一类稀疏效应的捕食与食饵系统的定性分析*

申 治 华
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院，重庆 400047)

摘　要 :利用微分方程的定性理论,研究一类具有稀疏效应的捕食与食饵系统 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x^2(a-cx^2)+bxy\\ \dfrac{dy}{dt}=-cy+dxy\end{cases}$ 得到了平衡点的类型,极限环的存在与唯一性。

关键词 :平衡点 ;极限环 ;存在与唯一性
中图分类号 :Q141　　**文献标识码** :A　　**文章编号** :1672-6693(2005)01-0016-02

The Qualitative Analysis of a Class Prey-Predator System with Sparse Effect

SHEN Zhi-hua
(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Noraml University, Chongqing 400047, China)

Abstract :This paper studies the following prey-predator system with sparse effect $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x^2(a-cx^2)+bxy\\ \dfrac{dy}{dt}=-cy+dxy\end{cases}$ by using qualitalive theory of ordinary differential equation. The author has obtained the classification equilibrium point, the existence and uniqueness of the limit cycle.

Key words :equilibrium point ;limit cycle ;existence and uniqueness

在捕食与食饵系统的研究中,文献[1～5]给出了很多重要的结果,而文献[6]特别给出了具有稀疏效应的捕食—食饵系统,本文重点研究其中一类生态系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x^2(a-cx^2)+bxy\\ \dfrac{dy}{dt}=-cy+dxy\end{cases}\tag{1}$$

的平衡点及其类型,系统(1)中 x 表示食饵种群的密度,y 表示捕食种群的密度,常数 a、b、c、d 均具有一定生态意义的正常数。根据 x,y 的生态意义,仅在区域 $G=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$ 内进行研究。

对系统(1)作变换 $x=\dfrac{c}{d}\bar{x}$,$y=\dfrac{c}{b}\bar{y}$,$t=\dfrac{\tau}{c}$,则系统(1)可化为

$$\begin{cases}\dfrac{d\bar{x}}{d\tau}=\dfrac{a}{d}\bar{x}^2-\dfrac{c^3}{d^3}\bar{x}^4-\bar{x}\bar{y}\\ \dfrac{d\bar{y}}{d\tau}=\bar{y}(\bar{x}-1)\end{cases}$$

令 $a_2=\dfrac{a}{d}>0$,$a_4=\dfrac{c^3}{d^3}>0$,且仍用 x,y,t 表示 $\bar{x},\bar{y},\tau$ 可得到

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a_2x^2-a_4x^4-xy\\ \dfrac{dy}{dt}=y(x-1)\end{cases}\tag{2}$$

1　平衡点的分析

显然系统(2)有平衡点 $O(0,0)$,$R((a_2/a_4)^{\frac{1}{2}},0)$,当 $a_2>a_4$ 时有正平衡点 $S(1,a_2-a_4)$ 当 $a_2<a_4$

* 收稿日期 :2004-10-10
作者简介 :申治华(1946-),男,重庆人,副教授,主要从事常微分方程研究。

时系统(2)在 G 内无正平衡点，故此时 G 内无极限环。

定理 1　1）平衡点 $O(0,0)$ 为鞍点，在正 y 轴上的轨线指向 $O(0,0)$，在正 OX 轴上(原点附近)的轨线远离原点。

2）当 $a_2>a_4$ 时，$R((a_2/a_4)^{\frac{1}{2}},0)$ 为鞍点，当 $a_2<a_4$ 时，$R((a_2/a_4)^{\frac{1}{2}},0)$ 为稳定的结点。

3）当 $a_4<a_2<3a_4$ 时，$S(1,a_2-a_4)$ 为稳定的结点或焦点，当 $3a_4<a_2$ 时，$S(1,a_2-a_4)$ 为不稳定的结点或焦点。

证明　平衡点 $O(0,0)$ 为鞍点很容易证明，故略去。对于平衡点 $R((a_2/a_4)^{\frac{1}{2}},0)$ 很容易作出点 $R((a_2/a_4)^{\frac{1}{2}},0)$ 处的一次近似系统的特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$，其中 $P=(a_2/a_4)^{\frac{1}{2}}(a_2-1)+1$，$q=a_2(a_2/a_4)^{\frac{1}{2}}(1-(a_2/a_4)^{\frac{1}{2}})$。

当 $a_2>a_4$ 时，$q<0$，故点 $R((a_2/a_4)^{\frac{1}{2}},0)$ 为近似系统的鞍点，由文献[7]中的定理 4.1 知点 $R((a_2/a_4)^{\frac{1}{2}},0)$ 也是原系统(2)的鞍点。

当 $a_2<a_4$ 时，$q>0$，$p>0$，故点 $R((a_2/a_4)^{\frac{1}{2}},0)$ 为近似系统的稳定结点，由文献[7]中定理 4.1 知点 $R((a_2/a_4)^{\frac{1}{2}},0)$ 为原系统(2)的稳定结点，此时在 G 内无正平衡点，从而 G 内无极限环。

当 $a_2>a_4$ 时，在 G 内有正平衡点 $S(1,a_2-a_4)$，在点 $S(1,a_2-a_4)$ 的一次近似系统的特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 中 $p=3a_4-a_2$，$q=a_2-a_4>0$，故当 $3a_4>a_2>a_4$ 时，$p>0$，平衡点 $S(1,a_2-a_4)$ 为近似系统的稳定的结点或焦点。当 $3a_4<a_2$ 时，$p<0$，$S(1,a_2-a_4)$ 为一次近似系统的不稳定结点或焦点，由文献[7]中定理 4.1 知点 $S(1,a_2-a_4)$ 为原系统(2)的稳定或不稳定的结点或焦定。

2　极限环的存在与唯一性

定理 2　当 $a_2>3a_4$ 时，系统(2)存在唯一稳定的极限环。

证明　先证存在性，对系统(2)作 Bendixson 环域 $D\ \widehat{ORCBAO}$，如图 1 所示，其中 OR 为直线 L_1：$y=0$ 的一段，RC 为直线 L_2：$x=(a_2/a_4)^{\frac{1}{2}}$，$CB$ 为直线 L_3：$x+y-H=0$的一段，BA 为直线 L_4：$y+1-H=0$ 的一段，AO 为直线 L_5：$x=0$ 的一段。

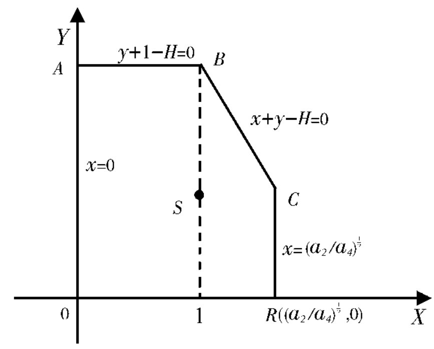

图 1　对系统（2）作 Bendixson 环域

因 $a_2>a_4$，故 G 内的正平衡点 $S(1,a_2-a_4)$ 在直线 $x=0$ 与 $x=(a_2/a_4)^{\frac{1}{2}}$ 之间，只要 H 充分的大，平衡点 $S(1,a_2-a_4)$ 始终可包含于 G 内。

因直线 $y=0$ 和直线 $x=0$ 为轨线，而在 RC 上，$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{L_2}=[a_2x^2-a_4x^4-xy]_{x=(a_2/a_4)^{\frac{1}{2}}}=-(a_2/a_4)^{\frac{1}{2}}y<0$。在直线 L_3 上，$\frac{d}{dt}(x+y-H)|_{L_3}=[a_2x^2-a_4x^4-xy+y(x-1)]_{L_3}=a_2x^2-a_4x^4+x-H$，取 $M=\max[a_2x^2-a_4x^4+x]$，$x\in[1,(a_2/a_4)^{\frac{1}{2}}]$，则可取 H 充分的大，使 $H>\max\{1,M\}$，则必有 $\frac{d}{dt}(x+y-H)|_{L_3}<0$。在直线 L_4 上，有 $\left.\frac{d}{dt}(y+1-H)\right|_{L_4}=\left.\frac{dy}{dt}\right|_{L_4}=y(x-1)|_{y=H-1}=(H-1)(x-1)$，因 $H>1$ 且 $x\leqslant 1$，知 $\frac{d}{dt}(y+1-H)|_{L_4}\leqslant 0$。

因此在直线段 RC，CB，BA 上系统(2)的轨线均指向区域 D 的内部，且当 $a_2>a_4$ 时平衡点 $S(1,a_2-a_4)$ 为系统(2)的不稳的结点或焦点，由 Poincare-Bendixson 环域定理[4]知，系统(2)在 D 内的平衡点 S 的外围至少存在一个稳定的极限环，即在 G 内系统(2)至少存在一个稳定的极限环。

再证唯一性，用张芷芬[7]唯一性定理证明。对于系统(2)作变换 $x=e^u$，$y=(a_2-a_4)e^v$，则区域 $G=\{(x,y)|x>0,y>0\}$ 变为 $G'=\{(u,v)|,-\infty<u<+\infty,-\infty<v<+\infty\}$，系统(2)变为

$$\begin{cases}\frac{du}{dt}=-F(u)-\varphi(v)\\ \frac{dv}{dt}=g(u)\end{cases}\tag{3}$$

其中 $F(u)=a_4e^{3u}-a_2e^u+a^2-a_4$，$\varphi(v)=(a_2-a_4)\cdot(e^v-1)$，$g(u)=e^u-1$，$f(u)=F'(u)=3a_4e^{3u}-a_2e^u$。

(下转 20 页)