldsymbol{Q}),\tag{12}$$

其中 $\boldsymbol{D}_{2k}$ 如(4)式所示酉阵。如果 $\boldsymbol{X}$ 是双自共轭矩阵，则由引理 1 可得

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{D}_{2k}\begin{pmatrix} \boldsymbol{M}+\boldsymbol{H} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{M}-\boldsymbol{H} \end{pmatrix}\boldsymbol{D}_{2k}^*,$$

将 $\boldsymbol{X}$ 代入方程(1)得

$$\boldsymbol{D}_{2k}^*\boldsymbol{AD}_{2k}\begin{pmatrix} \boldsymbol{M}+\boldsymbol{H} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{M}-\boldsymbol{H} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \boldsymbol{M}+\boldsymbol{H} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{M}-\boldsymbol{H} \end{pmatrix}\boldsymbol{D}_{2k}^*\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{D}_{2k}=\boldsymbol{D}_{2k}^*\boldsymbol{BD}_{2k},\tag{13}$$

将(12)式代入(13)式得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{M}+\boldsymbol{H} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{M}-\boldsymbol{H} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \boldsymbol{M}+\boldsymbol{H} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{M}-\boldsymbol{H} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}^* & \boldsymbol{A}_{21}^* \\ \boldsymbol{A}_{12}^* & \boldsymbol{A}_{22}^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix},\tag{14}$$

由(14)式可得方程组

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}_{11}(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{H})+(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{H})\boldsymbol{A}_{11}^*=\boldsymbol{B}_{11} \\ \boldsymbol{A}_{12}(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{H})+(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{H})\boldsymbol{A}_{21}^*=\boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{22}(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{H})+(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{H})\boldsymbol{A}_{22}^*=\boldsymbol{B}_{22} \end{cases},\tag{15}$$

其中 $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{M}-\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{B}_{11}$，$\boldsymbol{B}_{22}\in \mathbf{SC}_k(\boldsymbol{Q})$。对(15)式中的矩阵引入下列记号，并作复分解：

$$\boldsymbol{M}+\boldsymbol{H}=\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}_1+\boldsymbol{Y}_2\boldsymbol{j}\in \mathbf{SC}_k(\boldsymbol{Q}),\boldsymbol{M}-\boldsymbol{H}=\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Z}_1+\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{j}\in \mathbf{SC}_k(\boldsymbol{Q}),$$

$$\boldsymbol{A}_{11}=\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}_1+\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{j},\boldsymbol{B}_{11}=\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{j}\in \mathbf{SC}_k(\boldsymbol{Q}),\boldsymbol{A}_{12}=\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{A}_{21}=\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2\boldsymbol{j},\boldsymbol{B}_{12}=\boldsymbol{G}=\boldsymbol{G}_1+\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{j},\boldsymbol{A}_{22}=\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{j},\boldsymbol{B}_{22}=\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}_1+\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{j}\in \mathbf{SC}_k(\boldsymbol{Q}),$$

则(15)式等价于

$$\begin{cases}(\boldsymbol{C}_1+\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{j})(\boldsymbol{Y}_1+\boldsymbol{Y}_2\boldsymbol{j})+(\boldsymbol{Y}_1+\boldsymbol{Y}_2\boldsymbol{j})(\boldsymbol{C}_1^*-\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{j})=\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{j}\\(\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{j})(\boldsymbol{Z}_1+\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{j})+(\boldsymbol{Y}_1+\boldsymbol{Y}_2\boldsymbol{j})(\boldsymbol{F}_1^*-\boldsymbol{F}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{j})=\boldsymbol{G}_1+\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{j},\\(\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{j})(\boldsymbol{Z}_1+\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{j})+(\boldsymbol{Z}_1+\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{j})(\boldsymbol{S}_1^*-\boldsymbol{S}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{j})=\boldsymbol{T}_1+\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{j}\end{cases}\tag{16}$$

将(16)式展开整理可得:

$$\begin{cases}\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{Y}_1-\boldsymbol{C}_2\overline{\boldsymbol{Y}}_2+\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{C}_1^*+\boldsymbol{Y}_2\boldsymbol{C}_2^*=\boldsymbol{K}_1\\\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{Y}_2+\boldsymbol{C}_2\overline{\boldsymbol{Y}}_1-\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Y}_2\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{K}_2\\\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{Z}_1-\boldsymbol{E}_2\overline{\boldsymbol{Z}}_2+\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{F}_1^*+\boldsymbol{Y}_2\boldsymbol{F}_2^*=\boldsymbol{G}_1\\\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{Z}_2+\boldsymbol{E}_2\overline{\boldsymbol{Z}}_1-\boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{F}_2^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Y}_2\boldsymbol{F}_1^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{G}_2\\\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{Z}_1-\boldsymbol{S}_2\overline{\boldsymbol{Z}}_2+\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{S}_1^*+\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{S}_2^*=\boldsymbol{T}_1\\\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{Z}_2+\boldsymbol{S}_2\overline{\boldsymbol{Z}}_1-\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{S}_2^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{S}_1^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T}_2\end{cases},\tag{17}$$

记向量 $\boldsymbol{v}=(\mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}_1),\mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}_2),\mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{G}_1),\mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{G}_2),\mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{T}_1),\mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{T}_2))^{\mathrm{T}}\in\mathbf{C}^{6k^2\times1}$,以及矩阵

$$\boldsymbol{L}_0=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{C}_1+\bar{\boldsymbol{C}}_1\otimes\boldsymbol{I} & \bar{\boldsymbol{C}}_2\otimes\boldsymbol{I} & 0 & -\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{C}_2 & 0 & 0 & 0 & 0\\-\boldsymbol{C}_2\otimes\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{C}_1+\boldsymbol{C}_1\otimes\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{C}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\\bar{\boldsymbol{F}}_1\otimes\boldsymbol{I} & \bar{\boldsymbol{F}}_2\otimes\boldsymbol{I} & 0 & 0 & \boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{E}_1 & 0 & 0 & -\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{E}_2\\-\boldsymbol{F}_2\otimes\boldsymbol{I} & \boldsymbol{F}_1\otimes\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{E}_1 & \boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{E}_2 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{S}_1+\bar{\boldsymbol{S}}_1\otimes\boldsymbol{I} & \bar{\boldsymbol{S}}_2\otimes\boldsymbol{I} & 0 & -\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{S}_2\\0 & 0 & 0 & 0 & -\boldsymbol{S}_2\otimes\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_1\otimes\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{S}_2 & 0\end{pmatrix}。$$

这里 $\boldsymbol{L}_0\in\boldsymbol{C}^{6k^2\times8k^2}$,则方程组(17)式可表示成

$$\boldsymbol{L}_0(\mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Y}_1),\mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Y}_2),\mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\overline{\boldsymbol{Y}}_1),\mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\overline{\boldsymbol{Y}}_2),\mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Z}_1),\mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Z}_2),\mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\overline{\boldsymbol{Z}}_1),\mathrm{vec}^{\mathrm{T}}(\overline{\boldsymbol{Z}}_2))^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{v},\tag{18}$$

再由引理3知,(18)式等价于

$$\boldsymbol{L}\widetilde{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{v},\tag{19}$$

其中 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}_0\boldsymbol{P}\in\boldsymbol{C}^{6k^2\times(4k^2-2k)}$,$\boldsymbol{P}$,$\widetilde{\boldsymbol{X}}$如(11)式所示,令 $\boldsymbol{L}_1=\mathrm{Re}(\boldsymbol{L})$,$\boldsymbol{L}_2=\mathrm{Im}(\boldsymbol{L})$,$\boldsymbol{v}_1=\mathrm{Re}(\boldsymbol{v})$,$\boldsymbol{v}_2=\mathrm{Im}(\boldsymbol{v})$,则(19)式也等价于

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{L}_1\\\boldsymbol{L}_2\end{pmatrix}\widetilde{\boldsymbol{X}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1\\\boldsymbol{v}_2\end{pmatrix},\tag{20}$$

于是,关于问题I的解有如下结果:

定理1 给定 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{Q}^{2k\times2k}$,$\boldsymbol{B}\in\mathbf{SC}_{2k}(\boldsymbol{Q})$,则四元数Lyapunov方程(1)存在双自共轭解 $\boldsymbol{X}$ 的充要条件是:当

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{L}_1\\\boldsymbol{L}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{L}_1\\\boldsymbol{L}_2\end{pmatrix}^{+}\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1\\\boldsymbol{v}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1\\\boldsymbol{v}_2\end{pmatrix}\tag{21}$$

有解时,(20)式的一般解为

$$\widetilde{\boldsymbol{X}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{L}_1\\\boldsymbol{L}_2\end{pmatrix}^{+}\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1\\\boldsymbol{v}_2\end{pmatrix}+\left(\boldsymbol{I}_{4k^2-2k}-\begin{pmatrix}\boldsymbol{L}_1\\\boldsymbol{L}_2\end{pmatrix}^{+}\begin{pmatrix}\boldsymbol{L}_1\\\boldsymbol{L}_2\end{pmatrix}\right)\boldsymbol{w},\tag{22}$$

其中 $\boldsymbol{w}\in\mathbf{R}^{(4k^2-2k)\times1}$ 是任意向量。此外,当条件(21)式成立时,(1)式有唯一双自共轭解 $\boldsymbol{X}_0$ 的充要条件是 $\mathrm{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{L}_1\\\boldsymbol{L}_2\end{pmatrix}=4k^2-2k$,此时$\widetilde{\boldsymbol{X}}_0=\begin{pmatrix}\boldsymbol{L}_1\\\boldsymbol{L}_2\end{pmatrix}^{+}\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1\\\boldsymbol{v}_2\end{pmatrix}$。

证明 根据前面的推导过程可知,(1)式存在双自共轭解⇔方程组(15)式有自共轭解⇔实方程组(20)式有解。再由引理4知,(20)式有解当且仅当(21)式成立,并且(20)式的一般解由(22)式给出。特别地,当条件(21)式成立时,方程(1)有唯一双自共轭解$\widetilde{\boldsymbol{X}}_0$ 的充要条件是$\begin{pmatrix}\boldsymbol{L}_1\\\boldsymbol{L}_2\end{pmatrix}$列满秩,即 $\mathrm{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{L}_1\\\boldsymbol{L}_2\end{pmatrix}=4k^2-2k$。 证毕

注1 当利用定理1判断出方程(1)存在双自共轭解,并得出它的通解(22)式或唯一解$\widetilde{X}_0$ 时,即可得出下列向量:

$$\mathrm{vec}_{\mathrm{s}}(\mathrm{Re}\,(\boldsymbol{Y}_1))=\widetilde{\boldsymbol{X}}_0(1:k(k+1)/2),\mathrm{vec}_{\mathrm{a}}(\mathrm{Im}\,(\boldsymbol{Y}_1))=\widetilde{\boldsymbol{X}}_0(k(k+1)/2+1:k^2),$$

$$\mathrm{vec}_a(\mathrm{Re}\,(\boldsymbol{Y}_2))=\widetilde{\boldsymbol{X}}_0(k^2+1:k(3k-1)/2),\mathrm{vec}_a(\mathrm{Im}\,(\boldsymbol{Y}_2))=\widetilde{\boldsymbol{X}}_0(k(3k-1)/2+1:2k^2-k),$$

$$\mathrm{vec}_s(\mathrm{Re}\,(\boldsymbol{Z}_1))=\widetilde{\boldsymbol{X}}_0(2k^2-k+1:k(5k-1)/2),\mathrm{vec}_a(\mathrm{Im}\,(\boldsymbol{Z}_1))=\widetilde{\boldsymbol{X}}_0(k(5k-1)/2+1:3k^2-k),$$

$$\mathrm{vec}_a(\mathrm{Re}\,(\boldsymbol{Z}_2))=\widetilde{\boldsymbol{X}}_0(3k^2-k+1:k(7k-3)/2),\mathrm{vec}_a(\mathrm{Im}\,(\boldsymbol{Z}_2))=\widetilde{\boldsymbol{X}}_0(k(7k-3)/2+1:4k^2-2k).$$

再通过 $\mathrm{vec}_s(\cdot)$和 $\mathrm{vec}_a(\cdot)$的逆运算就可得出如下自共轭四元数矩阵：

$$\boldsymbol{M}+\boldsymbol{H}=[\mathrm{Re}(\boldsymbol{Y}_1)+\boldsymbol{i}\mathrm{Im}(\boldsymbol{Y}_1)]+[\mathrm{Re}(\boldsymbol{Y}_2)+\boldsymbol{i}\mathrm{Im}(\boldsymbol{Y}_2)]\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{M}-\boldsymbol{H}=[\mathrm{Re}(\boldsymbol{Z}_1)+\boldsymbol{i}\mathrm{Im}(\boldsymbol{Z}_1)]+[\mathrm{Re}(\boldsymbol{Z}_2)+\boldsymbol{i}\mathrm{Im}(\boldsymbol{Z}_2)]\boldsymbol{j},$$

从而得出所求的双自共轭解为 $\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{D}_{2k}\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}+\boldsymbol{H} & 0\\ 0 & \boldsymbol{M}-\boldsymbol{H}\end{pmatrix}\boldsymbol{D}_{2k}^*$。

注 2　对于 $\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{k}+1$ 的情形同理可证，限于篇幅，从略。

2 数值算例

给定四元数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&\boldsymbol{j}&2\\0&\boldsymbol{i}&0&\boldsymbol{k}&-1\\0&0&\boldsymbol{i}&0&1\\1&0&0&\boldsymbol{j}&0\\\boldsymbol{i}&\boldsymbol{k}&0&\boldsymbol{j}&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-6&4-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}&1-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}&1+2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}&-5-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}\\4+\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}&0&-1+\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{k}&-3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}&-1+2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}\\1+\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}&-1-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{k}&2&1+2\boldsymbol{j}&\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\\1-2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}&3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}&1-2\boldsymbol{j}&0&-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}\\-5+\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}&-1-2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}&-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}&\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}&2\end{pmatrix},$$

试讨论四元数矩阵方程(1)式是否存在双自共轭解。

解　将 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XA}^*=\boldsymbol{B}$ 转化成方程组(15)式后可得：

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}4+\boldsymbol{i}&\boldsymbol{k}+2\boldsymbol{j}&0\\0&\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}&0\\\sqrt{2}&0&2\boldsymbol{i}\end{pmatrix},\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-2+\boldsymbol{i}&-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\\2&\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}\\-\sqrt{2}&0\end{pmatrix},\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}2-\boldsymbol{i}&-\boldsymbol{k}&0\\-2&\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}&0\end{pmatrix},\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}-\boldsymbol{i}&-\boldsymbol{k}\\0&\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}-14&4+4\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}&\sqrt{2}-\sqrt{2}\boldsymbol{i}-2\sqrt{2}\boldsymbol{j}-\sqrt{2}\boldsymbol{k}\\4-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}&0&\sqrt{2}\boldsymbol{i}-2\sqrt{2}\boldsymbol{j}-2\sqrt{2}\boldsymbol{k}\\\sqrt{2}+\sqrt{2}\boldsymbol{i}+2\sqrt{2}\boldsymbol{j}+\sqrt{2}\boldsymbol{k}&-\sqrt{2}\boldsymbol{i}+2\sqrt{2}\boldsymbol{j}+\sqrt{2}\boldsymbol{k}&4\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}-8+2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}&2-6\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}\\6-2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}&6\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}\\\sqrt{2}+\sqrt{2}\boldsymbol{i}-\sqrt{2}\boldsymbol{k}&-2\sqrt{2}-\sqrt{2}\boldsymbol{i}-2\sqrt{2}\boldsymbol{j}+2\sqrt{2}\boldsymbol{k}\end{pmatrix},\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}6&4-2\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}\\4+2\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}&0\end{pmatrix}。$$

作复分解后可得：

$$\boldsymbol{C}_1=\begin{pmatrix}4+\boldsymbol{i}&0&0\\0&\boldsymbol{i}&0\\1&0&\sqrt{2}\boldsymbol{i}\end{pmatrix},\boldsymbol{C}_2=\begin{pmatrix}0&2+\boldsymbol{i}&0\\0&1+\boldsymbol{i}&0\\0&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_1=\begin{pmatrix}-2+\boldsymbol{i}&0\\2&\boldsymbol{i}\\-\sqrt{2}&0\end{pmatrix},\boldsymbol{E}_2=\begin{pmatrix}0&-2+\boldsymbol{i}\\0&-1-\boldsymbol{i}\\0&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{F}_1=\begin{pmatrix}2-\boldsymbol{i}&0&0\\-2&\boldsymbol{i}&0\end{pmatrix},\boldsymbol{F}_2=\begin{pmatrix}0&-\boldsymbol{i}&0\\0&-1+\boldsymbol{i}&0\end{pmatrix},\boldsymbol{S}_1=\begin{pmatrix}-\boldsymbol{i}&0\\0&\boldsymbol{i}\end{pmatrix},\boldsymbol{S}_2=\begin{pmatrix}0&-\boldsymbol{i}\\0&1-\boldsymbol{i}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{K}_1=\begin{pmatrix}-14&4&\sqrt{2}-\sqrt{2}\boldsymbol{i}\\4&0&\sqrt{2}\boldsymbol{i}\\\sqrt{2}+\sqrt{2}\boldsymbol{i}&-\sqrt{2}\boldsymbol{i}&4\end{pmatrix},\boldsymbol{K}_2=\begin{pmatrix}0&4+7\boldsymbol{i}&-2\sqrt{2}-\sqrt{2}\boldsymbol{i}\\-4-7\boldsymbol{i}&0&-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\boldsymbol{i}\\2\sqrt{2}+\sqrt{2}\boldsymbol{i}&2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\boldsymbol{i}&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}_1=\begin{pmatrix}-8+2\boldsymbol{i}&2-6\boldsymbol{i}\\6-2\boldsymbol{i}&6\boldsymbol{i}\\\sqrt{2}+\sqrt{2}\boldsymbol{i}&-2\sqrt{2}-\sqrt{2}\boldsymbol{i}\end{pmatrix},\boldsymbol{G}_2=\begin{pmatrix}-2-4\boldsymbol{i}&-8+7\boldsymbol{i}\\-2-3\boldsymbol{i}&2-4\boldsymbol{i}\\-\sqrt{2}\boldsymbol{i}&-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\boldsymbol{i}\end{pmatrix},\boldsymbol{T}_1=\begin{pmatrix}6&4\\4&0\end{pmatrix},\boldsymbol{T}_2=\begin{pmatrix}0&-2-5\boldsymbol{i}\\2+5\boldsymbol{i}&0\end{pmatrix}。$$

按(19)式写出复矩阵 $\boldsymbol{L}$ 和复向量 $\boldsymbol{v}$，作实分解后直接计算可知：

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{L}_1\\\boldsymbol{L}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{L}_1\\\boldsymbol{L}_2\end{pmatrix}^+\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1\\\boldsymbol{v}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1\\\boldsymbol{v}_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\boldsymbol{L}_1\\\boldsymbol{L}_2\end{pmatrix}^+\begin{pmatrix}\boldsymbol{L}_1\\\boldsymbol{L}_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{I},$$

根据定理1,四元数矩阵方程(1)存在唯一双自共轭解,并利用注1的方法计算可得:

$$\boldsymbol{X}_0=\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j} & 1 & -\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k} & -2 \\ -\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j} & 2 & -1 & -1 & \boldsymbol{i}-\boldsymbol{k} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \boldsymbol{i}-\boldsymbol{k} & -1 & -1 & 2 & -\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j} \\ -2 & -\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k} & 1 & \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j} & -1 \end{pmatrix}。$$

3 结论

本文根据双自共轭四元数矩阵的结构特点,给出了它的一种等价性刻划,从而将具有双自共轭结构约束的四元数 Lyapunov 方程 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XA}^*=\boldsymbol{B}$ 转化为实域上无约束矩阵方程,并得出该方程存在双自共轭解的判定条件及求解算法。在方程转化过程中,利用四元数矩阵复表示及 Kronecker 积,克服了四元数乘积的非交换性困难;合理构造双自共轭矩阵的向量化表示,是实现约束方程有效转换的主要步骤,是获得方程可解性判定的关键环节。本文所提方法对解决其它双结构约束方程问题有一定参考作用。

参考文献:

[1] SANCHES J M, MARQUES J S. Image denoising using the Lyapunov equation from non-uniform samples[C]// Image Analysis and Recognition: Third International Conference, Part I. Povoa de Varzim, Portugal: ICIAR, 2006: 351-358.

[2] PANASENKO E V, POKUTNYI O O. Boundary-value problems for the Lyapunov equation in Banach spaces[J]. Journal of Mathematical Sciences, 2017, 223(3): 298-304.

[3] BOGACHEV V I, ROCKNER M, SHAPOSHNIKOV S V. On existence of Lyapunov functions for a stationary Kolmogorov equation with a probability solution[J]. Doklady Mathematics, 2014, 90(1): 424-428.

[4] 赵军,高岩. 二阶线性系统族的共同二次 Lyapunov 函数[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2012, 29(4): 52-56.
ZHAO J, GAO Y. Common quadratic Lyapunov functions for second order linear systems[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2012, 29(4): 52-56.

[5] 黄敬频. 一类混合型 Lyapunov 方程的对称正定解[J]. 工程数学学报, 2008, 25(2): 313-320.
HUANG J P. The symmetric positive definite solutions of a class of mixed-type Lyapunov matrix equations[J]. Journal of Engineering Mathematics, 2008, 25(2): 313-320.

[6] 邓勇,黄敬频. 四元数体上离散型 Lyapunov 方程的反问题解[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2015, 40(7): 1-6.
DENG Y, HUANG J P. On inverse problem of discrete Lyapunov equation over quaternion field[J]. Journal of Southwest Normal University (Natural Science), 2015, 40(7): 1-6.

[7] SUN H, ZHANG J. Solving Lyapunov equation by quantum algorithm[J]. Control Theory Technology, 2017, 15(4): 267-273.

[8] 胡锡炎,张磊,谢冬秀. 双对称矩阵逆特征值问题解存在的条件[J]. 计算数学, 1998, 20(4): 409-418.
HU X Y, ZHANG L, XIE D X. The solvability conditions for the inverse eigenvalue problems of bisymmetric matrices[J]. Computational Mathematics, 1998, 20(4): 409-418.

[9] YUANG S F, WANG Q W, YU Y B. On Hermitian solutions of the split quaternion matrix equation $AXB+CXD=E$[J]. Advances in Applied Clifford Algebras, 2017, 27(4): 3235-3252.

Dual Self-Conjugate Solution of the Quaternion Lyapunov Equation $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XA}^*=\boldsymbol{B}$

HUANG Jingpin, WANG Min, WANG Yun

(College of science, Guangxi University for Nationalities, Nanning 530006, China)

Abstract: [**Purposes**]To discuss dual self-conjugate solution of the quaternion Lyapunov equation $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XA}^*=\boldsymbol{B}$. [**Methods**]The original problem is transformed into an equation problem with self-conjugate structure by using structural properties of dual self-conjugate matrix and matrix transformations. [**Findings**]An necessary and sufficient conditions for the existence of a dual self-conjugate solution and the general solution of the equation are obtained by the vectorization of the self-conjugate matrix. [**Conclusions**]The results expand solution forms of Lyapunov equation, and the numerical example demonstrate effectiveness of the proposed algorithm.

Keywords: quaternion field; Lyapunov equation; dual self-conjugate matrix

(责任编辑 许 甲)