强预不变凸函数*

颜丽佳，刘芙萍
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院，重庆 400047)

摘　要 预不变凸函数是凸函数的重要推广函数之一,它在数学规划中有许多的应用。本文在给出一类特殊的预不变凸函数——强预不变凸函数定义的基础上,举例说明这类函数的存在性,并讨论了它和强不变凸函数之间的关系,另外还给出了它的一些基本性质和等价命题。

关键词 预不变凸函数;强预不变凸函数;强不变凸函数
中图分类号:O221.1　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2005)01-0011-05

Strongly Preinvex Functions

YAN Li-jia, *LIU Fu-ping*
(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: Preinvex function, which is one kind of important function of convex functions, has many application in mathematical programming. A special class of preinvex functions, strongly preinvex function, is presented in this paper. We give examples to illustrate the existence of strongly preinvex function and discuss the retation between this class function and strongly invex function. We also give some basic properties and equivalent propositions for this class function.

Key words: preinvex function; strongly preinvex function; strongly invex function

凸函数是一类重要的函数,在数学规划中有着广泛的应用。Weir 和 Mond[1],Weir 和 Jeyakumar[2] 在凸函数的基础上,定义了预不变凸函数,这类函数是凸函数的推广,大量的文献,如文献[3,4]对预不变凸函数的有关问题作了研究。考虑到强凸函数是凸函数中一种特殊函数,有着很好的性质,因此本文提出了强预不变凸函数的概念,并讨论了它的一些性质和等价命题。

1　基本定义

定义 1[1,2]　设集合 $K\subseteq\mathbf{R}^n$,如果存在一个向量函数 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,使得当 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$ 时,有 $y+\lambda\eta(x,y)\in K$,称集合 K 是不变凸集。

定义 2[1,2]　设集合 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集,函数 $f:K\to\mathbf{R}$ 如果满足 $f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$,称函数 f 是预不变凸函数。

定义 3[5]　设集合 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集,函数 $f:K\to\mathbf{R}$ 如果满足 $f(y+\lambda\eta(x,y))<\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),\forall x,y\in K,x\neq y,\lambda\in(0,1)$,则称函数 f 是严格预不变凸函数。

下面给出一类特殊的预不变凸函数的定义。

定义 4　设集合 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集,函数 $f:K\to\mathbf{R}$,如果存在一个常数 $\beta>0$,使得对 $\forall x,y\in K$ 和 $\forall\lambda\in[0,1]$ 满足 $f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2$,则称函数 f 是强预不变凸函数。

显然,强预不变凸函数一定是严格预不变凸函数。例如,对函数 $f(x)=(|x|-1)^2$,取

$$\eta(x,y)=\begin{cases}x-y, & x\geqslant0,y\geqslant0 \text{ 或 } x<0,y<0\\ -x-y, & x\geqslant0,y<0 \text{ 或 } x\leqslant0,y>0\end{cases}$$

* 收稿日期:2004-09-13
作者简介:颜丽佳(1974-),女,四川达州人,硕士研究生,主要研究方向为数学规划与算法。

令$\beta=1$,容易验证$f(x)$是关于η的强预不变凸函数,也是关于η的严格预不变凸函数。

但反之不然,严格预不变凸函数不一定是强预不变凸函数。例如,对函数$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}|x|$,

取
$$\eta(x,y)=\begin{cases}x-y, x>0, y>0 \quad \text{或 } x<0, y<0\\ -x-y, x<0, y>0, x+y\neq 0 \quad \text{或 } x>0, y<0, x+y\neq 0\\ \frac{1}{2}y, x+y=0\end{cases}$$

容易验证,$f(x)$是关于η的严格预不变凸函数,但它不是强预不变凸函数。因为对$\forall\beta>0$,取$x=-4\beta^{\frac{1}{2}}$,$y=2\beta^{-\frac{1}{2}}$,$\lambda=1/2$,有

$$f(y+\lambda\eta(x,y))=f\left(\frac{2}{\sqrt{\beta}}+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\sqrt{\beta}}-\frac{2}{\sqrt{\beta}}\right)\right)=f\left(\frac{3}{\sqrt{\beta}}\right)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{3}{\sqrt{\beta}}$$

$$\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}\frac{4}{\sqrt{\beta}}+\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}\frac{2}{\sqrt{\beta}}-\beta\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left\|\frac{2}{\sqrt{\beta}}\right\|^2=\log_{\frac{1}{2}}\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\beta}}$$

由$\frac{3}{\sqrt{\beta}}<\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\beta}}$知,$\log_{\frac{1}{2}}\frac{3}{\sqrt{\beta}}>\log_{\frac{1}{2}}\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\beta}}$,故$f$不是强预不变凸函数。

定义5[6] 设集合$K\subseteq\mathbf{R}^n$是关于$\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$的不变凸集,函数$f:K\to\mathbf{R}$是可微的,如果存在一个常数$\beta>0$,使得$\forall x,y\in K$时,有$f(y)-f(x)\geqslant\eta(y,x)^{\mathrm{T}}\nabla f(x)+\beta\|\eta(y,x)\|^2$,则称$f$是强不变凸函数。

2 主要结果

定理1 若$f:K\to\mathbf{R}$是关于η的强预不变凸函数,α是任一常数,则$f+\alpha$也是关于η的强预不变凸函数。

证明 因为$f:K\to\mathbf{R}$是关于η的强预不变凸函数,故存在一个常数$\beta>0$,使得对$\forall x,y\in K$和$\forall\lambda\in[0,1]$满足
$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2$$
于是$f(y+\lambda\eta(x,y))+\alpha\leqslant\lambda(f(x)+\alpha)+(1-\lambda)(f(y)+\alpha)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2$也成立,这样$f+\alpha$也是关于$\eta$的强预不变凸函数。 证毕

定理2 若$f:K\to\mathbf{R}$是关于η的强预不变凸函数,k是任意正常数,则kf也是关于η的强预不变凸函数。

证明 因为$f:K\to\mathbf{R}$是关于η的强预不变凸函数,故存在一个常数$\beta>0$,使得对$\forall x,y\in K$和$\forall\lambda\in[0,1]$满足
$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2$$
因为$k>0$,所以上式两边同乘以k得
$$kf(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda kf(x)+(1-\lambda)kf(y)-k\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2$$
这样对函数kf,存在常数$k\beta>0$,使得对$\forall x,y\in K$和$\forall\lambda\in[0,1]$上不等式成立,故kf也是关于η的强预不变凸函数。 证毕

定理3 如果$f:K\to\mathbf{R}$是关于η的强预不变凸函数,且在K上可微,则f是关于η的强不变凸函数。

证明 由$f:K\to\mathbf{R}$是关于η的强预不变凸函数,故存在常数$\beta>0$,使得对$\forall x,y\in K$和$\forall\lambda\in[0,1]$满足
$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2$$
又f在K上可微,故
$$f(y)+\lambda\eta(x,y)^{\mathrm{T}}\nabla f(y)+\circ(\lambda)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2$$
两边同除以λ,再令$\lambda\to 0$得
$$f(x)-f(y)\leqslant\eta(x,y)^{\mathrm{T}}\nabla f(y)+\beta\|\eta(x,y)\|^2$$
所以f也是关于η的强不变凸函数。 证毕

条件C[7] 设$\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,称函数$\eta$满足条件$C$,如果$\forall x,y\in\mathbf{R}^n$和$\forall\lambda\in[0,1]$,有$\eta(y,y+\lambda\eta(x,y))=-\lambda\eta(x,y)$和$\eta(x,y+\lambda\eta(x,y))=(1-\lambda)\eta(x,y)$。

容易验证,若η满足条件C,则$\eta(y+\lambda\eta(x,y),y)=\lambda\eta(x,y)$。

这是因为$\eta(y+\lambda\eta(x,y),y)=\eta(y+\lambda\eta(x,y),y+\lambda\eta(x,y)+\eta(y,y+\eta(x,y)))=-\eta(y,y+\lambda\eta(x,y))=\lambda\eta(x,y)$

定理 4　设集合 $K\subseteq \mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta: \mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集，η 满足条件 C，如果 $f: K\to\mathbf{R}$ 是关于 η 的强不变凸函数，则 f 是关于 η 的强预不变凸函数。

证明　因为 f 是关于 η 的强不变凸函数，故存在一个常数 $\beta>0$，使得 $\forall x,y\in K$

$$f(y)-f(x)\geqslant\eta(y,x)^{\mathrm{T}}\nabla f(x)+\beta\|\eta(y,x)\|^2$$

设 $\lambda\in[0,1]$，令 $z=y+\lambda\eta(x,y)$，由 K 是关于 η 的不变凸集，知 $z\in K$

故

$$f(x)-f(z)\geqslant\eta(x,z)^{\mathrm{T}}\nabla f(z)+\beta\|\eta(x,z)\|^2 \tag{1}$$

$$f(y)-f(z)\geqslant\eta(y,z)^{\mathrm{T}}\nabla f(z)+\beta\|\eta(y,z)\|^2 \tag{2}$$

(1) $\times\lambda+$ (2) $\times(1-\lambda)$ 得

$$\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-f(z)\geqslant\nabla f(z)(\lambda\eta(x,z))^{\mathrm{T}}+(1-\lambda)\eta(y,z)^{\mathrm{T}}+\beta(\lambda\|\eta(x,z)\|^2+(1-\lambda)\|\eta(y,z)\|^2)$$

因为在条件 C 下，

$$\lambda\eta(x,z)^{\mathrm{T}}+(1-\lambda)\eta(y,z)^{\mathrm{T}}=\lambda\eta(x,y+\lambda\eta(x,y))^{\mathrm{T}}+(1-\lambda)\eta(y,y+\lambda\eta(x,y))^{\mathrm{T}}=$$
$$\lambda(1-\lambda)\eta(x,y)^{\mathrm{T}}+(1-\lambda)(-\lambda)\eta(x,y)^{\mathrm{T}}=0$$
$$\beta(\lambda\|\eta(x,z)\|^2+(1-\lambda)\|\eta(y,z)\|^2)=$$
$$\beta(\lambda\|\eta(x,y+\lambda\eta(x,y))\|^2+(1-\lambda)\|\eta(y,y+\lambda\eta(x,y))\|^2=$$
$$\beta(\lambda\|(1-\lambda)\eta(x,y)\|^2+(1-\lambda)\|\lambda\eta(x,y)\|^2)=$$
$$\beta[\lambda(1-\lambda)^2+(1-\lambda)\lambda^2]\|\eta(x,y)\|^2=\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2$$

故

$$\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-f(z)\geqslant\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2$$

即

$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2$$

这样 f 就是关于 η 的强预不变凸函数。　证毕

引理 1　设集合 $K\subseteq \mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta: \mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集，η 满足条件 C，如果 $f: K\to\mathbf{R}$ 满足 $f(y+\eta(x,y))\leqslant f(x)$，$\forall x,y\in K$，且存在常数 $\alpha\in(0,1)$ 和 $\beta>0$ 使得

$$f(y+\alpha\eta(x,y))\leqslant\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)-\beta\alpha(1-\alpha)\|\eta(x,y)\|^2,\ \forall x,y\in K \tag{3}$$

那么集合 $A=\{\lambda\in[0,1]\mid f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2,\ \forall x,y\in K\}$ 在 $[0,1]$ 上是稠密的。

证明　因为 $f(y)\leqslant f(y)$ 和 $f(y+\eta(x,y))\leqslant f(x)$，$\forall x,y\in K$，所以 $\lambda=0$ 和 $\lambda=1$ 属于集合 A。现假设 A 在 $[0,1]$ 上不是稠密的，那么存在一个 $\lambda_0\in(0,1)$ 和 λ_0 的一个邻域 $N(\lambda_0)$，使得

$$N(\lambda_0)\cap A=\varnothing \tag{4}$$

定义

$$\lambda_1=\inf\{\lambda\in A\mid\lambda\geqslant\lambda_0\} \tag{5}$$

$$\lambda_2=\sup\{\lambda\in A\mid\lambda\geqslant\lambda_0\} \tag{6}$$

由(4)式知 $0\leqslant\lambda_2<\lambda_1\leqslant1$，又 $\{\alpha,(1-\alpha)\}\in(0,1)$，选择 $u_1,u_2\in A$ 使 $u_1\geqslant\lambda_1$，$u_2\leqslant\lambda_2$ 并且

$$\max\{\alpha,1-\alpha\}(u_1-u_2)<\lambda_1-\lambda_2 \tag{7}$$

那么就有

$$u_2\leqslant\lambda_2<\lambda_1\leqslant u_1$$

另外令 $\bar\lambda=\alpha u_1+(1-\alpha)u_2$，文献[8]在引理 3.2 的证明中推出了在条件 C 下，有下式成立。

$$y+u_2\eta(x,y)+\alpha\eta(y+u_1\eta(x,y),y+u_2\eta(x,y))=y+\bar\lambda\eta(x,y),\ \forall x,y\in K$$

从(3)式和 $u_1,u_2\in A$ 知

$$f(y+\bar\lambda\eta(x,y))=f[y+u_2\eta(x,y)+\alpha\eta(x,y)+\alpha\eta(y+u_1\eta(x,y),y+u_2\eta(x,y))]\leqslant$$
$$\alpha f(y+u_1\eta(x,y))+(1-\alpha)f(y+u_2\eta(x,y))-\beta\alpha(1-\alpha)\|\eta(y+u_1\eta(x,y),y+u_2\eta(x,y)\|^2\leqslant$$
$$\alpha[u_1f(x)+(1-u_1)f(y)-\beta u_1(1-u_1)\|\eta(x,y)\|^2]+(1-\alpha)[u_2f(x)+(1-u_2)f(y)-\beta u_2(1-u_2)\|\eta(x,y)\|^2]-\beta\alpha(1-\alpha)\|\eta(y+u_1\eta(x,y),y+u_2\eta(x,y)\|^2=\bar\lambda f(x)+(1-\bar\lambda)f(y)-\{\alpha[\beta u_1(1-u_1)\|\eta(x,y)\|^2]+(1-\alpha)[\beta u_2(1-u_2)\|\eta(x,y)\|^2]+\beta\alpha(1-\alpha)\|\eta(y+u_1\eta(x,y),y+u_2\eta(x,y)\|^2\}$$

因为在条件 C 下

$$\eta(y+u_1\eta(x,y),y+u_2\eta(x,y))=\eta(y+u_2\eta(x,y)+(u_1-u_2)\eta(x,y),y+u_2\eta(x,y))=$$

$$\eta\left(y+u_2\eta(x,y)+\frac{u_1-u_2}{1-u_2}\eta(x,y+u_2\eta(x,y)),y+u_2\eta(x,y)\right)=$$

$$\frac{u_1-u_2}{1-u_2}\eta(x,y+u_2\eta(x,y))=(u_1-u_2)\eta(x,y)$$

所以 $\beta\alpha(1-\alpha)\|\eta(y+u_1\eta(x,y),y+u_2\eta(x,y)\|^2=\beta\alpha(1-\alpha)(u_1-u_2)^2\|\eta(x,y)\|^2$

而 $\alpha\beta u_1(1-u_1)\|\eta(x,y)\|^2+(1-\alpha)\beta u_2(1-u_2)\|\eta(x,y)\|^2+\beta\alpha(1-\alpha)(u_1-u_2)^2\|\eta(x,y)\|^2=$

$\beta\|\eta(x,y)\|^2[\alpha u_1(1-u_1)+(1-\alpha)u_2(1-u_2)+\alpha(1-\alpha)(u_1-u_2)^2]=\beta\|\eta(x,y)\|^2\bar{\lambda}(1-\bar{\lambda})$

故 $f(y+\bar{\lambda}\eta(x,y))\leqslant\bar{\lambda}f(x)+(1-\bar{\lambda})f(y)-\beta\bar{\lambda}(1-\bar{\lambda})\|\eta(x,y)\|^2$ 成立,这样,$\lambda\in A$。

如果 $\bar{\lambda}\geqslant\lambda_0$,从(7)式知,$\bar{\lambda}-u_2=\alpha(u_1-u_2)<\lambda_1-\lambda_2$,因此 $\bar{\lambda}<\lambda_1$。而 $\bar{\lambda}\geqslant\lambda_0$,$\bar{\lambda}\in A$,这与(5)式产生矛盾。类似,$\bar{\lambda}\leqslant\lambda_0$ 将与(6)式产生矛盾。因此 A 在 $[0,1]$ 上是稠密的。 证毕

定理 5 设集合 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的开不变凸集,η 满足条件 C,如果函数 $f:K\to\mathbf{R}$ 在 K 上是上半连续的,且满足 $f(y+\eta(x,y))\leqslant f(x)$,$\forall x,y\in K$,则 f 在 K 上是关于 η 的强预不变凸函数当且仅当存在常数 $\alpha\in(0,1)$ 和 $\beta>0$ 使得 $f(y+\alpha\eta(x,y))\leqslant\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)-\beta\alpha(1-\alpha)\|\eta(x,y)\|^2$,$\forall x,y\in K$。

证明 必要性直接由 f 是关于 η 的强预不变凸函数得到。下证充分性。

假设 f 在 K 上不是关于 η 的强预不变凸函数,则对 $\forall\beta>0$,存在 $x_0,y_0\in K$ 和 $\bar{\lambda}\in(0,1)$,使得下式成立。

$$f(y_0+\bar{\lambda}\eta(x_0,y_0))>\bar{\lambda}f(x_0)+(1-\bar{\lambda})f(y_0)-\beta\bar{\lambda}(1-\bar{\lambda})\|\eta(x_0,y_0)\|^2 \tag{8}$$

让
$$z=y_0+\bar{\lambda}\eta(x_0,y_0),A=\{\lambda\in[0,1]\mid f(y+\lambda\eta(x,y))$$
$$\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2,\forall x,y\in K\}$$

由定理中的假设条件和引理 1 知 A 在 $[0,1]$ 上是稠密的,于是存在一个序列 $\{\lambda_n\}$,$\lambda_n\in A$,使得 $\lambda_n\to\bar{\lambda}(n\to\infty)$。定义 $y_n=y_0+\dfrac{\bar{\lambda}-\lambda_n}{1-\lambda_n}\eta(x_0,y_0)$,那么 $y_n\to y_0(n\to\infty)$。由于 K 是开不变凸集,因此当 n 充分大时,有 $y_n\in K$。

又根据条件 C,可得到

$$y_n+\lambda_n\eta(x_0,y_0)=y_0+\frac{\bar{\lambda}-\lambda_n}{1-\lambda_n}\eta(x_0,y_0)+\lambda_n\eta\left(x_o,y_0+\frac{\bar{\lambda}-\lambda_n}{1-\lambda_n}\eta(x_0,y_0)\right)=y_0+\bar{\lambda}\eta(x_0,y_0)=z \tag{9}$$

由函数 $f:K\to\mathbf{R}$ 在 K 上是上半连续的,对 $\forall\varepsilon>0$,存在 $\mathbf{N}>0$,使得当 $n>\mathbf{N}$ 时,有 $f(y_n)\leqslant f(y_0)+\varepsilon$。故从(9)式和 $\lambda_n\in A$,有

$$f(z)=f(y_n+\lambda_n\eta(x_0,y_n))\leqslant\lambda_nf(x_0)+(1-\lambda_n)f(y_n)-\beta\lambda_n(1-\lambda_n)\|\eta(x_0,y_n)\|^2\leqslant$$
$$\lambda_nf(x_0)+(1-\lambda_n)(f(y_0)+\varepsilon)-\beta\lambda_n(1-\lambda_n)\|\eta(x_0,y_n)\|^2\to$$
$$\bar{\lambda}f(x_0)+(1-\bar{\lambda})(f(y_0)+\varepsilon)-\beta\bar{\lambda}(1-\bar{\lambda})\|\eta(x_0,y_0)\|^2\quad(n\to\infty)$$

由于 $\varepsilon>0$ 可以任意的小,有 $f(z)\leqslant\bar{\lambda}f(x_0)+(1-\bar{\lambda})f(y_0)-\beta\bar{\lambda}(1-\bar{\lambda})\|\eta(x_0,y_0)\|^2$

这样与(8)式产生矛盾。故 f 在 K 上是关于 η 的强预不变凸函数。 证毕

定理 6 设集合 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集,η 满足条件 C,如果函数 $f:K\to\mathbf{R}$ 在 K 上是下半连续的,且满足 $f(y+\eta(x,y))\leqslant f(x)$,$\forall x,y\in K$,那么 f 在 K 上是关于 η 的强预不变凸函数当且仅当存在常数 $\bar{\beta}>0$ 使得对 $\forall x,y\in K$,$\exists\alpha\in(0,1)$,使得

$$f(y+\alpha\eta(x,y))\leqslant\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)-\bar{\beta}\alpha(1-\alpha)\|\eta(x,y)\|^2 \tag{10}$$

证明 必要性直接由 f 是关于 η 的强预不变凸函数得到。下证充分性。

假设 f 在 K 上不是关于 η 的强预不变凸函数,则对 $\forall\beta>0$,存在 $x,y\in K$ 和 $\bar{\lambda}\in(0,1)$,使得下式成立

$$f(y+\bar{\lambda}\eta(x,y))>\bar{\lambda}f(x)+(1-\bar{\lambda})f(y)-\beta\bar{\lambda}(1-\bar{\lambda})\|\eta(x,y)\|^2 \tag{11}$$

让
$$x_t=y+t\eta(x,y),t\in[\bar{\lambda},1],B=\{x_t\in K\mid t\in[\bar{\lambda},1],f(x_t)=f(y+t\eta(x,y))\leqslant$$
$$tf(x)+(1-t)f(y)-\beta t(1-t)\|\eta(x,y)\|^2\},u=\inf\{t\in[\bar{\lambda},1]\mid x_t\in B\}$$

由题目假设知 $f(y+\eta(x,y))\leqslant f(x)$,$\forall x,y\in K$,故 $x_1\in B$。而从(11)式知 $x_{\bar{\lambda}}\notin B$,所以 $x_t\notin B$,$\bar{\lambda}\leqslant t<u$。又存在序列 $\{t_n\}$,$t_n\geqslant u$,$x_{t_n}\in B$,使得 $t_n\to u(n\to\infty)$,于是由 f 是下半连续函数,有

$$f(x_u)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}f(x_{t_n})\leqslant\lim_{n\to\infty}\{t_nf(x)+(1-t_n)f(y)-\beta t_n(1-t_n)\|\eta(x,y)\|^2\}=$$

$$uf(x)+(1-u)f(y)-\beta u(1-u)\|\eta(x,y)\|^2$$

这样 $x_u\in B$。

类似地,让 $y_t=y+t\eta(x,y),t\in(0,\bar{\lambda}),D=\{y_t\in K\mid t\in[0,\bar{\lambda}),f(y_t)=f(y+t\eta(x,y))\leqslant$

$$tf(x)+(1-t)f(y)-\beta t(1-t)\|\eta(x,y)\|^2\},v=\sup\{t\in[0,\bar{\lambda})\mid y_t\in D\}$$

显然 $y_0=y\in D$,而由(11)式知 $y_{\bar{\lambda}}=y+\bar{\lambda}\eta(x,y)\notin D$,因此 $y_t\notin D,v<t\leqslant\bar{\lambda}$。

同样存在序列 $\{t_n\},t_n\leqslant v,y_{t_n}\in D$,使得 $t_n\to v(n\to\infty)$,再由 f 是下半连续函数,有

$$f(y_v)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}f(y_{t_n})\leqslant\lim_{n\to\infty}\{t_nf(x)+(1-t_n)f(y)-\beta t_n(1-t_n)\|\eta(x,y)\|^2\}=$$
$$vf(x)+(1-v)f(y)-\beta v(1-v)\|\eta(x,y)\|^2$$

故 $y_v\in D$。

从 u,v 的定义知,$0\leqslant v<\bar{\lambda}<u\leqslant1$

文献[8]在定理 3.2 的证明中推出了在条件 C 下,$x_u+\lambda\eta(y_v,x_u)=y+[\lambda v+(1-\lambda)u]\eta(x,y),\forall\lambda\in(0,1)$。

这样由 u,v 的定义,有

$$f(x_u+\lambda\eta(y_v,x_u))=f(y+[\lambda v+(1-\lambda)u]\eta(x,y))>$$
$$[\lambda v+(1-\lambda)u]f(x)+[1-\lambda v-(1-\lambda)u]f(y)-\beta[\lambda v+(1-\lambda)u][1-\lambda v-(1-\lambda)u]\|\eta(x,y)\|^2=$$
$$\lambda[vf(x)+(1-v)f(y)]+(1-\lambda)[uf(x)+(1-u)f(y)]-\beta[\lambda v+(1-\lambda)u][1-\lambda v-(1-\lambda)u]\|\eta(x,y)\|^2\geqslant$$
$$\lambda[f(y_v)+\beta v(1-v)\|\eta(x,y)\|^2]+(1-\lambda)[f(x_u)+\beta u(1-u)\|\eta(x,y)\|^2]-\beta[\lambda v+(1-\lambda)u][1-\lambda v-(1-\lambda)u]\|\eta(x,y)\|^2=\lambda f(y_v)+(1-\lambda)f(x_u)-\beta\|\eta(x,y)\|^2\{[\lambda v+(1-\lambda)u][1-\lambda v-(1-\lambda)u]-\lambda v(1-v)-(1-\lambda)u(1-u)\}$$

因为 $[\lambda v+(1-\lambda)u][1-\lambda v-(1-\lambda)u]-\lambda v(1-v)-(1-\lambda)u(1-u)=\lambda(1-\lambda)(u-v)^2$

仿照引理 1 中的证明又可得 $\eta(x_u,y_v)=\eta(y+u\eta(x,y),y+v\eta(x,y))=(u-v)\eta(x,y)$

故 $\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x_u,y_v)\|^2=\beta\lambda(1-\lambda)(u-v)^2\|\eta(x,y)\|^2$

这样

$$f(x_u+\lambda\eta(y_v,x_u))>\lambda f(y_v)+(1-\lambda)f(x_u)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x_u,y_v)\|^2\quad\forall\lambda\in(0,1)\tag{12}$$

到此证明了 $\forall\beta>0,\exists x_u,y_v\in K,\forall\lambda\in(0,1)$ 有(12)式成立。于是与(10)式产生矛盾,故假设成立,因此 f 在 K 上是关于 η 的强预不变凸函数。　证毕

参考文献:

[1] WEIR T,MOND B. Pre-invex Functions in Multiple Objective Optimization[J]. J Math Anal Appl,1988,136:29-38.
[2] WEIR T,JEYAKUMAR V. A Class of Nonconvex Functions and Mathematical Programming[J]. Bull Austral Math Soc,1988,38:177-189.
[3] 杨新民. 多目标分式规划解的一些必要条件[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版),1997,14(2):8-12.
[4] 杨新民. 凸函数的两个充分性条件[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版),1994,11(4):9-12.
[5] YANG X M. Semistrictly Preinvex Functions[J]. J Math Anal Appl 2001,258:287-308.
[6] RUIZ-GARZON G,OSUNA-GOMEZ R,RUFIAN-LIZANA A. Generalized Invex Monotonicity[J]. European Journal of Operational Research,2003,144:501-512.
[7] MOHAN S R,NEOGY S K. On Invex Sets and Preinvex Functions[J]. J Math Anal Appl,1995,189:901-908.
[8] YANG X M. On Properties of Preinvex Functions[J]. J Math Anal Appl,2001,256:229-241.

(责任编辑　黄　颖)