DOI:10.11721/cqnuj20190606

任意拓扑空间上的拓扑压*

王 威[1],曹 洁[2]
(1. 南通理工学院 基础教学学院,江苏 南通 226002;2. 南京师范大学 数学科学学院,南京 210023)

摘要:【目的】丰富拓扑压理论,获得更广泛的拓扑压结构。【方法】利用紧致化方法处理一般拓扑空间,使得空间结构更为简洁。【结果】定义了新的空间中的拓扑压。【结论】讨论了新的拓扑压的性质并进行了论证。

关键词:拓扑空间;拓扑压;Hausdorff 空间
中图分类号:O189 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2019)06-0093-05

拓扑熵传统上是应用拓扑压来定义紧致空间上的动力系统的。本文推广了一般拓扑空间的拓扑压的概念。定义方法与紧致的情况相似。

熵是目前动力系统中最基础的概念。1965 年,Adler 等人[1]引入拓扑熵作为拓扑共轭不变量,也是测度熵的一个类似量。一般来说,拓扑压的概念首先由 Ruelle[2]于 1973 年提出,随后由 Walters[3]将其一般化拓扑压、变分原理和平衡态相关理论在统计力学、遍历理论和动力系统中起着基础作用。1984 年,Pesin 和 Pitskel[4]定义了紧致度量空间非紧子集可加性的拓扑压,并证明其变分原理。随后,Feng 和 Huang[5-6]推广了 Ruelle 和 Walter 的结果,并建立了一类广义次可加序列的 Birkhorff 平均水平集的拓扑熵与拓扑压之间的一些变分关系。

本文思路源于 Truong[7]将任意空间上的拓扑熵的概念推广至拓扑压。

设(X,τ)是不加任何特定假设的拓扑空间,$T:(X,\tau)\to(X,\tau)$为连续映射,$\rho:(X,\tau)\to I$ 为有界连续函数,定义拓扑压为 $P\tau(T,\rho)$。若(X,τ)是紧致 Hausdorff 空间,那么该压与经典压一致。本文主要将(X,τ')用Čech-Stone[8]紧致化,其中 τ'是跑遍 X 上拓扑且具有 Hausdorff 范数。

1 相关概念

定义 1 假设(X,τ)是拓扑空间。$T:(X,\tau)\to(X,\tau)$为连续映射,$\rho:(X,\tau)\to I$ 为有界连续函数,其中 I 闭区间,令 $A_{\tau,T}=\{\tau'>\tau,T:(X,\tau')\to(X,\tau')$连续且$(X,\tau')$为 Hausdorff 范数$\}$。检查 Ω 中的离散拓扑 $\Omega_{\tau,T}$非空 $\tau'\in\Omega_{\tau,T}$。则(X,τ')是 Hausdorff 范赋的,也是 Tychonoff 的。

下面利用Čech-Stone 将(X,τ')紧致化。

对拓扑空间(X,τ'),用 $C^*(X,\tau')$表示所有连续函数 $\varphi(X,\tau')\to[0,1]$的集合,其中使用的是$[0,1]$上的常用拓扑。

由 Tychonoff 定理,Cartesion 积$[0,1]^{C^*(X,\tau')}$是紧致 Hausdorff 空间。设(X,τ')是 Tychonoff 空间,由对角定理,令 $e:X\to[0,1]^{C^*(X,\tau')}$其中 $e(x)_f=f(x)$,$f\in C^*(X,\tau')$将(X,τ')嵌入$[0,1]^{C^*(X,\tau')}$。利用Čech-Stone 定理证明 $e(x)$在$[0,1]^{C^*(X,\tau')}$中的闭包是 X 的紧致子集。由定义(X,τ')是嵌入至 $SC(X,\tau')$的稠密子空间。如果(X,τ')是紧致 Hausdorff 空间,那么 $SC(X,\tau')=e(X)$因此也与 X 同态。Čech-Stone 紧致集合 $SC(X,\tau')$是 Hausdorff 紧致空间,包含稠密空间(X,τ')具有以下一般性质:任意连续映射 $g:(X,\tau')\to(Y,\tau'_Y)$,其中$(Y,\tau'_Y)$是 Hausdorff 紧致空间,具有唯一的扩张映射 $G_{\tau'}:SC(X,\tau')\to(Y,\tau'_Y)$[7]。特别地,结合连续映射 $T:(X,\tau')\to(X,

* **收稿日期:**2019-06-04 **修回日期:**2019-09-25 **网络出版时间:**2019-11-25 10:35
资助项目:国家自然科学基金面上项目(No. 11971236)
第一作者简介:王威,副教授,研究方向为拓扑动力系统,E-mail:39658255@qq.com
网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20191125.1034.032.html

$\tau')$,$(X,\tau')\subset SC(X,\tau')$可知,连续映射 $F_{\tau'}:SC(X,\tau')\to SC(X,\tau')$是 T 的扩张。对于连续有界函数 $\rho:(X,\tau')\to I$,由 Stone 定理可知它可以唯一的扩张为 $\Phi_{\tau'}:SC(X,\tau')\to I$ 且连续。

设 $C(SC(X,\tau'),I)$是 $SC(X,\tau')$上的实有界连续函数空间。压的定义可以用开覆盖,生成集或者分离集给出,这里使用生成集,即取自然对数的方法。假设 $\Phi_{\tau'}\in(SC(X,\tau'),I)$且 $n\geqslant 1$ 记 $(S_n\Phi_{\tau'})(x)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\Phi_{\tau'}(T^i x)$ 。

定义 2 对于 $\Phi_{\tau'}\in(SC(X,\tau'),I)$,$n\geqslant 1$ 且 $\varepsilon>0$,令:

$$Q_n(F_{\tau'},\Phi_{\tau'},\varepsilon)=\inf\left\{\sum_{x\in F}e^{S_n\Phi_{\tau'}(x)}\mid F\text{ 是 }SC(X,\tau')\text{ 上的一个}(n,\varepsilon)\text{ 生成集}\right\}。$$

注 1 1) $0<Q_n(F_{\tau'},\Phi_{\tau'},\varepsilon)\leqslant\|e^{S_n\Phi_{\tau'}(x)}\|\,r_n(\varepsilon,SC(X,\tau'))<\infty$,其中 $r_n(\varepsilon,SC(X,\tau'))$为 $SC(X,\tau')$关于 $F_{\tau'}$ 的任意(n,ε)生成集的最小基数;

2) 如果 $\varepsilon_1<\varepsilon_2$,那么 $Q_n(F_{\tau'},\Phi_{\tau'},\varepsilon_1)<Q_n(F_{\tau'},\Phi_{\tau'},\varepsilon_2)$;

3) $Q_n(F_{\tau'},0,\varepsilon)=r_n(\varepsilon,SC(X,\tau'))$;

4) 定义只需要取遍那些(n,ε)生成集就够了,即使没有合适的子集可以扩张成 $SC(X,\tau')$。因为 $e^{SC(X,\tau')}>0$。

定义 3 对于 $\Phi_{\tau'}\in(SC(X,\tau'),I)$,且 $\varepsilon>0$,令 $Q(F_{\tau'},\Phi_{\tau'},\varepsilon)=\limsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\ln Q_n(F_{\tau'},\Phi_{\tau'},\varepsilon)$。

注 2 1) $Q(F_{\tau'},\Phi_{\tau'},\varepsilon)\|\Phi_{\tau'}\|+r(\varepsilon,SC(X,\tau'),F_{\tau'})<\infty$,其中:

$$r(\varepsilon,SC(X,\tau'),F_{\tau'})=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln r_n(\varepsilon,SC(X,\tau'))。$$

2) 如果 $\varepsilon_1<\varepsilon_2$,那么 $Q(F_{\tau'},\Phi_{\tau'},\varepsilon_1)<Q(F_{\tau'},\Phi_{\tau'},\varepsilon_2)$。如果 $\Phi_{\tau'}\in(SC(X,\tau'),I)$,取于 $P(F_{\tau'},\Phi_{\tau'}):C(SC(X,\tau'),I)\to I\cup\{\infty\}$,记为$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}Q(F_{\tau'},\Phi_{\tau'},\varepsilon)$。

注 3 由注 2 中的 2),$P(F_{\tau'},\Phi_{\tau'})$存在,但可能是$\infty$。

根据经典拓扑压 $P(F_{\tau'},\Phi_{\tau'})$定义,有如下定义:

$$P_T(T,\rho)=\inf_{\tau'\in\Omega_{\tau,T}}P(F_{\tau'},\Phi_{\tau'}),\tag{1}$$

2 主要结果及证明

在开始论述两个性质之前,先介绍背景知识和一个引理。

对于任意连续映射 $h:(X,\tau)\to[0,1]$,投影映射 $\pi_h:SC(X,\tau)\to I$ 定义为:$\pi_h((x_\varphi)_{\varphi\in C^*(X,\tau)})=x_h$。它是连续的,是 h 的扩张。

下取 $g:(X,\tau)\to(Z,\tau_Z)$是连续映射,$P(Z,\tau_Z)$是紧致 Hausdorff 空间,定义映射 $G:SC(X,\tau)\to[0,1]^{C^*(X,\tau)}$ 取值方法:$G((x_\varphi)_{\varphi\in C^*(X,\tau)})=(Z_\psi)_{\psi\in C^*(Z,\tau_Z)}$,其中 $Z_\varphi=\pi_{\psi\circ g}((x_\varphi)_\varphi)=x_{\psi\circ g}$。显然映射 G 是连续的且 $G(SC(X,\tau))\subset e(Z)\subset[0,1]^{C^*(X,\tau)}$。由于 $e(Z)$与(Z,τ_Z)同胚,所以映射 G 是 g 的扩张。

特别地,若 $T:(X,\tau)\to(X,\tau)$是连续自映射,可以把它视为一个连续的映射 $T:(X,\tau)\to SC(X,\tau)$。由于 $SC(X,\tau)$是紧致 Hausdorff 空间。应用上述方法可以获得一个扩张映射 $F\tau:SC(X,\tau)\to SC(X,\tau)$。更具体一些,$F_\tau$ 由 $F_\tau((x_\varphi)_{\varphi\in C^*(X,\tau)})=(Z_\psi)_{\psi\in C^*(X,\tau)}$确定,其中 $Z_\varphi=\pi_{\psi\circ T}((x_\varphi)_\varphi)=x_{\psi\circ T}$。

引理 1 若(X,τ_1),(X,τ_2)是 Hausdorff 范赋空间且 $\tau_1>\tau_2$,$C^*(X,\tau_2)$是 $C^*(X,\tau_1)$的子集,投影映射 $\pi_{\tau_1,\tau_2}((x_\varphi)_{\varphi\in C^*(X,\tau_1)})=((y_\psi)_{\psi\in C^*(X,\tau_2)})$,其中 $x_\varphi=y_\psi$ 连续满射。令 $F_{\tau_1}:SC(X,\tau_1)\to SC(X,\tau_1)$是 $T:(X,\tau_1)\to(X,\tau_1)$的扩张,$F_{\tau_2}:SC(X,\tau_2)\to SC(X,\tau_2)$是 $T:(X,\tau_2)\to(X,\tau_2)$的扩张。则 $\pi_{\tau_1,\tau_2}\circ F_{\tau_1}=F_{\tau_2}\circ\pi_{\tau_1,\tau_2}$。即:

$$\begin{tikzcd}
SC(X,\tau_1) \arrow[r, "F_{\tau_1}"] \arrow[d, "\pi_{\tau_1,\tau_2}"'] & SC(X,\tau_1) \arrow[d, "\pi_{\tau_1,\tau_2}"] \\
SC(X,\tau_2) \arrow[r, "F_{\tau_2}"] & SC(X,\tau_2)
\end{tikzcd}$$

可交换。

证明 假设$(x_\varphi)_{\varphi\in C^*(X,\tau_1)}\in SC(X,\tau_1)$,可得 $F_{\tau_1}((x_\varphi)_{\varphi\in C^*(X,\tau_1)})=(y_\gamma)_{\gamma\in C^*(X,\tau_1)}$,其中 $y_\gamma=x_{\gamma\circ T}$。因此 $\pi_{\tau_1,\tau_2}\circ F_{\tau_1}((x_\varphi)_{\varphi\in C^*(X,\tau_1)})=\pi_{\tau_1,\tau_2}((y_\gamma)_{\gamma\in C^*(X,\tau_1)})=((Z_\psi)_{\psi\in C^*(X,\tau_2)})$,其中 $Z_\psi=y_\psi=x_{\psi\circ T}$。

另一方面，$\pi_{\tau_1,\tau_2}\circ((x_\varphi)_{\varphi\in C^*(X,\tau_1)})=((Z'_\psi)_{\psi\in C^*(X,\tau_2)})$，其中 $Z'_\gamma=x_\gamma$。因此：

$$F_{\tau_2}\circ\pi_{\tau_1,\tau_2}((x_\varphi)_{\varphi\in C^*(X,\tau_1)})=F_{\tau_2}((Z'_\gamma)_{\gamma\in C^*(X,\tau_2)})=((Z''_\psi)_{\psi\in C^*(X,\tau_2)}),$$

其中 $Z''_\psi=Z'_{\psi\circ T}=x_{\psi\circ T}$。由此知对 $\forall\,\psi\in C^*(X,\tau_2)$ 有 $Z''_\psi=Z_\psi$，故而 $\pi_{\tau_1,\tau_2}\circ F_{\tau_1}=F_{\tau_2}\circ\pi_{\tau_1,\tau_2}$ 成立。　　证毕

定理 2　若 $T:X\to X$ 的映射，$\rho:X\to I$ 有界函数，则有：

1)（单调性）如果 $\tau_1>\tau_2$，T 是关于 τ_1,τ_2 的连续映射，函数 ρ 关于 τ_2 连续，那么 $P_{\tau_1}(T,\rho)\geqslant P_{\tau_2}(T,\rho)$，特别的，如果 τ_0 是离散拓扑，τ 是任意拓扑，则 $P\tau(T,\rho)\leqslant P_{\tau_0}(T,\rho)$；

2)（Hausdorff 赋范空间）如果 (X,τ) 是 Hausdorff 范赋空间，则 $P\tau(T,\rho)=P(F_\tau,\Phi_\tau)$，其中 $F_\tau:SC(X,\tau)\to SC(X,\tau)$ 是 T 的扩张，$\Phi_\tau:SC(X,\tau)\to I$ 是 ρ 的扩张。特别地，如果 (X,τ) 是 Hausdorff 紧致空间，那么 $P_\tau(T,\rho)=P(T,\rho)$；

3)（闭不变子空间）设 $(Y,\tau_{X|Y})$ 是 (X,τ) 的闭子空间，若 $T(Y)\subset Y$，那么 $P\tau(T,\rho)=P_{\tau_{X|Y}}(T|Y,\rho|Y)$；

4)（紧致性）假设 (X,τ) 是嵌入到 Hausdorff 空间 (Z,τ_Z) 上的稠密子集，将映射 $T:(X,\tau)\to(X,\tau)$ 扩张成连续映射 $T_Z:(X,\tau_Z)\to(X,\tau_Z)$ 同时将 $\rho:(X,\tau)\to I$ 扩张成连续函数 $\rho_Z:(Z,\tau_Z)\to I$，则 $P_\tau(T,\rho)\geqslant P(T_Z,\rho_Z)$。

证明　因为函数 ρ 关于 τ_2 连续，且 $\tau_1>\tau_2$ 可得函数 ρ 关于 τ_1 连续，进一步 T 关于 τ_1,τ_2 连续，易知 $A_{\tau_1,T}\subset A_{\tau_2,T}$。显然，由(1)式有 $P_{\tau_1}(T,\rho)\geqslant P_{\tau_2}(T,\rho)$。

2) 设 (X,τ) 是 Hausdorff 范赋空间，$\tau'\in\Omega_{\tau,T}$，则 (X,τ') 是 Hausdorff 范赋空间，因为 $\tau'>\tau$，则有 $C^*(X,\tau)\subset C^*(X,\tau')$，可得投影映射 $\pi_{\tau',\tau}((x_\varphi)_{\varphi\in C^*(X,\tau')})=((y_\psi)_{\psi\in C^*(X,\tau)})$，其中 $y_\psi=x_\psi$ 是连续满射，易知 $\pi_{\tau',\tau}$ 是 X 上的恒等映射，所以 $SC(X,\tau')$ 到 $SC(X,\tau)$ 是满射。

令 $F_\tau:SC(X,\tau)\to SC(X,\tau)$ 是 $T:(X,\tau)\to(X,\tau)$ 的扩张，$F_{\tau'}:SC(X,\tau')\to SC(X,\tau')$ 是 $T:(X,\tau')\to(X,\tau')$ 的扩张。由引理 1 可知 $\pi_{\tau',\tau}\circ F_{\tau'}=F_\tau\circ\pi_{\tau',\tau}$，即：

$$\begin{tikzcd}
SC(X,\tau') \arrow[r, "F_{\tau'}"] \arrow[d, "\pi_{\tau',\tau}"'] & SC(X,\tau') \arrow[d, "\pi_{\tau',\tau}"] \\
SC(X,\tau) \arrow[r, "F\tau"] & SC(X,\tau)
\end{tikzcd}\text{。}$$

另一方面 $\Phi_\tau:SC(X,\tau)\to I$ 是有界函数 $\rho:(X,\tau)\to I$ 的扩张，$\Phi_{\tau'}:SC(X,\tau')\to I$ 是有界函数 $\rho:(X,\tau')\to I$ 的扩张，由紧致化的唯一性，可知 $\Phi_{\tau'}=\Phi_\tau\circ\pi_{\tau',\tau}$，则：

$$\begin{tikzcd}
SC(X,\tau') \arrow[r, "\Phi_{\tau'}"] \arrow[d, "\pi_{\tau',\tau}"'] & I \\
SC(X,\tau) \arrow[ur, "\Phi_\tau"'] &
\end{tikzcd}$$

可交换。

综上所述，结合紧 Hausdorff 空间上拓扑压的拓扑半共轭性质[9]，可见 $P(F_{\tau'},\Phi_{\tau'})\geqslant P(F_\tau,\Phi_\tau)$。由(1)式可得 $P_\tau(T,\rho)\geqslant P(F_\tau,\Phi_\tau)$。

3) 设 $\tau'\in\Omega_{\tau,T}$。那么 $\tau'>\tau$，故而 $\tau'_{X|Y}>\tau_{X|Y}$。如果 (X,τ') 是紧致 Hausdorff 或者是 Hausdorff 赋范空间，显然 $(Y,\tau'_{X|Y})$ 是同种类型的。所以 $\tau'_{X|Y}\in\Omega_{\tau_{X|Y},T|Y}$。为了方便记 $S=T|Y$。因为 (X,τ') 是 Hausdorff 范赋空间 $(Y,\tau'_{X|Y})$ 是 (X,τ') 的闭子空间，由 Tietze 扩展定理知，任意连续函数 $\varphi:(Y,\tau'_{X|Y})\to I$ 是连续函数 $\varphi:(X,\tau')\to I$ 的限制。

此外，可以选择扩张的范数等于起始映射的范数。由 Čech-Stone 紧致化的构造，可得 $SC(Y,\tau'_{X|Y})$ 是 $SC(X,\tau')$ 的闭子空间。$G_{\tau'_{X|Y}}$ 是 $F_{\tau'}$ 上的限制，$\Psi_{\tau'_{X|Y}}$ 是 $\Phi_{\tau'}$ 上的限制。由紧致 Hausdorff 空间上拓扑压的性质，有 $P(F_{\tau'},\Phi_{\tau'})\geqslant P(G_{\tau'_{X|Y}},\Psi_{\tau'_{X|Y}})$。因此：

$$P_T(T,\rho)=\inf_{\tau'\in\Omega_{\tau,T}}P(F_{\tau'},\Phi_{\tau'})\geqslant\inf_{\tau'\in\Omega_{\tau,T}}P(G_{\tau'_{X|Y}},\Psi_{\tau'_{X|Y}})\geqslant\inf_{\tau'\in\Omega_{\tau_{X|Y},T|Y}}P(G_{\tau'},\Psi_{\tau'})=P_{\tau_{X|Y}}(T|Y,\rho|Y)\text{。}$$

4) (X,τ) 是 (Z,τ_Z) 的嵌入稠密子空间，$C^*(Z,\tau_Z)$ 中任意映射是限制在 (X,τ) 上唯一确定。如果 $\tau\in A_{\tau,T}$，那么 $\tau'>\tau_Z$。$C^*(Z,\tau_Z)$ 自然是 $C^*(Z,\tau')$ 的子空间。易知，$\pi_{\tau',\tau_Z}((x_\varphi)_{\varphi\in C^*(X,\tau')})=((y_\psi)_{\psi\in C^*(Z,\tau_Z)})$ 是 Z 上的恒等映射。

令 $F_{\tau'}:SC(X,\tau')\to SC(X,\tau')$ 是 $T:(X,\tau')\to(X,\tau')$ 的扩张，$T:(X,\tau)\to(X,\tau)$ 是 $T_Z:(Z,\tau_Z)\to(Z,\tau_Z)$ 的扩张。由引理1可知 $\pi_{\tau',\tau_Z}\circ F_{\tau'}=T_Z\circ\pi_{\tau',\tau_Z}$，即：

$$\begin{tikzcd} SC(X,\tau') \arrow[r, "F_{\tau'}"] \arrow[d, "\pi_{\tau',\tau_Z}"'] & SC(X,\tau') \arrow[d, "\pi_{\tau',\tau_Z}"] \\ (Z,\tau_Z) \arrow[r, "T_Z"] & (Z,\tau_Z) \end{tikzcd}\text{。}$$

同时，$\Phi_{\tau'}:SC(X,\tau')\to I$ 是有界函数 $\varphi:(X,\tau')\to I$ 的扩张，$\varphi:(X,\tau)\to I$ 扩张成连续函数 $\theta_Z:(Z,\tau_Z)\to I$，根据紧致化的唯一性，可知 $\Phi_{\tau'}=\theta_Z\circ\pi_{\tau',\tau_Z}$，则：

$$\begin{tikzcd} SC(X,\tau') \arrow[r, "\Phi_{\tau'}"] \arrow[d, "\pi_{\tau',\tau_Z}"'] & I \\ SC(X,\tau_Z) \arrow[ur, "\varphi_Z"'] & \end{tikzcd}$$

可交换。

综上所述，再结合紧致 Hausdorff 空间拓扑压的半共轭性，易得 $P(F_{\tau'},\Phi_{\tau'})=P(T_Z,\theta_Z)$。由(1)式可得 $P_\tau(T,\theta)\geqslant P(T_Z,\theta_Z)$。 证毕

下面讨论拓扑压 $\mathcal{P}_{\mathrm{top}}(T,\rho)$，研究是关于 T 的拓扑压。当 $I_T=\theta$，特别如果 T 是连续的，可以取紧致空间连续自同态的压的任何等价定义。假设 $I_T\neq\theta$。用最大完全不变集，为了避免不确定点，使用 Bowen 压定义[3]。下取：

$$U_T=X\setminus\bigcup_{n\in N}T^n(I_T),\ P(T,\rho,\varepsilon,n)=\frac{1}{n}\ln\max\left\{\sum_{x\in F(n,\varepsilon)}e^{(S_n\theta)(x)}\mid F(n,\varepsilon)\text{ 是 }U_T\text{ 的}(n,\varepsilon)\text{ 分离集}\right\},$$

$$P^{\mathrm{bow}}(T,\theta)=\sup_{\varepsilon>0}P(T,\theta,\varepsilon)\text{。}$$

从另一个角度讨论 T 的迭代。

$\Gamma_T^\infty=\overline{\{\widehat{x}=(x_n)_{n\in N}\in U_T^N\mid x_n=T^n(Z_0)\}}X^N$ 是紧致的乘积拓扑。利用度量 $d_\infty(\widehat{x},\widehat{y}:=\max\limits_{n\in N}2^{-n}d(x_n,y_n))$，知它是可测的。无限序 Γ_T^∞ 是在 X^N 上紧致的。在 X 上做扩张映射 T。函数 $\rho:X\to I$ 如上所述，定义函数 $\hat{\theta}:\Gamma_T^\infty\to I:\hat{\theta}(x_0,T(x_0),\cdots,T^n(x_0),\cdots)=\hat{\theta}(x_0)$，记拓扑压为 $\mathcal{P}_{\mathrm{top}}(T,\rho):=P(\widehat{T},\hat{\theta})$。

定理3 $\mathcal{P}_{\mathrm{top}}(T,\rho)=P^{\mathrm{bow}}(T,\theta)$。

证明 设 S 是 U_T 的 (n,ε) 分离集。令 $\pi:\Gamma_T^\infty\to X$ 是第一因子投影映射，记 $\widehat{S}=\pi^{-1}S$。对于 $\widehat{x}\in\widehat{S}$ 定义 $x=\pi(\widehat{x})$ 为 S 的对应元素。因为 $d_\infty(\widehat{T}^j\widehat{x},\widehat{T}^j\widehat{y})\geqslant d(T^jx,T^jy)$，$\widehat{S}$ 是 Γ_T^∞ 的 (n,ε) 分离集。可得 $\mathcal{P}_{\mathrm{top}}(T,\rho)\geqslant P^{\mathrm{bow}}(T,\theta)$。

固定 $\delta>0$。选取充分小的 $\varepsilon_0>0$ 使得：

$$|\hat{\theta}(\widehat{x})-\hat{\theta}(\widehat{y})|<\delta,\tag{2}$$

对 $\forall\,\widehat{x},\widehat{y}\in\Gamma_T^\infty$ 且 $d_\infty(\widehat{x},\widehat{y})<\varepsilon$，因为 $\mathcal{P}_{\mathrm{top}}(T,\rho):=P(\widehat{T},\hat{\theta})$ 固定 ξ，根据 $P(\widehat{T},\hat{\theta})$ 的定义，选择 $\varepsilon<\varepsilon_0$，$n>0$ 和 $\widehat{S}$ 的 (n,ε) 分离集满足：

$$\sum_{x\in\widehat{S}}e^{(S_n\hat{\theta})(x)}>\mathcal{P}_{\mathrm{top}}(T,\rho)-\xi,\tag{3}$$

$\widehat{S}$ 是 Γ_T^∞ 的 (n,ε) 分离集。不失一般性，取 $\widehat{s}=\{\widehat{x}_1,\widehat{x}_2,\cdots,\widehat{x}_{\#\widehat{S}}\}$。因为 U_T^N 在 Γ_T^∞ 中稠密，可以稍微移动 $\widehat{S}$ 中的点获得 $\breve{S}$，使之获得与 $\widehat{S}$ 有相同的点的个数。选择 U_T^N 中 $\left(n,\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ 分离集，则 $\breve{s}=\{\breve{x}_1,\breve{x}_2,\cdots,\breve{x}_{\#\widehat{S}}\}$，其中 $\max\limits_{0\leqslant i\leqslant N-1}d_\infty(T^j\breve{x}_j,T^j\widehat{x}_j)<\dfrac{\varepsilon}{4}$ 对任意 $1\leqslant j\leqslant\#\widehat{S}$ 都成立。由(2)，(3)式，得：

$$\sum_{x\in\breve{S}}e^{(S_n\hat{\theta})(x)}\geqslant e^{N\delta}\sum_{x\in\widehat{S}}e^{(S_n\hat{\theta})(x)}\geqslant e^{N\delta}e^{\mathcal{P}_{\mathrm{top}}(T,\rho)-\xi}\text{。}\tag{4}$$

显然如果 $d_\infty(\widehat{x},\widehat{y})\geqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$，那么 $d_\infty(\widehat{x},\widehat{y})=2^{-n}d(x_n,y_n)$ 对于指数 $n\leqslant M(\varepsilon)=\dfrac{\varepsilon}{2}\ln2$。若 $(\widehat{x},\widehat{y})\in\breve{S}$ 定义 $x=\pi(\widehat{x})$，$y=\pi(\widehat{y})$。所以有：

$$\max_{0\leqslant j\leqslant N+M(\varepsilon)-1} d(T^jX,T^jY)\geqslant \max_{0\leqslant j\leqslant N-1}\max_{0\leqslant n\leqslant M(\varepsilon)} 2^{-n}d(T^jX_n,T^jY_n)=\max_{0\leqslant j\leqslant N-1} d_\infty(\hat{T}^j\hat{X},\hat{T}^j\hat{Y})\geqslant\frac{\varepsilon}{2}。$$

所以 $S=\pi(\breve{S})$ 是 U_T 的 $\left(N+M(\varepsilon),\frac{\varepsilon}{2}\right)$ 分离集，与 $\widehat{S}$ 有相同的个数。那么：

$$\sum_{x\in\breve{S}} e^{(S_{N+M(\varepsilon)}\theta)(x)}\geqslant e^{M(\varepsilon)\|\theta\|}\sum_{x\in\pi(\breve{S})} e^{(S_N\theta)(x)}=e^{M(\varepsilon)\|\theta\|}\sum_{x\in\pi(\breve{S})} e^{(S_N\hat{\theta})(x)}。$$

再由(4)式可得 $\sum_{x\in\breve{S}} e^{(S_{N+M(\varepsilon)}\theta)(x)}\geqslant e^{N\delta}e^{M(\varepsilon)\|\theta\|}\sum_{x\in\pi(\breve{S})} e^{\mathcal{P}_{\mathrm{top}}(T,\rho)-\xi}$。因此有：

$$\frac{1}{N+M(\varepsilon)}\ln\sum_{x\in\breve{S}} e^{(S_{N+M(\varepsilon)}\theta)(x)}\geqslant\frac{M(\varepsilon)\|\theta\|}{N+M(\varepsilon)}+\frac{N\delta+\mathcal{P}_{\mathrm{top}}(T,\rho)-\xi}{N+M(\varepsilon)},$$

所以 $P(T,\theta,\varepsilon)\geqslant\delta+\mathcal{P}_{\mathrm{top}}(T,\rho)-\xi$。令 $\varepsilon\to0$，$P(T,\theta)\geqslant\delta+\mathcal{P}_{\mathrm{top}}(T,\rho)-\xi$，再令 $\delta\to0,\xi\to0$。结论成立。 证毕

定理 4 若 X 是一个连通的 Kähler 流形，$T:X\to X$ 是一个主亚纯映射，$\theta:(X,\tau)\to I$ 是一个有界连续函数，τ 是 X 上常见拓扑，那么 $P_{\tau|U_T}(T|U_T,\theta|U_T)\geqslant\sup_{Z\in C(X,T)}\mathcal{P}_{\mathrm{top}}(T_Z,\rho_Z)$。特别地，如果 T 是全纯的，那么 $P_\tau(T,\theta)\geqslant\sup_{Z\in C(X,T)}\mathcal{P}_{\mathrm{top}}(T_Z,\rho_Z)$。

证明 由定义 $\mathcal{P}_{\mathrm{top}}(T_Z,\rho_Z):=P(\hat{T}_Z,\hat{\rho}_Z)$，对于 $\forall Z\in C(X,T)$，动力系统 $(\hat{T}_Z,\hat{\rho}_Z,\Gamma_Z,\tau_{\Gamma_Z})$ 是动力系统 $(T|U_T,\theta|U_T,U_T,\tau|U_T)$ 的紧致化结果。因此由定理 2 的性质 4)，可得 $P_{\tau|U_T}(T|U_T,\theta|U_T)\geqslant\mathcal{P}_{\mathrm{top}}(T_Z,\rho_Z)$，所以结论成立。 证毕

参考文献：

[1] ADLER R，KONHEIM A，Mc ANDREW M. Topological entropy[J]. Trans Amer Math Soc，1965，114：309-319.

[2] RUELLED. Statistical mechanics on a compact set with Z^ν action satisfying expansiveness and specification[J]. Trans Amer Math Soc，1973，185：237-251.

[3] WALTERS P. Avariational principle for the pressure of continuous transformations[J]. Amer J Math，1976，17：937-971.

[4] PESIN Y，PITSKEL B. Topological pressure and the variational principle for noncompact sets[J]. Functional Analysis and its Applications，1984，18：307-318.

[5] FENG D，HUANG W. Variational principles for topological entropies of subsets[J]. J Funct Anal，2012，263：2228-2254.

[6] FENG D，HUANG W. Variational principle for weighted topological pressure[J].J Math Pures Appl，2016，106：411-452.

[7] TRUONG T. The topological entropy of a continuous map on an arbitrary topological space[EB/OL]. [2019-11-25]. https://arxiv.org/abs/1607.07412v1.

[8] ROTA G C. The Stone-Cech compactification：R. C. Walker，Springer，1974，322pp[J]. Advance in Mathematics，1976，19(3)：422.

[9] WALTERS P. An introduction to ergodic theory[M]. Berlin：Springer-Verlag，2000.

The Topological Pressure on an Arbitrary Topological Space

WANG Wei[1]，CAO Jie[2]

(1. School of General Education，Nantong Institute of Technology，Nantong Jiangsu 226002；

2. School of Mathematics Science，Nanjing Normal University，Nanjing 210023，China)

Abstract：[**Purposes**]To enrich theory of topological pressure and to gain a wider range of topological structure. [**Methods**] Using the compact method to deal with general topological space，and making the spatial structure more concise. [**Findings**] Defining a new topological pressure in new space. [**Conclusions**]The properties of the new topological pressure are discussed and proved.

Keywords：topological space；topological pressure；Hausdorff space

（责任编辑 黄 颖）