2019 年 11 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Nov. 2019
第 36 卷 第 6 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 36 No. 6

运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20190611

加工时间与位置相关的最小化最大完工时间两人合作排序博弈*

刘 鹏, 王小丽
(沈阳工业大学 管理学院, 沈阳 110870)

摘要:【目的】针对加工时间与加工位置相关的两人合作排序博弈问题开展研究。【方法】工件加工时间与加工位置相关可以描述为工件加工时间随着加工序列中工件加工位置的改变而呈现出递增或递减的函数变化。两个人必须合作加工一批工件,两人各自都有一台机器可用于加工这批工件,且他们的加工成本定义为各自的最小完工时间。目标是使得他们的合作收益最大化,为了使这两个人的合作总收益最大化,需对这批工件进行一个划分,把工件分配给两台机器。【结果】提出了该问题有正整数解的充分必要条件。【结论】证明了该问题是多项式可解的。

关键词:排序;合作博弈;老化效应;学习效应
中图分类号:O221.7 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2019)06-0008-07

实际生产加工过程中,往往存在一个人不能单独完成一个项目,而需要两个人合作才能完成的情况。每个人都有一台机器可用于加工这个项目里的所有工件,需要找到这批工件的一个合理的划分,以达成一个合理的利润分配方案。在许多实际排序背景中,工件的加工时间可能与该工件在加工序列中的实际加工位置有关,这种现象被称为"老化效应"或"学习效应"。老化效应即工件的实际加工时间与工件的实际加工位置呈递增的变化趋势,而学习效应则与之相反,工件的实际加工时间与工件的实际加工位置呈递减的变化趋势。在现有文献中,极少研究带有老化效应或学习效应的两人合作排序博弈问题,然而这种现象在现实调度环境中经常出现,因此具有研究价值。

近些年来,工件加工时间与位置相关的排序问题也越来越多地受到关注。Bachman 等人[1]研究了一些单机排序问题,其中工件加工时间是与位置相关的递增或递减函数,分别为老化效应和学习效应。Choi[2]研究了具有工件相关老化效应的最小化总加权完工时间的双代理排序问题。Kim 等人[3]考虑了具有老化效应和延误的基于加工时间和的双代理单价排序问题。刘春来等人[4]研究了具有退化工件和老化效应的单机可拒绝排序问题。Cheng 等人[5]分析了具有批相关老化效应和可变维修活动的单机排序问题。刘春来等人[6]研究了具有学习效应的平行机排序问题。Shiau 等人[7]研究了具有学习效应的最小化总完工时间的双代理两机流水车间排序问题。Wu 等人[8]给出了具有基于加工时间和的学习效应的双代理排序问题的一个组合方法。闫萍等人[9]研究了带准备时间的单机指数时间学习效应排序问题。郭苗苗等人[10]研究了具有学习效应和加工时间可控的平行机排序问题。Liu 等人[11]研究了具有学习效应和迟后的双代理排序问题的分支定界算法。本文所研究的模型与上述研究的模型的主要区别在于,本文将合作博弈引入到具有老化效应或学习效应的排序模型之中。

关于排序博弈问题的研究,唐国春等人[12]对排序博弈进行了综述,给出了排序博弈的分类进展和展望。金霁等人[13]研究了加工工件都相同的情况下,由最小的最大完工时间作为加工成本的两人合作博弈问题。窦文卿等人[14]研究在相同工件的情况下,以最小化总完工时间作为加工成本的两人合作博弈问题,给出了此问题的纳什博弈解。Gu 等人[15]研究了以最小化最大延误作为加工成本的两人合作博弈问题。Liu 等人[16]以最小化加权误工任务数作为加工成本的两人合作博弈问题。Liu 等人[17]研究了具有可变加工时间和共同工期的以最小化最大延误作为加工成本的两人合作博弈问题。以上提到的关于合作博弈的排序文献都不曾考虑老化效应或学习效应相关的排序问题。

* **收稿日期:**2019-09-03 **修回日期:**2019-10-23 **网络出版时间:**2019-11-25 10:34
资助项目:国家自然科学基金(No. 71001074);辽宁省社会科学规划基金重点项目(No. L15AGL013);辽宁省教育厅科研项目(No. WJGD2019002);辽宁省自然科学基金(No. 201602545)
第一作者简介:刘鹏,男,教授,博士生导师,研究方向为生产调度、物流优化,E-mail:liup7802@163.com
网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20191125.1034.022.html

本文其他章节组织如下：文章第一部分对本文要提出的问题进行描述，第二和第三部分结合老化效应和学习效应对两人合作排序博弈问题分别进行讨论，第四部分则是对文章进行总结。

1 问题描述

对于具有老化效应或学习效应的最小化最大完工时间的两人合作排序博弈问题的描述如下。设有工件集 $J=\{J_1,J_2,\cdots,J_n\}$，所有工件在“0”时刻开始加工，每个工件只能被加工一次且在加工过程中没有中断。假设有两个人，每个人都拥有一台机器可用于加工工件，两个人合作竞争加工这 n 个工件。工件 J_j 的加工时间 p_j 是关于工件加工位置 r 的函数。本文研究具有老化效应或学习效应的两个排序模型，即为：1) 老化效应，$p_j=P_0+ar$；2) 学习效应，$p_j=P_0-ar$。其中：$j=1,2,\cdots,n,r=1,2,\cdots,n,P_0$ 代表工件的正常加工时间，$a>0$ 表示模型 1)中的老化效率和模型 2)中的学习效率。由于工件的加工时间恒为正，所以假设在学习效应模型中有 $a<\frac{P_0}{n}$成立。

在两人合作博弈模型中，用 C_j 来表示工件 J_j 的完工时间。如果用 X_1 和 X_2 分别表示两个人各自所承担的工件的集合，则有 $X_1\cup X_2=J,X_1\cap X_2=\varnothing$。对于第 i 人($i=1,2$)，单位时间每加工一个工件将获得 $b_i(i=1,2)$ 单位的收益。工件的加工成本用工件的最小化最大完工时间 $\min C^i_{\max}=\min\max\{C_j\mid j\in X_i\}$ 来表示，那么第 i 人($i=1,2$)的收益函数可以定义为 $u_i=b_i\sum_{j\in X_i}p_j-\min C^i_{\max}$。如果两个人不能达成协议，那么第 i 人独自获得收益 $e_i,e_i\geqslant 0(i=1,2)$。因此，第 i 人($i=1,2$)的合作收益可以表示为 $v_i=u_i(X_i)-e_i=b_i\sum_{j\in X_i}p_j-\min C^i_{\max}-e_i$。两个人的总收益用 v_1 和 v_2 的乘积来表示，目标就是使两个人总收益的乘积达到最大。

利用三元组表示法来描述模型，具有老化效应两人合作博弈模型表示为 $G2\mid p_j=P_0+ar\mid v_1v_2/C_{\max}$具有学习效应的两个合作博弈模型表示为 $G2\mid p_j=P_0-ar\mid v_1v_2/C_{\max}$。第 1 个域 $G2$ 表示两人合作博弈且每个人都有一台机器；第 2 个域描述的是工件的特征，即工件加工时间的结构特点。第 3 个域表示要优化的目标函数，即以最小的最大完工时间作为加工成本使得两个人的合作收益函数的乘积为最大。

2 具有老化效应的两人合作排序博弈问题 $G2\mid p_j=P_0+ar\mid v_1v_2/C_{\max}$

本节考虑工件加工时间为老化效应 $p_j=P_0+ar$ 时，以最小的最大完工时间作为加工成本使得两个人的合作收益函数的乘积为最大的两人合作排序博弈问题 $G2\mid p_j=P_0+ar\mid v_1v_2/C_{\max}$。对于工件集 $J=\{J_1,J_2,\cdots,J_n\}$，需要将工件集 J 划分为两个互不相交的子集 X_1 和 X_2，使第 1 人所承担的工件集合 X_1 中所含的工件个数为 k，第 2 人所承担的工件集合 X_2 中所含的工件个数为 $n-k$，其中 $1\leqslant k\leqslant n-1$。

接下来通过归纳法推导出在 X_1 内加工完第 k 个位置工件的时间为 $C_k=kP_0+\frac{k(k+1)}{2}a$。

1) $C_1=p_1=P_0+a,C_2=C_1+p_2=(P_0+a)+(P_0+2a)=2P_0+\frac{2\times(1+2)}{2}a$。

2) 假设工件 J_j 的完工时间为 $C_j=jP_0+\frac{j(j+1)}{2}a$，则有工件 J_{j+1}的完工时间为：

$$C_{j+1}=C_j+p_{j+1}=jP_0+\frac{j(j+1)}{2}a+(P_0+a(j+1))=(j+1)P_0+\frac{(j+1)(j+2)}{2}a。$$

因此，证明了 $C_k=kP_0+\frac{k(k+1)}{2}a$。可以看出对任意的工件加工顺序，这是一个固定的常数。

同理，第 2 人所承担的工件集合 X_2 加工完第 n 个位置工件的时间为 $C_n=(n-k)P_0+\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}a$。

第 2 人所承担的工件集合的完工时间可由如下推导：

$$C_{k+1}=p_{k+1}=P_0+a,$$
$$C_{k+2}=C_{k+1}+p_{k+2}=2P_0+(1+2)a,$$
$$\cdots\cdots$$
$$C_n=(n-k)P_0+(1+2+\cdots+n-k)a=(n-k)P_0+\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}a。$$

同样,对任意的工件加工顺序,这也是一个固定的常数。

因为 $C_k=kP_0+\frac{k(k+1)}{2}a$ 和 $C_n=(n-k)P_0+\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}a$ 都是固定的常数,所以收益函数 u_i 与 X_i 内工件的加工次序无关,仅与 X_i 内工件个数有关,从而划分工件集 J 时只需考虑给每个人分配多少个工件。

第1人和第2人的收益函数分别为:

$$u_1=b_1\sum_{j\in X_1}p_j-\min C_{\max}^1=b_1\sum_{j\in X_1}p_j-C_{\max}^1=b_1\sum_{j\in X_1}p_j-\sum_{j\in X_1}p_j=(b_1-1)\sum_{j\in X_1}p_j=$$

$$(b_1-1)C_k=(b_1-1)\left[kP_0+\frac{k(k+1)}{2}a\right]=\frac{b_1-1}{2}[2kP_0+k(k+1)a],$$

$$u_2=(b_2-1)\sum_{j\in X_2}p_j=(b_2-1)C_n=(b_2-1)\left[(n-k)P_0+\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}a\right]=$$

$$\frac{b_2-1}{2}[2(n-k)P_0+(n-k)(n-k+1)a]。$$

且收益函数必为正,所以有 $b_i>1(i=1,2)$。

因此第1人和第2人的合作收益函数分别可描述为关于正整数 k 的如下形式:

$$v_1=u_1(X_1)-e_1=u_1(k)-e_1=\frac{b_1-1}{2}[2kP_0+k(k+1)a]-e_1=\frac{b_1-1}{2}[2kP_0+k(k+1)a-A]=$$

$$\frac{a(b_1-1)}{2}\left[k^2+\left(\frac{2P_0}{a}+1\right)k-\frac{A}{a}\right],$$

$$v_2=u_2(k)-e_2=\frac{b_2-1}{2}[2(n-k)P_0+(n-k)(n-k+1)a-B]=$$

$$\frac{a(b_2-1)}{2}\left[k^2-\left(\frac{2P_0}{a}+2n+1\right)k+\left(n^2+\frac{2nP_0}{a}+n-\frac{B}{a}\right)\right],$$

其中:$A=\frac{2e_1}{b_1-1}$,$B=\frac{2e_2}{b_2-1}$。

在上述 v_1 中的 $\Delta_1=\frac{4A}{a}+\left(\frac{2P_0}{a}+1\right)^2$ 和 v_2 中的 $\Delta_2=\frac{4B}{a}+\left(\frac{2P_0}{a}+1\right)^2$,从而只考虑以下的情况:

$$\Delta_i\geqslant0,e_i\geqslant0,b_i>1(i=1,2),a>0,1\leqslant k\leqslant n-1。\tag{1}$$

在 $\Delta_i\geqslant0$ 的情况下,v_1v_2 可以表示成如下形式:

$$v_1v_2=\frac{a^2(b_1-1)(b_2-1)}{4}(k-\alpha_1)(k-\alpha_2)(k-\alpha_3)(k-\alpha_4),\tag{2}$$

其中:$\alpha_1=-\left(\frac{P_0}{a}+\frac{1}{2}\right)-\sqrt{\frac{A}{a}+\left(\frac{P_0}{a}+\frac{1}{2}\right)^2}$,$\alpha_2=-\left(\frac{P_0}{a}+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\frac{A}{a}+\left(\frac{P_0}{a}+\frac{1}{2}\right)^2}$,$\alpha_3=n+\frac{1}{2}+\frac{P_0}{a}-\sqrt{\frac{B}{a}+\left(\frac{P_0}{a}+\frac{1}{2}\right)^2}$,$\alpha_4=n+\frac{1}{2}+\frac{P_0}{a}+\sqrt{\frac{B}{a}+\left(\frac{P_0}{a}+\frac{1}{2}\right)^2}$。

引理1 问题 $G2|p_j=P_0+ar|v_1v_2/C_{\max}$ 有正整数解 k 的充要条件是:

$$\beta_l\leqslant\beta_m,\tag{3}$$

其中:$\beta_l=\lfloor\alpha_2\rfloor+1$,$\beta_m=\lceil\alpha_3\rceil-1$。

证明 若问题有解,则两人合作收益函数 v_1 和 v_2 必须大于0,即存在 $k(k\in\{1,2,\cdots,n-1\})$ 使得 $v_i(k)>0$,$i=1,2$。

由于 $v_1>0$,所以可以得到 $k^2+\left(\frac{2P_0}{a}+1\right)k-\frac{A}{a}>0$,即 $k<-\left(\frac{P_0}{a}+\frac{1}{2}\right)-\sqrt{\frac{A}{a}+\left(\frac{P_0}{a}+\frac{1}{2}\right)^2}$ 或 $k>\sqrt{\frac{A}{a}+\left(\frac{P_0}{a}+\frac{1}{2}\right)^2}-\left(\frac{P_0}{a}+\frac{1}{2}\right)$。所以,可得 $k<\alpha_1$ 或 $k>\alpha_2$。

同理,可由 $v_2>0$ 得 $k^2-\left(\frac{2P_0}{a}+2n+1\right)k+\left(n^2+\frac{2nP_0}{a}+n-\frac{B}{a}\right)>0$,即:

$$k<n+\frac{1}{2}+\frac{P_0}{a}-\sqrt{\frac{B}{a}+\left(\frac{P_0}{a}+\frac{1}{2}\right)^2}\text{ 或 }k>n+\frac{1}{2}+\frac{P_0}{a}+\sqrt{\frac{B}{a}+\left(\frac{P_0}{a}+\frac{1}{2}\right)^2},$$

因此 $k<\alpha_3$ 或 $k>\alpha_4$。

因为 $\alpha_1<0,\alpha_4>n$，所以就有 $\alpha_2<k<\alpha_3$。因为两人要合作，所以 $1\leqslant k\leqslant n-1$，可得 $k\in(\alpha_2,\alpha_3)\cap[1,n-1]$。因为 k 是整数，所以令 $\beta_l=\lfloor\alpha_2\rfloor+1,\beta_m=\lceil\alpha_3\rceil-1$。

由 $\alpha_2=-\left(\frac{P_0}{a}+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\frac{A}{a}+\left(\frac{P_0}{a}+\frac{1}{2}\right)^2}$ 与 $\alpha_3=n+\frac{1}{2}+\frac{P_0}{a}-\sqrt{\frac{B}{a}+\left(\frac{P_0}{a}+\frac{1}{2}\right)^2}$ 可知 $0<\alpha_2<n-1,1\leqslant\alpha_3<n$，$n\geqslant2,\alpha_2<\alpha_3$，所以 $1\leqslant\beta_l\leqslant n-1,1\leqslant\beta_m\leqslant n-1$。

问题 $G2\,|\,p_j=P_0+ar\,|\,v_1v_2/C_{\max}$ 有解等价于闭区间 $[\beta_l,\beta_m]$ 至少有一个正整数 k，即 $\beta_l\leqslant\beta_m$。因此，问题 $G2\,|\,p_j=P_0+ar\,|\,v_1v_2/C_{\max}$ 有一个正整数解 k 的充要条件是 $\beta_l\leqslant\beta_m$。　证毕

设 $v_1(x)\cdot v_2(x)$ 是关于 x 的四次多项式，且表达式为：

$$v_1(x)\cdot v_2(x)=\frac{a^2(b_1-1)(b_2-1)}{4}(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)。$$

则 $[v_1(x)\cdot v_2(x)]'=0$ 是关于 x 的三次多项式，所以 $[v_1(x)\cdot v_2(x)]'=0$ 有 3 个根，可分别设为 ψ_1,ψ_2,ψ_3，且有 $\psi_1<\psi_2<\psi_3$，则 ψ_1,ψ_2,ψ_3 是 $v_1(x)\cdot v_2(x)$ 的 3 个极值点，且 ψ_2 是 $v_1(x)\cdot v_2(x)$ 唯一的极大值点。若 $\psi_2\in[\beta_l,\beta_m]$，则可得到 ψ_2 是 $v_1(x)\cdot v_2(x)$ 在 $[\beta_l,\beta_m]$ 区间上的唯一极值点，也是最大值点。

引理 2　在(1)，(3)式成立的条件下，问题 $G2\,|\,p_j=P_0+ar\,|\,v_1v_2/C_{\max}$ 的最优解一定在闭区间 $[\beta_l,\beta_m]$ 上。

证明　在满足(1)，(3)式的情况下，根据(2)式可知 $[v_1((k)\cdot v_2(k)]'=0$ 有 3 个根，可设为 ψ_1,ψ_2,ψ_3，且它们的关系为 $\psi_1<\psi_2<\psi_3$。则 ψ_1,ψ_2,ψ_3 是 $v_1(k)\cdot v_2(k)$ 的 3 个极值点且有 $\beta_l\leqslant\psi_2\leqslant\beta_m$。因为(2)式关于 k 的四次多项式系数为正，所以 $[v_1(k)\cdot v_2(k)]'$ 的三次多项式的系数也是正值，根据多项式函数可知 ψ_2 是 $v_1(k)\cdot v_2(k)$ 的唯一极大值点也是最大值点。所以问题 $G2\,|\,p_j=P_0+ar\,|\,v_1v_2/C_{\max}$ 的最优解一定在闭区间 $[\beta_l,\beta_m]$ 上。　证毕

由引理 1 和引理 2，可以得出下面的定理 1。

定理 1　在(3)式成立时，问题 $G2\,|\,p_j=P_0+ar\,|\,v_1v_2/C_{\max}$ 存在一个最优解 k^*，且 $k^*=\lfloor\psi_2\rfloor$ 或 $k^*=\lceil\psi_2\rceil$。最优解 k^* 具体如下：

1) 若 $\lceil\psi_2\rceil\in[\beta_l,\beta_m]$ 且 $\lfloor\psi_2\rfloor\notin[\beta_l,\beta_m]$，则 $k^*=\lceil\psi_2\rceil$；

2) 若 $\lfloor\psi_2\rfloor\in[\beta_l,\beta_m]$ 且 $\lceil\psi_2\rceil\notin[\beta_l,\beta_m]$，则 $k^*=\lfloor\psi_2\rfloor$；

3) 若 $\lceil\psi_2\rceil\in[\beta_l,\beta_m]$ 且 $\lfloor\psi_2\rfloor\in[\beta_l,\beta_m]$，则有：i) 当 $v_1(\lfloor\psi_2\rfloor)\cdot v_2(\lfloor\psi_2\rfloor)\leqslant v_1(\lceil\psi_2\rceil)\cdot v_2(\lceil\psi_2\rceil)$ 时，$k^*=\lceil\psi_2\rceil$；ii) 当 $v_1(\lfloor\psi_2\rfloor)\cdot v_2(\lfloor\psi_2\rfloor)\geqslant v_1(\lceil\psi_2\rceil)\cdot v_2(\lceil\psi_2\rceil)$ 时，$k^*=\lfloor\psi_2\rfloor$。

3 具有学习效应的两人合作排序博弈问题 $G2\,|\,p_j=P_0-ar\,|\,v_1v_2/C_{\max}$

本节考虑工件加工时间为学习效应 $p_j=P_0-ar\left(0<a<\frac{P_0}{n}\right)$ 时，以最小的最大完工时间作为加工成本使得两个人的合作收益函数的乘积为最大的两人合作排序博弈问题 $G2\,|\,p_j=P_0-ar\,|\,v_1v_2/C_{\max}$。

对于该问题，可与前面类似得到：

$C_k=kP_0-(1+2+\cdots+k)a=kP_0-\frac{k(k+1)}{2}a$，对任意的工件加工顺序，这是一个固定的常数；

$C_n=(n-k)P_0-(1+2+\cdots+n-k)a=(n-k)P_0-\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}a$，对任意的工件加工顺序，这也是一个固定的常数。

因为 $C_k=kP_0-\frac{k(k+1)}{2}a$ 和 $C_n=(n-k)P_0-\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}a$ 都是固定的常数，所以收益函数 u_i 与 X_i 内工件的加工次序无关，仅与 X_i 内工件个数有关。从而划分工件集 J 时只需考虑给每个人分配多少个工件。

两人的收益函数为：$u_1=\frac{b_1-1}{2}[2kP_0-k(k+1)a]$，$u_2=\frac{b_2-1}{2}[2(n-k)P_0-(n-k)(n-k+1)a]$。因为收益函数为正，所以 $b_i>1(i=1,2)$。

两个人的合作收益函数分别为：

$$v_1=\frac{b_1-1}{2}[2kP_0-k(k+1)a-A]=\frac{a(1-b_1)}{2}\left[k^2-\left(\frac{2P_0}{a}-1\right)k+\frac{A}{a}\right]=$$

$$\frac{a(1-b_1)}{2}\left[\left(k-\left(\left(\frac{P_0}{a}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2P_0}{a}-1\right)^2-\frac{4A}{a}}\right)\right)\left(k-\left(\left(\frac{P_0}{a}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2P_0}{a}-1\right)^2-\frac{4A}{a}}\right)\right)\right],$$

$$v_2=\frac{b_2-1}{2}[2(n-k)P_0-(n-k)(n-k+1)a-B]=\frac{a(1-b_2)}{2}\left[k^2-\left(2n+1-\frac{2P_0}{a}\right)k+\left(n^2+n-\frac{2nP_0}{a}+\frac{B}{a}\right)\right]=$$

$$\frac{a(1-b_2)}{2}\left[k-\left(n+\frac{1}{2}-\frac{P_0}{a}-\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2P_0}{a}-1\right)^2-\frac{4B}{a}}\right)\right]\left[k-\left(n+\frac{1}{2}-\frac{P_0}{a}+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2P_0}{a}-1\right)^2-\frac{4B}{a}}\right)\right],$$

其中：$A=\frac{2e_1}{b_1-1}$，$B=\frac{2e_2}{b_2-1}$。

在上述 v_1 中的 $\Delta_1=\left(\frac{2P_0}{a}-1\right)^2-\frac{4A}{a}$ 和 v_2 中的 $\Delta_2=\left(\frac{2P_0}{a}-1\right)^2-\frac{4B}{a}$，当 $\Delta_i<0$ 时，v_1 和 v_2 没有意义。因此本节只研究以下情况：

$$\Delta_i\geqslant 0,e_i\geqslant 0,b_i>1(i=1,2),0<a<\frac{P_0}{n},1\leqslant k\leqslant n-1。\tag{4}$$

在满足 $\Delta_i\geqslant 0$ 条件下，v_1v_2 可表示为如下的形式：

$$v_1v_2=\frac{a^2(b_1-1)(b_2-1)}{4}(k-\gamma_1))(k-\gamma_2)(k-\gamma_3)(k-\gamma_4),\tag{5}$$

其中：$\gamma_1=\left(\frac{P_0}{a}-\frac{1}{2}\right)-\sqrt{\left(\frac{P_0}{a}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{A}{a}}$，$\gamma_2=\left(\frac{P_0}{a}-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(\frac{P_0}{a}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{A}{a}}$，$\gamma_3=n+\frac{1}{2}-\frac{P_0}{a}-\sqrt{\left(\frac{P_0}{a}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{B}{a}}$，$\gamma_4=n+\frac{1}{2}-\frac{P_0}{a}+\sqrt{\left(\frac{P_0}{a}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{B}{a}}$。

为了下文叙述方便，令 $\gamma_5=\frac{P_0}{a}-\frac{1}{2}$，$\gamma_6=n+\frac{1}{2}-\frac{P_0}{2a}$。

引理 3 问题 $G2|p_j=P_0-ar|v_1v_2/C_{\max}$ 有正整数解 k 的充要条件是：

$$\eta_l\leqslant\eta_m,\tag{6}$$

其中：$\eta_l=\max\{\eta_{l1},\eta_{l2}\}$，$\eta_{l1}=\lfloor\gamma_1\rfloor+1$，$\eta_{l2}=\lfloor\gamma_6\rfloor+1$，$\eta_m=\min\{\eta_{m1},\eta_{m2}\}$，$\eta_{m1}=\lceil\gamma_5\rceil-1$，$\eta_{m2}=\lceil\gamma_4\rceil-1$。

证明 若问题有解，则两人合作收益函数 v_1 和 v_2 必须大于0，即存在 $k(k\in\{1,2,\cdots,n-1\})$ 使得 $v_i(k)>0$，$i=1,2$。

由 $v_1>0$ 可得 $k^2-\left(\frac{2P_0}{a}-1\right)k+\frac{A}{a}<0$，即：

$$\left(\frac{P_0}{a}-\frac{1}{2}\right)-\sqrt{\left(\frac{P_0}{a}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{A}{a}}<k<\left(\frac{P_0}{a}-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(\frac{P_0}{a}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{A}{a}},$$

则有 $\gamma_1<k<\gamma_2$。

因为 $0<a<\frac{P_0}{n}$ 和 $1\leqslant k\leqslant n-1$，所以 $k<\frac{P_0}{a}-1<\frac{P_0}{a}-\frac{1}{2}$，则有 $k<\gamma_5$。又因为 $\gamma_5<\gamma_2$，因此 $\frac{P_0}{a}-\frac{1}{2}-\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{P_0}{a}\right)^2-\frac{A}{a}}<k<\frac{P_0}{a}-\frac{1}{2}$，即有 $\gamma_1<k<\gamma_5$。

同理由 $v_2>0$ 可得 $k^2-\left(2n+1-\frac{2P_0}{a}\right)k+\left(n^2+n-\frac{2nP_0}{a}+\frac{B}{a}\right)<0$，即 $n+\frac{1}{2}-\frac{P_0}{a}-\sqrt{\left(\frac{P_0}{a}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{B}{a}}<k<n+\frac{1}{2}-\frac{P_0}{a}+\sqrt{\left(\frac{P_0}{a}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{B}{a}}$，所以 $\gamma_3<k<\gamma_4$。

因为 $1\leqslant k\leqslant n-1$ 且 $n<\frac{P_0}{a}$，可知 $k+\frac{P_0}{a}-n-\frac{1}{2}>0$，即有 $\gamma_6<k$。又因为 $\gamma_3<\gamma_6$，可得 $\gamma_6<k<\gamma_4$。从而有 $\gamma_1<k<\gamma_5$ 且 $\gamma_6<k<\gamma_4$ 成立。

因为 $1\leqslant k\leqslant n-1$ 且 k 是整数，所以令 $\eta_{l1}=\lfloor\gamma_1\rfloor+1$，$\eta_{l2}=\lfloor\gamma_6\rfloor+1$，$\eta_{m1}=\lceil\gamma_5\rceil-1$，$\eta_{m2}=\lceil\gamma_4\rceil-1$，$\eta_l=\max\{\eta_{l1},\eta_{l2}\}$，$\eta_m=\min\{\eta_{m1},\eta_{m2}\}$。由 $\gamma_1,\gamma_4,\gamma_5,\gamma_6$ 的表达式可知 $0\leqslant\gamma_1<n-1$，$1\leqslant\gamma_4<n$，$1\leqslant\gamma_5<n$，$1\leqslant\gamma_6<n$，$n\geqslant 2$，所以 $1\leqslant\eta_l\leqslant n-1$，$1\leqslant\eta_m\leqslant n-1$。

故问题 $G2|p_j=P_0-ar|v_1v_2/C_{\max}$ 有正整数解 k 的充要条件是 $\eta_l\leqslant\eta_m$。 证毕

引理 4　在(4)，(6)式成立的条件下，问题 $G2|p_j=P_0-ar|v_1v_2/C_{\max}$ 的最优解一定在闭区间 $[\eta_l,\eta_m]$ 上。

此引理的证明过程类似于引理 2 的证明过程。

下面给出定理 2，它类似于定理 1。如果 $\lambda_2\in[\eta_l,\eta_m]$，那么得到 λ_2 是 $v_1(x)\cdot v_2(x)$ 在闭区间 $[\eta_l,\eta_m]$ 上唯一的极值点且也是 $v_1(x)\cdot v_2(x)$ 的最大值点。

定理 2　在(6)式成立时，问题 $G2|p_j=P_0-ar|v_1v_2/C_{\max}$ 的最优解 k^* 存在，且 $k^*=\lfloor\lambda_2\rfloor$ 或 $k^*=\lceil\lambda_2\rceil$。最优解 k^* 具体如下：

1）若 $\lceil\lambda_2\rceil\in[\eta_l,\eta_m]$ 且 $\lfloor\lambda_2\rfloor\notin[\eta_l,\eta_m]$，则 $k^*=\lceil\lambda_2\rceil$；

2）若 $\lfloor\lambda_2\rfloor\in[\eta_l,\eta_m]$ 且 $\lceil\lambda_2\rceil\notin[\eta_l,\eta_m]$，则 $k^*=\lfloor\lambda_2\rfloor$；

3）若 $\lceil\lambda_2\rceil\in[\eta_l,\eta_m]$ 且 $\lfloor\lambda_2\rfloor\in[\eta_l,\eta_m]$，则：i）当 $v_1(\lfloor\lambda_2\rfloor)\cdot v_2(\lfloor\lambda_2\rfloor)\leqslant v_1(\lceil\lambda_2\rceil)\cdot v_2(\lceil\lambda_2\rceil)$ 时，$k^*=\lceil\lambda_2\rceil$；ii）当 $v_1(\lfloor\lambda_2\rfloor)\cdot v_2(\lfloor\lambda_2\rfloor)\geqslant v_1(\lceil\lambda_2\rceil)\cdot v_2(\lceil\lambda_2\rceil)$ 时，$k^*=\lfloor\lambda_2\rfloor$。

4 结论

本文将老化效应和学习效应引入到排序博弈问题中，两个人共同合作竞争加工一批工件，目标函数是这两个人的合作收益乘积的最大值。文中证明了具有老化效应的问题 $G2|p_j=P_0+ar|v_1v_2/C_{\max}$ 和具有学习效应的问题 $G2|p_j=P_0-ar|v_1v_2/C_{\max}$ 都是多项式可解的，并给出了问题的一些性质以及问题有正整数解的充要条件。

通过本文的研究，还可以找到其他几个可以继续深入研究的方向。其中一个研究方向是可以进一步探讨其他的目标函数，例如最小化最大延误、加权总完工时间、加权总延误，等等。

参考文献：

[1] BACHMAN A, JANIAK A. Scheduling jobs with position-dependent processing times[J]. Journal of the Operational Research Society, 2004, 55: 257-264.

[2] CHOI J Y. Minimizing total weighted completion time under makespan constraint for two-agent scheduling with job-dependent aging effects[J]. Computers & Industrial Engineering, 2015, 83: 237-243.

[3] KIM D G, CHOI J Y. Sum-of-processing-times-based two-agent single-machine scheduling with aging effects and tardiness[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2015: 768148.

[4] 刘春来，王建军. 具有退化工件和老化效应的单机可拒绝排序问题[J]. 运筹与管理，2017，26(6)：95-101.
LIU C L, WANG J J. Single-machine scheduling with deteriorating jobs, aging effect and rejection[J]. Operations Research and Management Science, 2017, 26(6): 95-101.

[5] CHENG M B, XIAO S X, LUO R F, et al. Single-machine scheduling problems with a batch-dependent aging effects and variable maintenance activities[J]. International Journal of Production Research, 2018, 56(23): 7051-7063.

[6] 刘春来，王建军，赵传立. 具有学习效应的平行机排序问题[J]. 系统管理学报，2014，23(1)：144-148.
LIU C L, WANG J J, ZHAO C L. Parallel machine scheduling with learning effects[J]. Journal of Systems & Management, 2014, 23(1): 144-148.

[7] SHIAU Y R, TSAI M S, LEE W C, et al. Two-agent two-machine flowshop scheduling with learning effects to minimize the total completion time[J]. Computers & Industrial Engineering, 2015, 87: 580-589.

[8] WU W H, YIN Y Q, CHENG T C E, et al. A combined approach for two-agent scheduling with sum-of-processing-times-based learning effect[J]. Journal of the Operational Research Society, 2017, 68(2): 111-120.

[9] 闫萍，王吉波，赵礼强. 带准备时间的单机指数时间学习效应排序问题[J]. 运筹与管理，2017，26(11)：70-75.
YAN P, WANG J B, ZHAO L Q. Single-machine exponentially time-dependent learning effect scheduling problem with release time[J]. Operations Research and Management Science, 2017, 26(11): 70-75.

[10] 郭苗苗，刘桓，王吉波，等. 具有学习效应和加工时间可控的平行机排序问题[J]. 运筹与管理，2018，27(3)：113-117.
GUO M M, LIU H, WANG J B, et al. Parallel machines scheduling with learning effect and controllable processing time[J]. Operations Research and Management Science, 2018, 27(3): 113-117.

[11] LIU S C, DUAN J H, LIN W C, et al. Branch-and-bound algorithm for two-agent Scheduling with learning effect and late work criterion[J]. Asia-Pacific Journal of Operational Research, 2018, 35(5): 1850037.

[12] 唐国春，樊保强，刘丽丽. 排序博弈的分类、进展和展望[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2014，31(1)：6-14.
TANG G C, FAN B Q, LIU L L. Classifications, advances and prospects of scheduling games[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2014, 31(1): 6-14.

[13] 金霁,顾燕红,唐国春.最大完工时间排序的两人合作博弈[J].上海第二工业大学学报,2011,28(1):14-17.
JIN J,GU Y H,TANG G C. Two-person cooperative games on makespan scheduling[J]. Journal of Shanghai Second Polytechnic University,2011,28(1):14-17.

[14] 窦文卿,顾燕红,唐国春.总完工时间排序两人合作博弈的纳什博弈解[J].重庆师范大学学报(自然科学版),2012,29(5):1-5.
DOU W Q,GU Y H,TANG G C. The Nash bargaining solution(s) of two-person cooperative games on total completion time scheduling[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science),2012,29(5):1-5.

[15] GU Y H,FAN J,TANG G C,et al. Maximun latency scheduling problem on two-person cooperative games[J]. Journal of Combinatorial Optimization,2013,26(1):71-81.

[16] LIU L L,TANG G C,FAN B Q,et al. Two-person cooperative games on scheduling problems in outpatient pharmacy dispensing process[J]. Journal of Combinatorial Optimization,2015,30:938-948.

[17] LIU P,WANG X L. Maximum lateness scheduling on two-person cooperative games with variable processing times and common due date[J]. Journal of Optimization,2017,2017:7150637.

Operations Research and Cybernetics

Makespan Scheduling on Two-Person Cooperative Games with Position-Dependent Processing Times

LIU Peng, WANG Xiaoli

(School of Management, Shenyang University of Technology, Shenyang 110870, China)

Abstract: [**Purposes**]Two-person cooperative games on scheduling problem with position-dependent processing times are considered. [**Methods**]The job position-dependent processing time is described by an increasing or a decreasing function dependent on the position of a job in the sequence. Two persons have to cooperate in order to process a set of jobs. Each of them has a single machine and his processing cost is defined as the minimum value of makespan. The objective is to maximize the multiplication of their rational positive cooperative profits. A division of those jobs should be negotiated to yield a reasonable cooperative profit allocation scheme acceptable to them. [**Findings**]The sufficient and necessary conditions for the problems of positive integer solution are proposed. [**Conclusions**] It is shown that the problem is polynomial-time solvable.

Keywords: scheduling;cooperative games;aging effect;learning effect

(责任编辑 黄 颖)