DOI:10.11721/cqnuj20190519

一种求解变波数 Helmholtz 方程的高精度紧致差分方法*

王　芝,葛永斌
(宁夏大学 数学统计学院,银川 750021)

摘要:【目的】进一步研究 Helmholtz 方程对于大波数和变波数问题的数值计算,数值求解 Helmholtz 方程具有重要的理论价值和现实意义。【方法】利用泰勒级数展开,并结合混合型紧致格式的思想,推导了数值求解一维和二维 Helmholtz 方程的六阶精度紧致差分格式。并且格式涉及到未知函数及其一阶和二阶导数值,为保证格式的整体精度,对一阶和二阶导数的计算也采用六阶紧致差分格式。【结果】格式在小波数和变波数的情况下都有六阶精度,在大波数的情况下仍然能保持三阶以上精度。【结论】数值实验验证了格式的精确性和可靠性。

关键词:变波数 Helmholtz 方程;混合型;高精度;紧致格式;有限差分方法

中图分类号:O241.82　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2019)05-0092-06

Helmholtz 方程是一种描述电磁波的偏微分方程,在工程领域中涉及同时存在空间和时间依赖的偏微分方程的物理问题的研究中有着广泛应用,如电磁场中的波导问题、电磁波散射以及海洋工程中水波衍射问题等。

求解该类方程常见的数值方法包括有限元法、有限体积法、有限差分法等[1-3]。其中有限元法的应用最为普遍,但利用有限元法求解会因波数的增大使得计算精度急剧下降。而有限差分法因离散简单、格式易推导、计算程序易实现等诸多优点而受到广泛关注。Helmholtz 方程由于本身的复杂特性给数值计算带来了巨大困难,特别是大波数和变波数问题的数值计算至今仍然是需要不断深入研究的课题。所以,研究 Helmholtz 方程的数值求解方法具有重要的理论价值和现实意义。

针对 Helmholtz 方程国内外学者已提出了很多数值方法[4-13],如 Singer 和 Turkel[4] 建立了两种有限差分格式:一种是利用四阶 Padé 近似的推广,另一种是基于方程本身导数的高阶修正,这两种格式具有四阶精度;Nabavi 等人[5] 在 Singer 和 Turkel 研究工作的基础上,针对一维和二维 Helmholtz 方程,基于方程本身导数的高阶修正构造了一种具有六阶精度的九点紧致有限差分格式;柯日焕和黎稳[6] 利用联合紧致差分格式(CCD)离散 Helmholtz 方程,格式具有六阶精度;Fu[7] 针对二维 Helmholtz 方程的大波数问题,提出了两种四阶精度紧致差分格式,对差分格式形成的线性代数方程组采用快速傅立叶变换(FFT)方法进行求解;Wu[8] 针对二维 Helmholtz 方程提出了一种色散极小化紧致差分格式;Chen 和 Qiu[9] 提出了一阶系统最小二乘方法,用于求解高波数问题,得到一个 Hermitian 正定代数系统,并明确地给出了网格大小 h,逼近阶 p 和波数 k 的依赖关系;Zhuang 和 Sun[10] 针对二维 Helmholtz 方程提出了一种高阶交替方向隐式(ADI)差分方法,它的格式具有四阶精度;葛永斌和刘国涛[11] 针对二维 Helmholtz 方程,基于二阶导数的四阶 Padé 型紧致差分逼近式,结合方程本身,得到一种四阶紧致差分格式,并利用算子插值法和 Richardson 外推法将格式精度提高到了六阶;马廷福和葛永斌[12] 提出了一种求解三维 Helmholtz 方程的 19 点紧致差分格式,并结合多重网格算法提高了数值计算效率;孙晓峰和姜子文[13] 针对一维 Helmholtz 方程,利用有限体积方法提出了一种四阶紧致格式。

本文将对一维和二维 Helmholtz 方程的紧致差分格式进行研究,构造出一种混合型的高精度紧致差分格式,最后利用数值算例进行验证。

---

* **收稿日期:**2018-12-06　**修回日期:**2019-04-14　**网络出版时间:**2019-09-09 18:26

资助项目:国家自然科学基金(No. 11772165;No. 11961054);宁夏自然科学基金重点项目(No. 2018AAC02003);宁夏自治区重点研发项目(No. 2018BEE03007);宁夏大学研究生创新项目(No. GIP2019010)

第一作者简介:王芝,女,研究方向为偏微分方程数值解法,E-mail:wangzhi11@yeah.net;**通信作者:**葛永斌,男,教授,博士生导师,E-mail:gyb@nxu.edu.cn

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20190909.1826.002.html

1 一维问题的高阶紧致差分格式

首先，考虑一维变波数 Helmholtz 方程的 Dirichlet 边值问题：

$$\begin{cases} u_{xx}+k^2(x)u=f(x), x\in[a,b]; \\ u(a)=\alpha, u(b)=\beta。 \end{cases} \tag{1}$$

其中，$u(x)$为待求未知函数，$f(x)$为非齐次项，$k(x)$为波函数，α,β为常数，$[a,b]$为定义域。首先将定义域进行等距网格剖分，$a=x_0,x_1,x_2,\cdots,x_N=b$，定义步长 $h=\dfrac{b-a}{N}$。定义如下中心差分算子：

$$\delta_x^2 u_i=\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}, \delta_x u_i=\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h},$$

其中 u_i,u_{i+1}和 u_{i-1}分别表示 $u(x)$在 x_i，x_{i+1}和 x_{i-1}点处的函数值。

将 u_{i+1}和 u_{i-1}在 x_i 点处进行泰勒级数展开可得：

$$u_{i\pm1}=u_i\pm hu_{xi}+\frac{h^2}{2}u_{xxi}\pm\frac{h^3}{6}u_{x^3i}+\frac{h^4}{24}u_{x^4i}\pm\frac{h^5}{120}u_{x^5i}+\frac{h^6}{720}u_{x^6i}\pm\frac{h^7}{5\ 040}u_{x^7i}+O(h^8), \tag{2}$$

将(2)式两边相加可得：$u_{i+1}+u_{i-1}=2u_i+h^2u_{xxi}+\dfrac{h^4}{12}u_{x^4i}+\dfrac{h^6}{360}u_{x^6i}+O(h^8)$，

即有

$$\delta_x^2 u_i=u_{xxi}+\frac{h^2}{12}u_{x^4i}+\frac{h^4}{360}u_{x^6i}+O(h^6)。 \tag{3}$$

将(2)式两边相减可得：$u_{i+1}-u_{i-1}=2hu_{xi}+\dfrac{h^3}{3}u_{x^3i}+\dfrac{h^5}{60}u_{x^5i}+O(h^7)$，

即有

$$\delta_x u_i=u_{xi}+\frac{h^2}{6}u_{x^3i}+\frac{h^4}{120}u_{x^5i}+O(h^6)。 \tag{4}$$

将(4)式中的 u 用 u_x 代替得：

$$\delta_x u_{xi}=u_{xxi}+\frac{h^2}{6}u_{x^4i}+\frac{h^4}{120}u_{x^6i}+O(h^6)。 \tag{5}$$

由(3)式乘以 2 再减去(5)式可得二阶导数的六阶紧致差分公式：

$$u_{xxi}=2\delta_x^2 u_i-\delta_x u_{xi}+\frac{h^4}{360}u_{x^6i}+O(h^6), \tag{6}$$

其中，高阶导数项 u_{x^6i}采用如下具有二阶精度的差分公式进行离散[14]：

$$u_{x^6i}=\frac{240}{h^4}\left(u_{xxi}-\delta_x^2 u_i+\frac{h^2}{12}\delta_x^2 u_{xxi}\right)+O(h^2)。 \tag{7}$$

将(6)式代入原方程(1)中，并利用(7)式可得：

$$2\delta_x^2 u_i-\delta_x u_{xi}+\frac{h^4}{360}\left[\frac{240}{h^4}\left(u_{xxi}-\delta_x^2 u_i+\frac{h^2}{12}\delta_x^2 u_{xxi}\right)\right]+k_i^2 u_i=f_i+O(h^6)。 \tag{8}$$

代入中心差分算子 δ_x^2 和δ_x 的定义，略去高阶项 $O(h^6)$，并整理可得：

$$\frac{4}{3h^2}u_{i+1}+\left(k_i^2-\frac{8}{3h^2}\right)u_i+\frac{4}{3h^2}u_{i-1}=f_i+\frac{1}{2h}(u_{xi+1}-u_{xi-1})-\frac{1}{18}(u_{xxi+1}+10u_{xxi}+u_{xxi-1})。 \tag{9}$$

(9)式即为求解一维 Helmholtz 方程的高精度混合型紧致差分格式，由推导过程可知它的截断误差为 $O(h^6)$，即格式具有六阶精度。同时注意到，由于格式中 u_x 和 u_{xx}也是未知的，因此对 u_x 和 u_{xx}采用如下的六阶差分格式进行计算[14]：

$$\frac{7}{16}u_{x\,i+1}+u_{x\,i}+\frac{7}{16}u_{x\,i-1}=\frac{15}{16h}(u_{i+1}-u_{i-1})+\frac{h}{16}(u_{xx\,i+1}-u_{xx\,i-1})-\frac{1}{8}u_{xx\,i+1}+u_{xx\,i}-\frac{1}{8}u_{xx\,i-1}=$$

$$\frac{3}{h^2}(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1})-\frac{9}{8h}(u_{x\,i+1}-u_{x\,i-1}),$$

对于边界点的离散，采用如下六阶离散格式[15]：

$$u_{x0}+5u_{x1}=\frac{1}{h}\left(-\frac{197}{60}u_0-\frac{5}{12}u_1+5u_2-\frac{5}{3}u_3+\frac{5}{12}u_4-\frac{1}{20}u_5\right),$$

$$u_{xN}+5u_{xN-1}=\frac{1}{h}\left(\frac{197}{60}u_N+\frac{5}{12}u_{N-1}-5u_{N-2}+\frac{5}{3}u_{N-3}-\frac{5}{12}u_{N-4}+\frac{1}{20}u_{N-5}\right),$$

$$u_{xx0}-6u_{xx1}=\frac{1}{h}\left(-\frac{26}{3}u_{x0}-6u_{x1}+3u_{x2}\right)+\frac{1}{h^2}\left(-\frac{403}{18}u_0+33u_1-\frac{21}{2}u_2-\frac{1}{9}u_3\right),$$

$$u_{xxN}-6u_{xxN-1}=\frac{1}{h}\left(\frac{26}{3}u_{xN}+6u_{xN-1}-3u_{xN-2}\right)+\frac{1}{h^2}\left(-\frac{403}{18}u_N+33u_{N-1}-\frac{21}{2}u_{N-2}-\frac{1}{9}u_{N-3}\right)。$$

2 二维问题的高阶紧致差分格式

考虑二维 Helmholtz 方程的 Dirichlet 边值问题：

$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}+k^2(x,y)u=f(x,y),(x,y)\in\Omega;\\ u(x,y)=g(x,y),(x,y)\in\partial\Omega。\end{cases} \tag{10}$$

其中，$u(x,y)$为待求未知函数，$f(x,y)$为非齐次项，$g(x,y)$为已知函数，$k(x,y)$为波函数，$\Omega=[a,b]\times[c,d]$为求解区域，$\partial\Omega$为区域边界。

将计算区域Ω分别在x方向和y方向进行等距网格剖分，x方向剖分为N等分，即：$a=x_0,x_1,\cdots,x_N=b$，定义x方向步长：$h_x=\frac{b-a}{N}$；y方向剖分为M等分，即：$c=y_0,y_1,\cdots,y_M=d$，定义y方向步长：$h_y=\frac{d-c}{M}$。定义如下中心差分算子：

$$\delta_x^2u_{i,j}=\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h_x^2},\delta_xu_{i,j}=\frac{u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{2h_x},\delta_y^2u_{i,j}=\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{h_y^2},\delta_yu_{i,j}=\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{2h_y}。$$

其中$u_{i,j},u_{i+1,j},u_{i-1,j},u_{i,j+1}$和$u_{i,j-1}$分别表示$u(x,y)$在$(x_i,y_j)$，$(x_{i+1},y_j)$，$(x_{i-1},y_j)$，$(x_i,y_{j+1})$和$(x_i,y_{j-1})$点处的函数值。利用与一维情形相类似的推导过程，可以得到二维方程中u_{xx}和u_{yy}在(x_i,y_j)点的六阶差分公式：

$$u_{xxi,j}=2\delta_x^2u_{i,j}-\delta_xu_{xi,j}+\frac{h_x^4}{360}u_{x^6i,j}+O(h_x^6), \tag{11}$$

$$u_{yyi,j}=2\delta_y^2u_{i,j}-\delta_yu_{yi,j}+\frac{h_y^4}{360}u_{y^6i,j}+O(h_y^6)。 \tag{12}$$

对$u_{x^6i,j}$和$u_{y^6i,j}$采用如下具有二阶精度的差分公式进行离散[14]：

$$u_{x^6i,j}=\frac{240}{h_x^4}\left(u_{xxi,j}-\delta_x^2u_{i,j}+\frac{h_x^2}{12}\delta_x^2u_{xxi,j}\right)+O(h_x^2), \tag{13}$$

$$u_{y^6i,j}=\frac{240}{h_y^4}\left(u_{yyi,j}-\delta_y^2u_{i,j}+\frac{h_y^2}{12}\delta_y^2u_{yyi,j}\right)+O(h_y^2)。 \tag{14}$$

将(11)和(12)式代入二维 Helmholtz 方程(10)中，并利用(13)和(14)式可得：

$$2\delta_x^2u_{i,j}-\delta_xu_{xi,j}+\frac{h_x^4}{360}\left[\frac{240}{h_x^4}\left(u_{xxi,j}-\delta_x^2u_{i,j}+\frac{h_x^2}{12}\delta_x^2u_{xxi,j}\right)\right]+2\delta_y^2u_{i,j}-\delta_yu_{yi,j}+$$
$$\frac{h_y^4}{360}\left[\frac{240}{h_y^4}(u_{yyi,j}-\delta_y^2u_{i,j}+\frac{h_y^2}{12}\delta_y^2u_{yyi,j})\right]+k_{i,j}^2u_{i,j}=f_{i,j}+O(h_x^6+h_y^6)。 \tag{15}$$

代入一阶和二阶中心差分算子的定义，略去高阶项$O(h_x^6+h_y^6)$，并整理可得：

$$\frac{4}{3h_x^2}(u_{i+1,j}+u_{i-1,j})+\frac{4}{3h_y^2}(u_{i,j+1}+u_{i,j-1})+\left(k_{i,j}^2-\frac{8}{3h_x^2}-\frac{8}{3h_y^2}\right)u_{i,j}=$$
$$\frac{1}{2h_x}(u_{xi+1,j}-u_{xi-1,j})+\frac{1}{2h_y}(u_{yi,j+1}-u_{yi,j-1})-\frac{1}{18}(u_{xxi+1,j}+10u_{xxi,j}+$$
$$u_{xxi-1,j}+u_{yyi,j+1}+10u_{yyi,j}+u_{yyi,j-1})+f_{i,j}。 \tag{16}$$

(16)式即为求解二维 Helmholtz 方程的高精度混合型紧致差分格式，由推导过程可知它的截断误差为$O(h_x^6+h_y^6)$，即格式具有六阶精度。由于格式还涉及到未知函数u的一阶和二阶导数，为此对它本文采用如下六阶差分格式进行计算[14]：

$$\frac{7}{16}u_{xi+1,j}+u_{xi,j}+\frac{7}{16}u_{xi-1,j}=\frac{15}{16h_x}(u_{i+1,j}-u_{i-1,j})+\frac{h_x}{16}(u_{xxi+1,j}-u_{xxi-1,j})-\frac{1}{8}u_{xxi+1,j}+u_{xxi,j}-\frac{1}{8}u_{xxi-1,j}=$$

$$\frac{3}{h_x^2}(u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j})-\frac{9}{8h_x}(u_{xi+1,j}-u_{xi-1,j}),$$

$$\frac{7}{16}u_{y\,i,j+1}+u_{y\,i,j}+\frac{7}{16}u_{y\,i,j-1}=\frac{15}{16h_y}(u_{i,j+1}-u_{i,j-1})+\frac{h_y}{16}(u_{yyi,j+1}-u_{yyi,j-1})-\frac{1}{8}u_{yy\,i,j+1}+u_{yy\,i,j}-\frac{1}{8}u_{yy\,i,j-1}=$$
$$\frac{3}{h_y^2}(u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1})-\frac{9}{8h_y}(u_{yi,j+1}-u_{yi,j-1})。$$

对于边界点的计算，采用如下六阶离散格式[15]：

$$u_{x\,0,j}+5u_{x\,1,j}=\frac{1}{h_x}\left(-\frac{197}{60}u_{0,j}-\frac{5}{12}u_{1,j}+5u_{2,j}-\frac{5}{3}u_{3,j}+\frac{5}{12}u_{4,j}-\frac{1}{20}u_{5,j}\right),$$

$$u_{x\,N,j}+5u_{x\,N-1,j}=\frac{1}{h_x}\left(\frac{197}{60}u_{N,j}+\frac{5}{12}u_{N-1,j}-5u_{N-2,j}+\frac{5}{3}u_{N-3,j}-\frac{5}{12}u_{N-4,j}+\frac{1}{20}u_{N-5,j}\right)\ u_{xx\,0,j}-6u_{xx\,1,j}=$$
$$\frac{1}{h_x}\left(-\frac{26}{3}u_{x0,j}-6u_{x1,j}+3u_{x2,j}\right)+\frac{1}{h_x^2}\left(-\frac{403}{18}u_{0,j}+33u_{1,j}-\frac{21}{2}u_{2,j}-\frac{1}{9}u_{3,j}\right),$$

$$u_{xx\,N,j}-6u_{xx\,N-1,j}=\frac{1}{h_x}\left(\frac{26}{3}u_{x\,N,j}+6u_{x\,N-1,j}-3u_{x\,N-2,j}\right)+$$
$$\frac{1}{h_x^2}\left(-\frac{403}{18}u_{N,j}+33u_{N-1,j}-\frac{21}{2}u_{N-2,j}-\frac{1}{9}u_{N-3,j}\right)u_{yi,0}+5u_{yi,1}=\frac{1}{h_y}\left(-\frac{197}{60}u_{i,0}-\frac{5}{12}u_{i,1}+5u_{i,2}-\frac{5}{3}u_{i,3}+\frac{5}{12}u_{i,4}-\frac{1}{20}u_{i,5}\right),$$

$$u_{yi,M}+5u_{yi,M-1}=\frac{1}{h_x}\left(\frac{197}{60}u_{i,M}+\frac{5}{12}u_{i,M-1}-5u_{i,M-2}+\frac{5}{3}u_{i,M-3}-\frac{5}{12}u_{i,M-4}+\frac{1}{20}u_{i,M-5}\right)u_{yy\,i,0}-6u_{yyi,1}=$$
$$\frac{1}{h_y}\left(-\frac{26}{3}u_{yi,0}-6u_{yi,1}+3u_{yi,2}\right)+\frac{1}{h_y^2}\left(-\frac{403}{18}u_{i,0}+33u_{i,1}-\frac{21}{2}u_{i,2}-\frac{1}{9}u_{i,3}\right)u_{yy\,i,M}-6u_{yy\,i,M-1}=$$
$$\frac{1}{h_y}\left(\frac{26}{3}u_{y\,i,M}+6u_{y\,i,M-1}-3u_{y\,i,M-2}\right)+\frac{1}{h_y^2}\left(-\frac{403}{18}u_{i,M}+33u_{i,M-1}-\frac{21}{2}u_{i,M-2}-\frac{1}{9}u_{i,M-3}\right)。$$

3 数值实验

为验证本文格式的精确性和可靠性，考虑以下 3 个具有精确解的 Dirichlet 边值问题。

问题 1[13]：$u_{xx}+k^2u=-(4\pi^2-k^2)\sin(2\pi x),x\in[0,1]$（$k$ 为常数）。

精确解：$u(x)=\sin(2\pi x)$，

问题 2：$u_{xx}+k^2(x)u=[k^2(x)-2]\sin(x)\cos\left(x-\frac{1}{2}\right)-2\cos(x)\sin\left(x-\frac{1}{2}\right),x\in[0,2]$。

精确解：$u(x)=\sin(x)\cos\left(x-\frac{1}{2}\right)$

问题 3[11]：$u_{xx}+u_{yy}+[\cos(x)+e^y]u=[-13+\cos(x)+e^y]\sin(2x+3y),(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$。

精确解：$u(x,y)=\sin(2x+3y)$。

对以上 3 个问题的计算利用 FORTRAN 语言进行编程。对于一维问题，差分格式(9)所形成的线性方程组为三对角线型的，可采用追赶法进行求解。其中关于 u_x 和 u_{xx} 的计算，同样采用追赶法进行计算，即 u,u_x 和 u_{xx} 进行耦合迭代，直到计算收敛。对于二维问题，差分格式(16)所形成的线性方程组的矩阵为带状稀疏型的，本文采用稳定化的共轭梯度法 BICGSTab 进行计算，其中关于 u_x,u_y,u_{xx} 和 u_{yy} 的计算，所形成的线性方程组是三对角线型的，仍然可以采用追赶法进行计算，即 u，u_x,u_y,u_{xx} 和 u_{yy} 进行耦合迭代，直到计算收敛。对于一维和二维问题，判定迭代过程收敛的准则统一为 $\|u^{(n+1)}-u^{(n)}\|_\infty<\varepsilon(\varepsilon=10^{-14})$。计算结果分别给出了不同网格步长，波数 k 为常系数和变波数时的最大绝对误差 E 及收敛阶 R，分别定义如下。

对于一维和二维问题的最大绝对误差分别为：

$$E=\max_i|u_i-u(x_i)|;E=\max_{i,j}|u_{i,j}-u(x_i,y_j)|。$$

收敛阶为：$R=\dfrac{\ln\frac{E_1}{E_2}}{\ln\frac{h_1}{h_2}}$，其中，$u_i$，$u_{i,j}$ 为数值解，$u(x_i)$，$u(x_i,y_j)$ 为精确解。E_1 和 E_2 分别为网格步长为 h_1 和 h_2 时的最大绝对误差。

表 1 给出了问题 1 在不同的空间步长下,当波数 k 取不同值时的最大绝对误差以及收敛阶。由计算结果可以看出,当波数 k 的取值较小时格式能够达到六阶精度,波数 k 的取值增大时,本文格式精度随着网格步长的减小而下降,但最低仍具有三阶以上精度。

表 2 给出了问题 2 利用本文格式计算当波数 k 为变波数,分别取 $k(x)=\sqrt{2x}$, x, $\sqrt{\sin(x)}$ 时的最大绝对误差以及收敛阶,由计算结果可以看出本文格式达到了六阶以上精度。

表 3 针对问题 3 当波数为变波数时在不同的空间步长下,给出了采用四阶紧致格式及外推算法 RHOC[11] 以及本文格式数值计算结果的最大绝对误差以及收敛阶的比较。由计算结果可以看出,本文格式能达到六阶至七阶精度,并且本文格式的计算误差结果明显优于文献[11]中方法的计算结果。

表 1 问题 1 中本文格式(9)在波数 k 取不同值时的最大误差以及收敛阶

Tab. 1 Maximum error and convergence rate different k with the present scheme for Problem 1

h	$k=1$		$k=3$	
	E	R	E	R
1/20	1.128 3(−5)		1.213 0(−5)	
1/40	1.178 7(−7)	6.58	1.222 9(−7)	6.63
1/80	9.958 9(−10)	6.89	1.015 6(−9)	6.91
1/160	8.066 0(−12)	6.95	9.472 0(−12)	6.74

h	$k=5\times10^2$		$k=10^3$	
	E	R	E	R
1/20	1.358 7(−8)		3.398 4(−9)	
1/40	5.381 3(−10)	5.93	1.351 1(−10)	4.65
1/80	1.787 0(−11)	4.91	4.841 9(−12)	4.80
1/160	1.309 2(−12)	3.77	5.031 5(−13)	3.27

表 2 问题 2 中本文格式在波数为变波数时的最大误差以及收敛阶

Tab. 2 Maximum error and convergence rate with variable wave numbers with the present scheme for Problem 2

h	$k(x)=\sqrt{2x}$		$k(x)=x$		$k(x)=\sqrt{\sin(x)}$	
	E	R	E	R	E	R
1/8	5.562 7(−4)		2.540 6(−4)		1.610 1(−4)	
1/16	6.044 7(−6)	6.52	2.649 4(−6)	6.58	1.694 8(−6)	6.57
1/32	4.376 9(−8)	7.11	2.077 5(−8)	6.99	1.334 8(−8)	6.99
1/64	3.028 4(−10)	7.18	1.471 8(−10)	7.14	1.010 9(−10)	7.04
1/128	7.438 7(−13)	8.67	7.464 0(−13)	7.62	7.476 5(−13)	7.08

表 3 问题 3 中在 $k(x,y)=\sqrt{\cos(x)+e^y}$ 时的最大绝对误差以及收敛阶

Tab. 3 Maximum error and convergence rate when $k(x,y)=\sqrt{\cos(x)+e^y}$ for Problem 3

h	RHOC 格式[11]		本文格式(18)	
	E	R	E	R
1/16	8.70(−6)		3.95(−7)	
1/32	1.66(−7)	5.7	3.25(−9)	6.93
1/64	2.82(−9)	5.9	2.63(−11)	6.95
1/128	4.58(−11)	6.0	2.37(−13)	6.79

4 结论

本文针对一维和二维 Helmholtz 方程分别提出了一种六阶混合型紧致差分格式,格式涉及到未知函数及它的一阶和二阶导数、边界点的计算,本文均采用六阶精度的离散格式,因此格式总体上可以达到六阶精度。为了验证方法的精确性和可靠性,给出了数值实验。从数值计算结果可以看出,对于一维问题当波数 k 较小时,格式精度达到六阶精度;当波数 k 增大时,格式精度有所降低,但仍然能保持三阶以上精度。对于二维问题采用了文献中的算例进行计算,并与之进行比较,发现本文格式结果达到了六阶精度,并且比文献中的结果更加精确。

本文方法可以直接推广到三维情形,研究结果将另文报道。

参考文献:

[1] 陆金甫. 偏微分方程数值解法[M]. 北京:清华大学出版社,2004.
LU J F. Numerical methods for partial differentialequations [M]. Beijing:Tsinghua University Press,2004.

[2] BAYLISS A,GOLDSTEIN C I,TURKEL E. An iterative method for the Helmholtz equation [J]. Journal of Computational Physics,1983,49:443-457.

[3] BAYLISS A,GOLDSTEIN C I,TURKEL E. The numerical solution of the Helmholtz equation for wave propagation problems in underwater acoustics[J]. Applied Mathematics

and Computation,1985,11:655-665.

[4] SINGER I,TURKEL E. High-order finite difference methods for the Helmholtz equation[J]. Computer Methods in Applied Mechanics Engineering,1998,163:343-358.

[5] NABAVI M,SIDDIQUI K,DARGAHI J. A new 9-point sixth-order accurate compact finite-difference method for the Helmholtz equation[J]. Journal of Sound and Vibration,2007,307:972-998.

[6] 柯日焕,黎稳.用 CCD 法离散求解二维 Helmholtz 方程的数值方法[J].数值计算与计算机应用,2013,34(3):221-230.

KE R H,LI W. Numerical method for the two-dimensional Helmholtz equation discretized by CCD scheme[J]. Journal on Numerical Methods and Computer Application,2013,34(3):221-230.

[7] FU Y P. Compact fourth-order finite difference schemes for Helmholtz equation with high wave numbers[J]. Journal of Computational Mathematics,2008,26(1):98-111.

[8] WU T T. A dispersion minimizing compact finite difference scheme for the 2D Helmholtz equation[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2017,311:497-512.

[9] CHEN H X,QIU W F. A first system least squares method for the Helmholtz equation[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2017,309:145-162.

[10] ZHUANG Y,SUN X H. A high order ADI method for separable generalized Helmholtz equations[J]. Advances in Engineering Software,2000,31:585-591.

[11] 葛永斌,刘国涛.二维 Helmholtz 方程的高阶紧致差分方法[J].内蒙古大学学报(自然科学版),2010,41(2):176-180.

GE Y B,LIU G T. High-order compact difference scheme for solving two-dimensional Helmholtz equation[J]. Journal of Inner Mongolia University (Natural Science Edition),2010,41(2):176-180.

[12] 马廷福,葛永斌.三维 Helmholtz 方程的高阶紧致差分方法[J].河南科技大学学报(自然科学版),2012,33(1):84-87.

MA T F,GE Y B. High-order compact difference scheme for solving three dimensional Helmholtz equation[J]. Journal of Henan University of Science and Technology (Natural Science)2012,33(1):84-87.

[13] 孙晓峰,姜子文.一维 Helmholtz 方程的四阶紧致有限体积方法[J].山东师范大学学报(自然科学版),2016,31(4):7-11.

SUN X F,JIANG Z W. Fourth-order compact finite volume schemes for 1D Helmholtz equation[J]. Journal of Shangdong Normal University (Natural Science),2016,31(4):7-11.

[14] CHU P C, FAN C. A three-point combined compact difference scheme[J]. Journal of Computational Physics,1998,140:370-399.

[15] LELE S K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution[J]. Journal of Computational Physics,1992,103:16-42.

A High-order Compact Difference Method for Solving the Helmholtz Equation with Variable Wave Number

WANG Zhi, GE Yongbin

(School of Mathematics and Statistics, Ningxia University, Yinchuan 750021, China)

Abstract: [**Purposes**]The numerical calculation of Helmholtz equation for large wave number and variable wave number problem is a subject that needs further study. The numerical methods of Helmholtz equation has important theoretical value and practical significance. [**Methods**]With the help of the idea of combining the Talyor series expansions and blended compact difference, for the one-dimensional and two-dimensional Helmholtz equations, a sixth-order compact difference method is proposed. The scheme involves the values of unknown functions and their first and second derivatives. In order to ensure the global accuracy of the present scheme, the sixth-order compact difference schemes are also used for the computation of the first and second derivatives. [**Findings**]The scheme has the sixth order accuracy in the case of small wave number and variable wave number, and it can still keep the accuracy above the third order in the case of large wave number. [**Conclusions**]Numerical experiments are given to show the efficiency and dependability of the present scheme.

Keywords: Helmholtz equation with variable wave number; blended type; high accuracy; compact scheme; finite difference method

(责任编辑 许 甲)