集值映射向量优化问题的最优性条件*

龙宪军[1], 毛小红[2]
(1. 重庆师范大学 数学与计算机科学学院, 重庆 400047; 2. 重庆医科大学 附属小学, 重庆 400016)

摘 要: 在实拓扑向量空间中,利用择一性定理,获得了关于近似锥次类凸集值映射向量优化问题的最优性充分必要条件,并加以了证明。所得结果推广和改进了一些最新的结果。

关键词: 向量优化问题; 集值映射; 优化条件; 择一性定理; 近似锥次类凸
中图分类号: O224 **文献标识码**: A **文章编号**: 1672-6693(2005)01-0021-02

The Optimality Conditions of Vector Optimization with Set-Valued Maps

LONG Xian-jun[1], *MAO Xiao-hong*[2]
(1. College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047;
2. Affiliated Elementary School, Chongqing Medical University, Chongqing 400016, China)

Abstract: Under assumption of real linear topological vector spaces, necessary and sufficient optimality conditions for vector optimization of set-valued maps with near cone-subconvexlikness are obtained and proved by applying the theorem of the alternative. The results generalizes and improves the some new results.

Key words: vector optimization, set-valued maps; optimality conditions; alternative theorems, near cone-subconvexlike

近年来,对锥凸向量集值优化最优性条件的研究取得了许多很好的结果[1,2]。文献[3~6]又将这些结果推广到了锥类凸及锥次类凸集值映射的优化问题。本文在实拓扑向量空间中,利用择一性定理,获得了关于近似锥次类凸集值映射向量优化问题的最优性充分必要条件,是对已有结果的推广。

1 预备知识

设 Y 为实拓扑向量空间,Y^* 为 Y 的共轭空间,C 为 Y 内非空子集,$\mathrm{cl}\ C$ 表示 C 的闭包,$\mathrm{int}\ C$ 表示 C 的内部。若由 $c\in C,\lambda\geqslant 0$ 有 $\lambda c\in C$,则称 C 为锥;锥 C 若满足 $C\cap -C=\{0\}$,则称 C 为点锥。锥 $C\subset Y$ 的共轭正锥 C^+ 定义为

$$C^+=\{\varphi\in Y^*\mid\varphi(c)\geqslant 0,\forall c\in C\}$$

设 $A\subset Y$,则由 A 生成的锥定义为

$$\mathrm{cone}A=\{\lambda a\mid a\in A,\lambda\geqslant 0\}$$

设 X 是任一非空集合,Y,Z,W 为实线性空间,$C\subset Y,D\subset Z,K\subset W$ 分别是 Y,Z,W 中的闭凸点锥,$F:X\to 2^Y$,$G:X\to 2^Z$,$H:X\to 2^W$ 为 3 个集值映射。

考虑如下向量值优化问题(VP):

$$\min F(X)$$
$$\text{s. t. } G(x)\cap(-D)\neq\varnothing,$$
$$0\in H(x),x\in X$$

记 $A=\{x\in X\mid G(x)\cap(-D)\neq\varnothing,0\in H(x)\}$ 为(VP)的可行集。记 $F(A)=\cup_{x\in A}F(x)$

定义 1[4] 称 $x_0\in A$ 是(VP)的弱有效解,如果存在 $y_0\in F(x_0)$ 使得

$$(F(A)-y_0)\cap(-\mathrm{int}C)=\varnothing$$

称(x_0,y_0)为(VP)的弱有效元,若 $x_0\in A,y_0\in F(x_0)$ 且$(F(A)-y_0)\cap(-\mathrm{int}C)=\varnothing$。

定义 2[7] 集值映射 $F:X\to 2^Y$ 在 X 上称为近似 C-锥次类凸,如果 $\mathrm{cl\ cone}(F(A)+C)$ 是凸集。

引理 1[7] (择一性定理)设集值映射 $F:X\to 2^Y$ 在 X 上是近似 C-锥次类凸,则以下两个系统有且只有一个成立。

1) $\exists x\in X$,使得 $F(x)\cap(-\mathrm{int}C)\neq\varnothing$;

2) $\exists\varphi\in C^+\setminus\{0\}$,使得 $\varphi(y)\geqslant 0,\forall y\in F(X)$。

引理 2[4] 如果 $\varphi\in C^+\setminus\{0\}$,且 $y_0\in\mathrm{int}C$,则 $\varphi(y_0)>0$。

---

* 收稿日期:2004-06-14
作者简介:龙宪军(1980-),男,重庆永川人,硕士研究生,主要研究方向为数学规划与算法。

2 最优性条件

定理1(最优性必要条件) 假设1)(x_0,y_0)为(VP)的弱有效元,2)$(F-y_0)\times G(x)\times H(x)$在$A$上是近似$C$-锥次类凸。则$\exists\varphi\in C^+,\psi\in D^+,\phi\in K^+$,且$(\varphi,\psi,\phi)\neq(0,0,0)$使得下列等式成立。

$$\min_{x\in A}(\varphi(F(x))+\psi(G(x))+\phi(H(x)))=\varphi(y_0)$$

$$\min\psi(G(x_0)+\phi(H(x_0)))=0$$

$$\min\psi(G(x_0))=0$$

证明 由定义1知$(F(A)-y_0)\cap(-\mathrm{int}C)=\varnothing$,因此,$(F(x)-y_0)\times G(x)\times H(x)\cap(-\mathrm{int}(C\times D\times K))=\varnothing,\forall x\in A$。

于是由假设2)和引理1可知,$\exists\varphi\in C^+,\psi\in D^+,\phi\in K^+$,且$(\varphi,\psi,\phi)\neq(0,0,0)$,使得$\varphi(F(x)-y_0)+\psi(G(x))+\phi(H(x))\geqslant0,\forall x\in A$,即

$$\varphi(F(x))+\psi(G(x))+\phi(H(x))\geqslant\varphi(y_0),\forall x\in A \quad (1)$$

由于$x_0\in A$,因此$\exists p\in G(x_0)$使得$-p\in D$。但是$\psi\in D^+$,则$\psi(p)\leqslant0$。另一方面,在(1)式中令$x=x_0$,由于$0\in H(x_0)$,因此$\varphi(y_0)+\psi(p)+\phi(0)\geqslant\varphi(y_0)$,故$\psi(p)\geqslant0$,从而$\psi(p)=0$。因此$\varphi(y_0)\in\psi(F(x_0))+\psi(G(x_0))+\phi H(x_0)$。于是由(1)式得

$$\min_{x\in A}(\varphi(F(x))+\psi(G(x))+\phi(H(x)))=\varphi(y_0)$$

在(1)式中再令$x=x_0$可得

$$\varphi(y_0)+\psi(G(x_0))+\phi(H(x_0))\geqslant\varphi(y_0)$$

因此$\varphi(G(x_0))+\phi(H(x_0))\geqslant0$,又由上面的证明可知,$\exists p\in G(x_0)$使得$\psi(p)=0$,并且由于$0\in H(x_0)$,因此

$$\min(\psi(G(x_0))+\phi(H(x_0)))=0$$

在(1)式中又令$x=x_0$,可得$\varphi(y_0)+\psi(G(x_0))+\phi(0)\geqslant\varphi(y_0)$。从而$\psi(G(x_0))\geqslant0$,故

$$\min\psi G(x_0)=0$$

定理1推广了文献[4]的定理3.1和文献[5]的定理4.2。

定理2(最优性充分条件) 假设

1) $x_0\in A,y_0\in F(x_0)$;

2) $\exists(\varphi,\psi,\phi)\in C^+\times D^+\times K^+$且$(\varphi,\psi,\phi)\neq(0,0,0)$使得$\min_{x\in A}(\varphi(F(x))+\psi(G(x))+\phi(H(x)))=\varphi(y_0)$;

3) $\exists\bar{x}\in X$使得$0\in H(\bar{x}),G(\bar{x})\cap(-\mathrm{int}\,D)\neq\varnothing,0\in\mathrm{int}\,H(x)$。

则(x_0,y_0)是(VP)的弱有效元。

证明 由假设2)可得

$$\varphi(F(x)-y_0)+\psi(G(x))+\phi(H(x))\geqslant0,\forall x\in X \quad (2)$$

首先,可以证明$\varphi\neq0$。用反证法,假设$\varphi=0$,则$(\psi,\phi)\neq0$。下面分两种情况进行讨论:

a)当$\psi\neq0$时,(2)式就化为

$$\psi(G(x))+\phi(H(x))\geqslant0,\forall x\in X \quad (3)$$

由假设3),$\exists u\in G(\bar{x})$,使得$-u\in\mathrm{int}\,D$。故由引理2得$\psi(u)<0$。注意到$0\in H(\bar{x})$,于是可得$\psi(u)+\phi(0)<0$,此式与(3)式矛盾。

b)当$\psi=0$时,则$\phi\neq0$,(2)式化为

$$\phi(H(X))\geqslant0 \quad (4)$$

因$0\in\mathrm{int}\,H(X)$,所以对任意给定$v\in\mathrm{int}\,K$,$\exists\varepsilon>0$,使得$-\varepsilon v\in\mathrm{int}(H(X))$,故$\phi(-\varepsilon v)=-\varepsilon\phi(v)<0$,这与(4)式矛盾。由a)和b)可知$\varphi\neq0$。

如果(x_0,y_0)不是(VP)的弱有效元,则$\exists x^*\in A$使得$(y_0-F(x^*))\cap\mathrm{int}C\neq\varnothing$。从而$\exists t\in F(x^*)$使得$y_0-t\in C$,由引理2得

$$\varphi(t-y_0)<0 \quad (5)$$

又因为$x^*\in A$,故$\exists q\in G(x^*)$,使得$-q\in D$,且$0\in H(x^*)$。所以

$$\psi(q)+\phi(0)\leqslant0 \quad (6)$$

(6)式+(5)式得

$$\varphi(t-y_0)+\psi(q)+\phi(0)<0$$

这与(2)式矛盾,所以$x_0\in A$是(VP)的弱有效解。

定理2推广了文献[4]的定理3.3。

参考文献:

[1] CORLEY H W. Optimality Conditions for Maximizations of Set-valued Functions[J]. J Optim Theory Appl,1988,58:1-10.

[2] LIU L J. Optimization of Set-valued Functions[J]. J Math Anal Appl,1994,186:30-51.

[3] 彭建文. 集值映射向量优化问题的ε-弱有效解[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版),1999,16(4):31-36.

[4] LI Z M. The Optimality Condition for Vector Optimization of Set-valued Maps[J]. J Math Anal Appl,1999,237:413-424.

[5] YANG X M,YANG X Q,CHEN G Y. Theorems of the Alternative and Optimization with Set-valued Maps[J]. J Optim Theory Appl,2000,107:627-640.

[6] 于辉. 关于向量集值优化问题的几个注解[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版),1999,16(2):49-52.

[7] YANG X M,LI D,WANG S Y. Near-subconvexlikeness in Vector Optimization with Set-valued Functions[J]. J Optim Theory Appl,2001,110:413-427.

(责任编辑 黄 颖)