DOI:10.11721/cqnuj20190402

从不同视角看高中数学“线性回归分析”的两个结论*

周迎春

(重庆市第八中学校，重庆 400030)

摘要:【目的】探索普通高中课程标准实验教科书数学学科中所反映的初、高等数学之间的关联性。【方法】以《回归分析的基本思想及其初步应用》中的两个结论为例，从不同视角进行分析、推导及证明。【结果】探索了这些方法之间所展现出的关联性，加深了对数学知识的融会贯通。【结论】普通高中数学课程是衔接初等数学与高等数学的纽带，从不同角度对其进行认知，有利于加深对相关数学概念的理解和掌握。

关键词:双配方法;求偏导法;矩阵法;向量法;线性回归分析

中图分类号:O212.1;G424.1　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2019)04-0131-06

1 研究背景

数学学科知识体系是一个有机的整体[1]，高中数学课程的知识、方法与思想架构，溯源于作为学科的数学知识体系，既承接初中数学对数、式、形的基本认知经验，又连接着高等数学相关内容的背景与内涵，形成一个螺旋上升、交叉编排的课程体系[2]。目前高中数学教学内容中新增了原来高等数学中的部分知识，并融入了现代数学的思想方法，加强了高等数学对中学数学的指导作用[3]。这就对高中数学教师提出了更高的要求，需要他们全方位的把握高中数学知识，对某个知识点，既可以从初等数学的角度进行认知，又可以站在更高的视角(高等数学)来审视和理解。这种对同一知识不同视角的认知分析，既可以促进高中数学教师从关联的视角对数学知识体系进行重新认识，使得自身的学科知识更扎实，又可以透过现象看到本质，用不同视角来指导数学教学，讲深讲透讲活高中数学内容[4-5]。因此，教师从不同视角认识高中同一数学知识具有较强的实践意义和指导意义。本文以普通高中课程中“线性回归分析”中的两个结论为例，分析它们在不同视角下的推导与证明，探究这些方法之间所展现出的关联性，以加深对这两个结论的理解和认知，从而达到更好地指导该内容教学的目的。

2 从不同视角看“线性回归直线的斜率与截距”的推导

在高中数学教材必修 3 的“2.3.2 两个变量的线性相关”中指出，线性回归直线 $y=bx+a$ 的斜率与截距分别为 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\,\overline{x}$，其中 $\overline{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$，$\overline{y}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$。并探索了证明的方法——最小二乘法，即使样本数据的点到回归直线的竖直距离的平方和最小的方法，却没有立即给出推导过程，而在选修 2-3 中的“3.1 回归分析的基本思想及其初步应用”给出了它的推导过程。事实上，从数学的角度来讲该公式的推导过程是多样的，体现了用数学进行分析的不同视角。下面从不同视角加以分析。

2.1 初等代数的视角——“双配方”

由最小二乘法原理，截距 $\hat{a}$ 和斜率 $\hat{b}$ 分别是使 $Q(\alpha,\beta)=\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\beta x_i-\alpha)^2$ 取最小值时 α,β 的值。

* **收稿日期:**2019-04-22　**修回日期:**2019-06-08　**网络出版时间:**2019-07-15　12:30

资助项目:重庆市普通高中课程创新基地(体验式数学学习创新基地)项目

第一作者简介:周迎春，男，中学高级教师，特级教师，研究方向为数学教学法，E-mail:zhouyingchun333@sina.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190715.1230.038.html

$$Q(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\beta x_i-\alpha)^2=\sum_{i=1}^{n}[y_i-\beta x_i-(\overline{y}-\beta\overline{x})+(\overline{y}-\beta\overline{x})-\alpha]^2=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\{[y_i-\beta x_i-(\overline{y}-\beta\overline{x})]^2+2[y_i-\beta x_i-(\overline{y}-\beta\overline{x})]\times[(\overline{y}-\beta\overline{x})-\alpha]+[(\overline{y}-\beta\overline{x})-\alpha]^2\}=$$

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i-\beta x_i-(\overline{y}-\beta\overline{x})]^2+2\sum_{i=1}^{n}[y_i-\beta x_i-(\overline{y}-\beta\overline{x})]\times[(\overline{y}-\beta\overline{x})-\alpha]+n(\overline{y}-\beta\overline{x}-\alpha)^2。$$

其中：

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i-\beta x_i-(\overline{y}-\beta\overline{x})]\times(\overline{y}-\beta\overline{x}-\alpha)=(\overline{y}-\beta\overline{x}-\alpha)\sum_{i=1}^{n}[y_i-\beta x_i-(\overline{y}-\beta\overline{x})]=$$

$$(\overline{y}-\beta\overline{x}-\alpha)\left[\sum_{i=1}^{n}y_i-\beta\sum_{i=1}^{n}x_i-n(\overline{y}-\beta\overline{x})\right]=(\overline{y}-\beta\overline{x}-\alpha)[n\overline{y}-n\beta\overline{x}-n(\overline{y}-\beta\overline{x})]=0。$$

所以有：

$$Q(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}[y_i-\beta x_i-(\overline{y}-\beta\overline{x})]^2+n(\overline{y}-\beta\overline{x}-\alpha)^2=\sum_{i=1}^{n}[(y_i-\overline{y})-\beta(x_i-\overline{x})]^2+n(\overline{y}-\beta\overline{x}-\alpha)^2=$$

$$\beta^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2-2\beta\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})+\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2+n(\overline{y}-\beta\overline{x}-\alpha)^2。$$

在上式中，后两项和 α,β 无关，而前两项为非负数，因此要使 $Q(\alpha,\beta)$ 取得最小值，当且仅当前两项的值均为 0，即当 $\beta=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，且 $\alpha=\overline{y}-\beta\overline{x}$ 时，$Q(\alpha,\beta)$ 取到最小值[6]。

该方法是人民教育出版社出版的普通高中数学A、B版(以下简称“人教版”)教科书中使用的方法，它的数学实质是探求二元二次函数的最小值，推导方向是把 α,β“配”到含有平方项的底的中间。n 对数据：$x_1,x_2,\cdots,x_n$，一般不全相等，否则这 n 对数据在垂直于 x 轴的直线上，失去了求回归方程的意义，所以 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\neq 0$。其中 $x_i,y_i(i=1,2,\cdots,n)$，$\overline{x},\overline{y},n$ 是常数，α,β 是两个无关变量，通过“双配方”的方法，分别探求使之达到最小值的条件，即使得 $Q(\alpha,\beta)$ 取最小值。

最小二乘法从初等代数的角度推导回归方程中的 b 和 a，该方法基本原理起点低，中学生易于理解接受。难点在于推导过程较长，较为抽象化，不易解读。

2.2 高等数学的视角

2.2.1 “偏导数”的视角　由最小二乘法原理，截距 $\hat{a}$ 和斜率 $\hat{b}$ 分别是使 $Q(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\beta x_i-\alpha)^2$ 取最小值时 α,β 的值。

取 $Q(\alpha,\beta)$ 分别关于 α,β 的偏导数，并令它们等于0。

令 $\dfrac{\partial Q(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}=0$，得 $\sum_{i=1}^{n}2(\alpha+\beta x_i-y_i)=0$，即：

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i-y_i)=0,n\alpha+\beta\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}y_i=0,n\alpha+n\beta\overline{x}-n\overline{y}=0。\tag{1}$$

令 $\dfrac{\partial Q(\alpha,\beta)}{\partial\beta}=0$，得 $\sum_{i=1}^{n}2x_i(\alpha+\beta x_i-y_i)=0$，即：

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i+\beta x_i^2-x_iy_i)=0,\alpha\sum_{i=1}^{n}x_i+\beta\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=0,n\alpha\overline{x}+\beta\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=0。\tag{2}$$

联立成方程组：

$$\begin{cases}n\alpha+n\beta\overline{x}-n\overline{y}=0, & (3)\\ n\alpha\overline{x}+\beta\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=0。 & (4)\end{cases}$$

(4)式减去(3)式乘以 $\bar{x}$ 的积,得:$\beta\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2\right)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\,\bar{x}\,\bar{y}$,从而得到 $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$。又由(1)式,得$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$。

偏导数方法是高等数学体系中解决多元方程的基本方法,高等学校的《概率论与数理统计》教材中一般采用偏导数法推导回归直线方程,这就是从“高”处看待中学问题。这种方法在运算量上低于双配方法,体现出高等数学方法体系相较初等数学方法运用上的优势,有利于学生对公式生成的理解。遗憾的是,限于高中数学课程体系知识准备的局限性,这种推导方法无法在高中阶段普及。

2.2.2 “矩阵”的视角　对数据$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$,记$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1 & x_1\\ \vdots & \vdots\\ 1 & x_n\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$,$\bar{\boldsymbol{Y}}=\bar{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\beta}$。考虑:$Q=\sum_{i=1}^{n}(y_i-bx_i-a)^2=(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta})$,其中$(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta})'$是$(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta})$的转置。则有:

$$(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta})=[(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})+\boldsymbol{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})]'[(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})+\boldsymbol{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})]=$$

$$(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})+(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'\boldsymbol{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})+(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})'\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})。$$

注意到:

$$(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})=[\boldsymbol{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})]'[\boldsymbol{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})]\geqslant 0,$$

$$(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'\boldsymbol{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{X}-\hat{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})'=(\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{X})(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})'=0,$$

所以 $Q=\sum_{i=1}^{n}(y_i-bx_i-a)^2\geqslant(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})$,取等条件为$(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})\hat{\boldsymbol{\beta}}=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$,$\hat{\boldsymbol{\beta}}=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$。

由 $|\boldsymbol{XX}'|=\left|\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\\ x_1 & \cdots & x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x_1\\ \vdots & \vdots\\ 1 & x_n\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}n & \sum_{i=1}^{n}x_i\\ \sum_{i=1}^{n}x_i & \sum_{i=1}^{n}x_i^2\end{vmatrix}=n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\geqslant 0$,当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时,取等号。此时 n 对数据在垂直于 x 轴的直线上失去了求回归方程的意义,所以 $|\boldsymbol{XX}'|\neq 0$,即 $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$ 存在[7]。

2.3 **“向量”的视角**

数据$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$具有相关关系。设 M 是回归直线 $l:y=bx+a$ 上一点,$A_i(x_i,y_i)$,$B_i(x_i,bx_i+a)$,$i=1,2,\cdots,n$。$G(\bar{x},\bar{y})$,$\vec{m}=(b,-1)$是直线 l 的法向量,如图 1 所示。则$\overrightarrow{MA_i}$和$\overrightarrow{B_iA_i}$在 $\vec{m}$ 上的投影相等,即$\overrightarrow{MA_i}\cdot\vec{m}=\overrightarrow{B_iA_i}\cdot\vec{m}$,从而有:

$$|\overrightarrow{B_iA_i}|=|y_i-(bx_i+a)|=$$

$$|0\times b+[y_i-(bx_i+a)]\times(-1)|=$$

$$|\overrightarrow{B_iA_i}\cdot\vec{m}|=|\overrightarrow{MA_i}\cdot\vec{m}|,i=1,2,\cdots n。$$

又 $\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{GA_i}=\vec{0}$,所以$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{GA_i}\cdot\vec{m}=0$。则:

$$Q(a,b)=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(bx_i+a)]^2=\sum_{i=1}^{n}|\overrightarrow{B_iA_i}|^2=$$

$$\sum_{i=1}^{n}|\overrightarrow{MA_i}\cdot\vec{m}|^2=\sum_{i=1}^{n}[(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA_i})\cdot\vec{m}]^2=$$

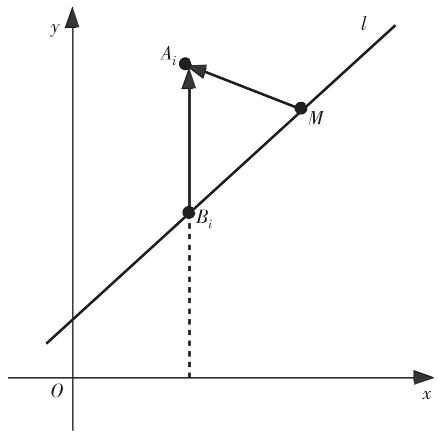

图 1　直线 l 向量图

Fig. 1　Vector graphics of line l

$$\sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{MG}\cdot\vec{m}+\overrightarrow{GA_i}\cdot\vec{m})^2=n(\overrightarrow{MG}\cdot\vec{m})^2+2(\overrightarrow{MG}\cdot\vec{m})\left(\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{GA_i}\cdot\vec{m}\right)+\sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{GA_i}\cdot\vec{m})^2=$$

$$n(\overrightarrow{MG}\cdot\vec{m})^2+\sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{GA_i}\cdot\vec{m})^2=n(\overrightarrow{MG}\cdot\vec{m})^2+\sum_{i=1}^{n}[(x_i-\overline{x},y_i-\overline{y})\cdot(b,-1)]^2=$$

$$n(\overrightarrow{MG}\cdot\vec{m})^2+\sum_{i=1}^{n}[b(x_i-\overline{x})-(y_i-\overline{y})]^2=$$

$$n(\overrightarrow{MG}\cdot\vec{m})^2+b^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2-2b\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})+\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2。$$

当且仅当 $b=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$,且 $\overrightarrow{MG}\cdot\vec{m}=0$(即点 G 在回归直线 l 上,$\overline{y}=b\overline{x}+a$)时,$Q(a,b)$ 取最小值[8]。

通过构造平面向量,利用几何直观并结合向量运算体系的证明方法,则体现出向量作为工具在代数证明上的运用价值。渗透数学体系的横向关联,把向量体系和数理统计体系紧密联系在一起。该方法构思巧妙,又易于理解,很好地体现了中学数学体系间的联系。此方法也是矩阵方法的直观化表现。

3 从不同视角看相关系数

在人教版高中数学必修3的"阅读与思考"中提到用相关系数 r 来衡量两个变量之间线性关系的强弱。若相应于变量 x 的取值 x_i,变量 y 的观测值为 $y_i(1\leqslant i\leqslant n)$,则两个变量的相关系数的计算公式为:

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}。$$

相关系数 r 的值,决定了由观测值所生成的线性回归方程是否有意义,是线性回归方程是否有实际价值的重要前提。在人教版教科书中,对相关系数 r 的值只介绍了两个性质:

1) $r>0$ 时,表明两个变量正相关;$r<0$ 时,表明两个变量负相关。

2) $|r|\leqslant 1$,并且 $|r|$ 越接近1,两个变量的线性相关性越强;$|r|$ 越接近0,两个变量的线性相关性越弱。

囿于高中的相关知识准备,人教版教科书缺少对两个结论的证明,使知识体系在这一部分不够完备。这也在客观上产生了教学的难点,弱化了学生对回归分析基本思想的体会深度,不利于学生从整体上认知回归分析的思想体系。因此,本文从函数和向量两个角度对 r 的性质加以阐述。

3.1 从函数的视角来看 r 的性质

从结构上,$|r|\leqslant 1$ 等价于 $\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2$,是 n 维柯西不等式形式,从而有如下初等方法证明。

构造函数 $f(\lambda)=\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\right]\lambda^2+2\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})\right]\lambda+\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2\right]$。则有:

$$f(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}[(x_i-\overline{x})^2\lambda^2+(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})\lambda+(y_i-\overline{y})^2]=\sum_{i=1}^{n}[(x_i-\overline{x})\lambda+(y_i-\overline{y})]^2\geqslant 0,$$

即 $f(\lambda)$ 恒非负。

若 $x_i=\overline{x}$,$i=1,2,\cdots,n$,则这 n 对数据在垂直于 x 轴的直线上,失去了求回归方程的意义,所以有 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\neq 0$。

令 $\Delta=4\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})\right]^2-4\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2\right]\leqslant 0$,所以有:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2。$$

此方法与回归直线方程的推导路径一相呼应,共同构建了高中教科书回归分析中两个核心结论的初等数学

方法证明体系。

3.2 从向量的视角来看 r 的性质

湖南教育出版社出版的数学教科书(简称湘教版)在这一部分,作出如下证明和解读。

已知数据$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$。令点 $A(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$B(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,$A_0(\underbrace{\overline{x},\overline{x},\cdots,\overline{x}}_{n个\overline{x}})$,$B_0(\underbrace{\overline{y},\overline{y},\cdots,\overline{y}}_{n个\overline{y}})$,则:

$$\overrightarrow{A_0A}=(x_1-\overline{x},x_2-\overline{x},\cdots,x_n-\overline{x}),\overrightarrow{B_0B}=(y_1-\overline{y},y_2-\overline{y},\cdots,y_n-\overline{y})。$$

$$\overrightarrow{A_0A}\cdot\overrightarrow{B_0B}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y}),|\overrightarrow{A_0A}|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2},|\overrightarrow{B_0B}|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}。$$

所以 $\cos\langle\overrightarrow{A_0A},\overrightarrow{B_0B}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{A_0A}\cdot\overrightarrow{B_0B}}{|\overrightarrow{A_0A}||\overrightarrow{B_0B}|}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$,从而 $|r|=|\cos\langle\overrightarrow{A_0A},\overrightarrow{B_0B}\rangle|\leqslant1$。

当 $|r|=1$ 时,$\cos\langle\overrightarrow{A_0A},\overrightarrow{B_0B}\rangle=\pm1$,$\overrightarrow{A_0A}//\overrightarrow{B_0B}$,表示所有点$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$都在直线 $y-\overline{y}=k(x-\overline{x})$上;

当 $|r|\to1$ 时,$\langle\overrightarrow{A_0A},\overrightarrow{B_0B}\rangle\to0$ 或 π,$\overrightarrow{A_0A}$与$\overrightarrow{B_0B}$接近共线,所有点$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$几乎都在直线 $y-\overline{y}=k(x-\overline{x})$附近,说明$|r|$越接近 1,线性相关程度越大;

当 $|r|\to0$ 时,$\langle\overrightarrow{A_0A},\overrightarrow{B_0B}\rangle\to\dfrac{\pi}{2}$,$\overrightarrow{A_0A}$与$\overrightarrow{B_0B}$接近垂直,不存在常数 k,使得所有点$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$几乎都在直线 $y-\overline{y}=k(x-\overline{x})$附近,说明$|r|$越接近 0,线性相关程度越小[9]。

通过构造两个 n 维向量,借助向量运算实现证明,既便捷又直观。向量方法由远及近解决数理统计问题,与回归方程的推导路径三相互辉映,形成了一个完备的证明体系;同时,这个方法实质上是将矩阵运算几何化,高观点、低起点,有较强的直观性,利于学生理解。极好地体现了数学的应用价值(向量作为工具的应用)和审美价值(知识串联的逻辑美学)。

4 结束语

"横看成岭侧成峰,远近高低各不同",以上从不同视角分析了高中数学"线性回归分析"的两个结论的推导,说明在教学中,数学教师应对同一数学知识进行多角度的思考,增强对知识的融汇贯通和深刻理解,这样才能看到"不一样的风景";"不识庐山真面目,只缘身在此山中",作为中学数学教师应该时时跳出初等数学的范畴,从高等数学的角度来看待所教的数学知识。虽然不一定要把这些高等数学的方法教授给学生,但可以站在更高的角度去设计中学数学知识的教学。

参考文献:

[1] 菲利克斯·克莱茵.高观点下的初等数学[J].舒湘芹,陈义章,译.上海:复旦大学出版社,2008.
KLEIN F. Elementary mathematics from an advanced standpoint[J]. SHU X Q,CHEN Y Z,translation. Shanghai:Fudan University Press,2008.

[2] 张奠宙,宋乃庆.数学教育概论[M].北京:高等教育出版社,2016.
ZHANG D Z,SONG N Q. Introduction to mathematics education[J]. Beijing:Higher Education Press,2016.

[3] 常海楠,胡鹏意,崔丽英.浅谈"高观点"下中学数学的功能[J].才智,2016(24):6.
CHANG H N,HU P Y,CUI L Y. On the function of middle school mathematics in a high view[J]. Ability and Wisdom,2016(24):6.

[4] 陈焕斌.高观点下的中学数学教学[J].中学数学教学参考,2018(5):25-26.
CHEN H B. The teaching of middle school mathematics in high view[J]. Teaching Reference of Middle School Mathematics,2018(5):25-26.

[5] 段旭东.高等数学视角下的中学数学研究:以函数教学为例[J].数学学习与研究,2016(19):154.
DUAN X D. Research on middle school mathematics from the perspective of higher mathematics:take function teaching as an exampl[J]. Mathematics Learning and Research,2016(19):154.

[6] 人民教育出版社.普通高中课程标准实验教科书·数学 A 版选修 2-3[M].北京:人民教育出版社,2009.
People's Education Press. Ordinary high school curriculum

standard experimental textbook mathematic A elective 2-3 [M]. Beijing: People's Education Press, 2009.

[7] 盛骤,谢式千,潘承毅. 概率论与数理统计[M]. 北京:高等教育出版社,2010.
SHENG Z, XIE S Q, PAN C Y. Probability theory and mathematics statistics [M]. Beijing: Higher Education Press, 2010.

[8] 徐全德. 利用向量数量积的几何意义解题[J]. 中学数学研究,2013(3):34-36.
XU Q D. Solving geometric problems by using vector scalar produc[J]. Research of Middle School Mathematics, 2013 (3): 34-36.

[9] 湖南教育出版社. 普通高中课程标准实验教科书. 数学选修 2-3[M]. 长沙:湖南教育出版社,2017.
HUNAN EDUCATION PUBLISHING HOUSE. Ordinary high school curriculum standard experimental text book mathematic elective2-3 [M]. Changsha: Hunan Education Publishing House, 2017.

Two Conclusions of High School Mathematics "Linear Regression Analysis" from Different Perspectives

ZHOU Yingchun

(Chongqing No. 8 Middle School, Chongqing 400030, China)

Abstract: [**Purposes**]To explore the correlation between elementary and higher mathematics reflected in the mathematics subjects of the high school curriculum standard experimental textbooks. [**Methods**] Two conclusions in the basic ideas of regression analysis and its preliminary application were taken as examples to analyze, deduce and prove from different perspectives. [**Findings**] The correlation between these methods was explored, and the mastery of mathematical knowledge was deepened. [**Conclusions**] The ordinary high school mathematics curriculum is the link between elementary mathematics and higher mathematics, and the cognition of it from different perspectives is conducive to deepening the understanding and mastery of related mathematical concepts.

Keywords: double matching method; partial derivative method; matrix method; vector method; regression analysis

(责任编辑　黄　颖)