2005 年 6 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Jun. 2005
第 22 卷 第 2 期 Journal of Chongqing Normal University(Natural Science Edition) Vol. 22 No. 2

广义凸性下多目标分式规划的鞍点及对偶*

陆 海 龙
(浙江师范大学 数理学院, 浙江 金华 321004)

摘 要 通过对文献中的择一定理作了一些修改,证明了一个引理,并利用这个引理在次似凸及广义次似凸的条件下,讨论了多目标广义分式规划的有效解,通过对其鞍点型最优性条件以及 Lagrange 对偶的研究,在更弱的条件下得到了相应的结果。

关键词 :次似凸 ;广义次似凸 ;有效解 ;鞍点 ;Lagrange 对偶
中图分类号 :O221.2 **文献标识码** :A **文章编号** :1672-6693(2005)02-0006-03

Saddle-Point and Duality of Multiple-Criteria Fractional Programming Problems with Generalized Convexity

LU Hai-long
(College of Mathematics and Physics, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang 321004, China)

Abstract :For a general multiple-criteria nonlinear fractional programming problem, we propose the saddle-point type optimality criteria and Lagrange duality theorems with subconvexlikeness and generalized subconvexlikeness, in which efficiency is involved.

Key words :subconvexlike ;generalized subconvexlike ;efficiency ;saddle-point ;Lagrange duality

Lagrange 鞍点以及对偶一直是最优化理论中很吸引人的一个主题,许多学者做过研究,特别是关于多目标规划[1~6]。但他们大多只讨论弱有效解以及真有效解的情况。在这些研究中,一个重要的问题是如何减弱条件得到相应的结果。

本文考虑如下多目标分式规划(VFP)

$$\min E(x) = (E_1(x), E_2(x), \cdots, E_p(x))$$
$$\text{s.t. } h(x) \leqslant 0,\ x \in C$$

其中 C 是 $\mathbf{R}^n$ 的子集,$E_i(x) = \dfrac{f_i(x)}{g_i(x)}(i = 1, 2, \cdots, p)$ f, g: $C \to \mathbf{R}^n$ 以及 h: $C \to \mathbf{R}^m$ 且 $g(x) > 0, \forall x \in C$。

记(VFP)的可行集 $X = \{x \in C:\ h(x) \leqslant 0\}$。

在最优性条件的讨论中,择一定理起着非常重要的桥梁作用。在文献[7]中,杨新民进一步推广了函数的凸性,给出了广义次似凸函数的概念,并在文献[7,8]中对这类函数证明了两个择一定理,现引述如下。

定义 1[7] 设 f: $C \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ 是向量值函数。则称 f 在 C 上是广义次似凸的,如果存在 $u \in \mathbf{R}^p$, $u > 0$,对任意的 $\alpha \in (0,1)$, $\varepsilon > 0$ 以及 $x_1, x_2 \in C$,存在 $\rho > 0$, $x_3 \in C$ 使得

$$\varepsilon u + \alpha f(x_1) + (1 - \alpha) f(x_2) \geqslant \rho f(x_3)$$

称 f 在 C 上是次似凸的,如果存在 $u \in \mathbf{R}^p$, $u > 0$,对任意的 $\alpha \in (0,1)$, $\alpha > 0$ 以及 $x_1, x_2 \in C$,存在 $\rho > 0$, $x_3 \in C$ 使得

$$\varepsilon u + \alpha f(x_1) + (1 - \alpha) f(x_2) \geqslant f(x_3)$$

定理 1[7] 设 $C \subseteq \mathbf{R}^n$ 是非空集合, $f = (f_1, \cdots, f_p)$:$C \to \mathbf{R}^p$ 是广义次似凸的,那么下面两种情况恰有一种发生

1) $f(x) < 0$ 有一个解 $x \in C$;

2) 存在 $\lambda \in \mathbf{R}^p$, $\lambda \geqslant 0$ 使得 $\lambda^{\mathrm{T}} f(x) \geqslant 0, \forall x \in C$。

定理 2[8] 设 $C \subseteq \mathbf{R}^n$ 是非空集合, $f = (f_1, \cdots, f_p)$: $C \to \mathbf{R}^p$。假设对任意 $\varepsilon \in \mathbf{R}^p_{++}$, $f - \varepsilon$ 是广义次似凸的, $f_1, f_2, \cdots, f_p$ 是定义在 C 上的下半连续实值

* 收稿日期 :2004-10-12 修回日期 :2005-01-20
作者简介 :陆海龙(1978-),男,浙江宁波人,硕士研究生,主要研究方向为最优化理论。

函数。那么 $f(x)\leqslant 0$ 不相容当且仅当,存在 $\lambda\in\mathbf{R}^p$,$\lambda>0$,使得 $\lambda^{\mathrm{T}}f(x)>0,\forall x\in C$。

推论 1[8]　在定理 2 中,设 f 是次似凸的,其他条件不变,则结论仍成立。

文献[1]利用文献[7]中给出的广义次似凸函数和一个择一定理(即定理 1)讨论了一般多目标规划的弱有效解以及真有效解的鞍点和对偶。

本文对文献[8]中的择一定理作了一些修改,证明了一个引理,并利用这个引理,在次似凸及广义次似凸的条件下,讨论多目标分式规划有效解的鞍点型最优性条件及 Lagrange 对偶的一些结果。相比现有文献,本文在更弱的条件下得到了相应的结果。

1　基本概念和引理

首先,介绍几个记号和定义。设

$x=(x_1,\cdots,x_p)^{\mathrm{T}},y=(y_1,\cdots,y_p)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^p$,则

$x=y\Leftrightarrow x_i=y_i,i=1,\cdots,p$;

$x\leqslant y\Leftrightarrow x_i\leqslant y_i,i=1,\cdots,p$;

$x\leqslant y\Leftrightarrow x_i\leqslant y_i,i=1,\cdots,p$;且至少存在一个 i 使得不等式严格成立;

$x<y\Leftrightarrow x_i<y_i,i=1,\cdots,p$;

定义 2　$\bar{x}\in X$ 称为(VFP)的一个有效解,如果不存在 $x\in X$ 使得 $E(x)\leqslant E(\bar{x})$。

下面定义一个辅助的参数规划(VP_e)

$$\min_{x\in X}\Phi(x,e)=(\Phi_1(x,e),\Phi_2(x,e),\cdots,\Phi_p(x,e))$$

其中　$e=(e_1,\cdots,e_p)^{\mathrm{T}}\in R^p$,

$\Phi_i(x,e)=f_i(x)-e_ig_i(x),i=1,\cdots,p$。

容易验证下面的引理。

引理 1　1)若 $\bar{x}$ 是(VFP)的有效解且 $\bar{e}=E(\bar{x})$,则 $\bar{x}$ 是(VP_e)的有效解;

2)若 $\bar{x}$ 是(VP_e)的有效解且 $\Phi(\bar{x},\bar{e})=0$,则 $\bar{x}$ 是(VFP)的有效解。

为得到主要结果,先给出如下引理。

引理 2　设 $C\subseteq\mathbf{R}^n$ 是非空集合,f: $C\to\mathbf{R}^p$,h: $C\to\mathbf{R}^m$,假设对任意 $\varepsilon\in\mathbf{R}^p_{++}$,$(f-\varepsilon,h)$ 是广义次似凸的 $f_1,f_2,\cdots,f_p$ 是定义在 C 上的下半连续实值函数。若 $f(x)\leqslant 0$ 在 C 上无解,则存在 $\bar{\lambda}\in\mathbf{R}^p$,$\bar{\lambda}>0$,$\bar{\mu}\in\mathbf{R}^m$,$\bar{\mu}\geqslant 0$ 使得

$$\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}f(x)+\bar{\mu}^{\mathrm{T}}h(x)>0,\forall x\in C \tag{1}$$

证明　若 $f(x)\leqslant 0$ 在 C 上无解,可知存在 $\varepsilon_0\in\mathbf{R}^p_{++}$,使得

$$f(x)<\varepsilon_0 \tag{2}$$

在 C 无解。若不然,对任意的 $k\in\mathbf{N}$,令 $\varepsilon_k=(1/k,\cdots,1/k)\in\mathbf{R}^p_{++}$,$f(x)<\varepsilon_0$ 在 C 上有解,即存在 $\{x_k\}\subseteq C$ 使得 $f(x_k)<\varepsilon_k$. 又 C 是紧集,知 $\{x_k\}$ 存在子列 $\{x_{k_j}\}$,且 $x_{k_j}\to\bar{x}\in C$. 再根据 $f(x)$ 是下半连续的,可知

$$f(\bar{x})\leqslant\lim_{j\to\infty}\ \inf f(x_{k_j})\leqslant 0$$

这与 $f(x)\leqslant 0$ 在 C 上无解是矛盾的。由(2)式在 C 上无解可知 $f(x)<\varepsilon_0$,$h(x)<0$ 在 C 上无解。由定理 1 可知存在 $(\bar{\lambda}_1,\bar{\mu})\in\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^m$,$(\bar{\lambda}_1,\bar{\mu})\geqslant 0$ 使得

$$\bar{\lambda}_1^{\mathrm{T}}(f(x)-\varepsilon_0)+\bar{\mu}^{\mathrm{T}}h(x)\geqslant 0,\forall x\in C$$

即

$$\bar{\lambda}_1^{\mathrm{T}}f(x)+\bar{\mu}^{\mathrm{T}}h(x)\geqslant\bar{\lambda}_1^{\mathrm{T}}\varepsilon_0>0,\forall x\in C$$

另一方面由定理 2 知存在 $\bar{\lambda}_2\in\mathbf{R}^p$,$\bar{\lambda}_2>0$,使得

$$\bar{\lambda}_2^{\mathrm{T}}f(x)>0,\forall x\in C$$

再令 $\bar{\lambda}=\bar{\lambda}_1+\bar{\lambda}_2>0$,将上两式相加即得(1)式。

证毕

注　由推论 1 可知,在引理 2 中设 (f,h) 是次似凸的,其他条件不变,结论仍成立。

2　鞍点条件

先给出(VFP)广义鞍点的定义,对任意 $(x,\mu)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m$,记

$$L(x,\mu)=(E_1(x)+\sum_{j=1}^m\mu_jh_j(x)/g_1(x),\cdots,E_p(x)+\sum_{j=1}^m\mu_jh_j(x)/g_p(x))^T \tag{3}$$

定义 3[2]　称 $(\bar{x},\bar{\mu})\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m$ 是问题(VFP)的广义 Lagrange 鞍点,若 $\bar{\mu}\geqslant 0$,且下式成立

$$\begin{cases}L(\bar{x},\mu)\leqslant L(\bar{x},\bar{\mu}),\forall\mu\in R^m,\mu\geqslant 0\\ L(\bar{x},\bar{\mu})\ngeq L(\bar{x},\bar{\mu}),\forall x\in C。\end{cases} \tag{4}$$

根据上面关于广义 Lagrange 鞍点的定义,先给出(VFP)有效解的鞍点型充分条件。

定理 3　若存在 $\bar{x}\in C$,$\bar{\mu}\in\mathbf{R}^m$ 且 $\bar{\mu}\geqslant 0$,使得 $(\bar{x},\bar{\mu})$ 是(VFP)的广义 Lagrange 鞍点,则 $\bar{x}$ 是(VFP)的有效解。

证明　由(4)式的前半部分以及 $g_i(\bar{x})>0$ 可知 $\sum_{j=1}^m\mu_jh_j(\bar{x})\leqslant\sum_{j=1}^m\bar{\mu}_jh_j(\bar{x})$,即

$$\sum_{j=1}^m(\mu_j-\bar{\mu}_j)h_j(\bar{x})\leqslant 0,\forall\mu\in\mathbf{R}^m,\mu\geqslant 0 \tag{5}$$

取定一些 μ 的值即可知 $h_j(\bar{x})\leqslant 0$,$(j=1,\cdots,m)$,即 $\bar{x}$ 对(VFP)可行。又 $\bar{\mu}\geqslant 0$,所以有 $\sum_{j=1}^m\bar{\mu}_jh_j(\bar{x})\leqslant 0$。另一方面在(5)式中令 $\mu=0$ 得 $\sum_{j=1}^m\bar{\mu}_jh_j(\bar{x})\geqslant 0$。从而可知 $\sum_{j=1}^m\bar{\mu}_jh_j(\bar{x})=0$。

若 $\bar{x}$ 不是(VFP)的有效解,则存在 $\hat{x}\in X$ 使得

$E(\hat{x})\leqslant E(\bar{x})$. 又 $\hat{x}$ 对(VFP)可行,$\bar{\mu}\geqslant 0$,知 $\sum_{j=1}^{m}\bar{\mu}_j h_j(\hat{x})\leqslant 0$。又 $g_i(\hat{x})>0, g_i(\bar{x})>0(i=1,2,\cdots,p)$,有 $\sum_{j=1}^{m}\bar{\mu}_j h_j(\hat{x})/g_i(\hat{x})\leqslant 0, \sum_{j=1}^{m}\bar{\mu}_j h_j(\bar{x})/g_i(\bar{x})=0$,从而可知 $L(\bar{x},\bar{\mu})\geqslant L(\hat{x},\bar{\mu})$。

这与(4)式的后半部分矛盾,从而可知 $\bar{x}$ 是(VFP)的有效解。 证毕

下面利用引理2,在次似凸的条件下证明(VFP)有效解的鞍点型充分条件的必要性。

定理4 设 $C\subseteq \mathbf{R}^n$ 是非空紧集,$\bar{x}$ 是(VFP)的有效解,且 $\bar{e}=E(\bar{x})$。假设对 $\forall \varepsilon\in \mathbf{R}^p_{++}$,$(\Phi(x,\bar{e})+\varepsilon, h(x))$ 为次似凸函数,$\Phi_i(x,\bar{e})=f_i(x)-\bar{e}_i g_i(x)$,$(i=1,\cdots,p)$ 为 C 上的下半连续函数,则存在 $\bar{\mu}\in \mathbf{R}^m$,$\bar{\mu}\geqslant 0$,使得 $(\bar{x},\bar{\mu})$ 是(VFP)的广义 Lagrange 鞍点。

证明 若 $\bar{x}$ 是(VFP)的有效解,$\bar{e}=E(\bar{x})$,由引理1知 $\bar{x}$ 也是($VP_{\bar{e}}$)的有效解,可知下系统

$$f_i(x)-\bar{e}_i g_i(x)\leqslant 0, i=1,2,\cdots,p$$

在 C 上无解。亦即对任意的 $\varepsilon>0$ 下系统

$$f_i(x)-\bar{e}_i g_i(x)+\varepsilon\leqslant 0, i=1,2,\cdots,p \tag{6}$$

在 C 上无解。由定理的假设条件,利用引理2及注可知存在 $\bar{\lambda}\in \mathbf{R}^p$,$\bar{\lambda}>0$,$\bar{\mu}\in \mathbf{R}^M$,$\bar{\mu}\geqslant 0$,使得 $\sum_{i=1}^{p}\bar{\lambda}_i(f_i(x)-\bar{e}_i g_i(x))+\sum_{i=1}^{p}\bar{\lambda}_i\varepsilon+\sum_{j=1}^{m}\bar{\mu}_j h_j(x)>0$, $\forall x\in C$。由 $\bar{\lambda}>0$,不妨令 $\sum_{i=1}^{p}\bar{\lambda}_i=1$,又由 ε 可任意小,知

$$\sum_{i=1}^{p}\bar{\lambda}_i(f_i(x)-\bar{e}_i g_i(x))+\sum_{j=1}^{m}\bar{\mu}_j h_j(x)\geqslant 0, \forall x\in C \tag{7}$$

在(7)式中令 $x=\bar{x}$,由 $\Phi(\bar{x},\bar{e})=0$ 即得 $\sum_{j=1}^{m}\bar{\mu}_j h_j(\bar{x})\geqslant 0$;另一方面由 $\bar{\mu}\geqslant 0$,$h(\bar{x})\leqslant 0$,知 $\sum_{j=1}^{m}\bar{\mu}_j h_j(\bar{x})\leqslant 0$,从而可知

$$\sum_{j=1}^{m}\bar{\mu}_j h_j(\bar{x})=0 \tag{8}$$

则对任意的 $\mu\in \mathbf{R}^m$,$\mu\geqslant 0$,显然有 $L(\bar{x},\bar{\mu})\leqslant L(\bar{x},\mu)$。(4)式的前半部分证毕。

若存在 $\hat{x}\in C$ 使得 $L(\bar{x},\bar{\mu})\geqslant L(\hat{x},\bar{\mu})$,再由(8)式以及 $g_i(\hat{x})>0$,可知

$$(f_i(\hat{x})-\bar{e}_i g_i(\hat{x}))+\sum_{j=1}^{m}\bar{\mu}_j h_j(\hat{x})\leqslant 0, i=1,2,\cdots,p$$

且上述不等式至少有一个严格成立,分别乘系数 $\bar{\lambda}_j>0$,注意到 $\sum_{j=1}^{p}\lambda_i=1$,相加即得

$$\sum_{i=1}^{p}\bar{\lambda}_i(f_i(\hat{x})-\bar{e}_i g_i(\hat{x}))+\sum_{j=1}^{m}\bar{\mu}_j h_j(\hat{x})<0$$

这与(7)式矛盾,从而(4)式后半部分证毕。所以 $(\bar{x},\bar{\mu})$ 是(VFP)的广义 Lagrange 鞍点。 证毕

3 Lagrange 对偶

在这部分考虑(VFP)有效解的 Lagrange 对偶,定义 Lagrange 函数 $L(x,\mu)$ 如(3)式,其中 $x\in C$,$\mu\in u=\{\mu\in \mathbf{R}^m: \mu_j\geqslant 0\}$. 再记 $\rho(\mu)$ 为下述多目标问题的有效解集合

$$(VP_m)\quad \min_{x\in C} L(x,\mu)$$

记 $\Omega(\mu)=\{L(x,\mu), x\in\rho(\mu)\}$,构造(VFP)的对偶问题(DVP)如下。

$$(DVP)\quad \max\Omega(\mu)$$
$$\text{s.t.}\quad \mu\in u$$

接下来证明(VFP)和(DVP)之间的对偶定理。

定理5(弱对偶) 对任意的 $x\in X$ 和任意的 $y\in\bigcup_{\mu\in u}\Omega(\mu)$,都有 $y\ngeq E(x)$。

证明 设 $y\in\bigcup_{\mu\in u}\Omega(\mu)$,则存在 $\hat{\mu}\in u$,使得 $y\in\Omega(\hat{\mu})$. 由 $\Omega(\hat{\mu})$ 和有效解的定义可知不存在 $x\in C$ 使得

$$L(x,\hat{\mu})\leqslant y \tag{9}$$

又对任意的 $x\in X$,$h(x)\leqslant 0$ 且 $\hat{\mu}\geqslant 0$,从而 $\hat{\mu}^T h(x)\leqslant 0$。又 $g_i(x)>0$,即有

$$\sum_{j=1}^{m}\hat{\mu}_j h_j(x)/g_i(x)\leqslant 0, i=1,2,\cdots,p$$

若存在 $\hat{x}\in X$ 使得 $y\geqslant E(x)$,则由上式可知 $y\geqslant L(\hat{x},\hat{\mu})$,这与(9)式在 C 上无解矛盾。 证毕

定理6(强对偶) 设 C 是非空紧集,$\bar{x}$ 是(VFP)的有效解,且 $\bar{e}=E(\bar{x})$. 假设对任意的 $\varepsilon\in \mathbf{R}^p_{++}$,$(\Phi(x,\bar{e})+\varepsilon, h(x))$ 为次似凸函数,$\Phi_i(x,\bar{e})=f_i(x)-\bar{e}_i g_i(x)$ $(i=1,\cdots,p)$ 为 C 上的下半连续函数,则 $E(\bar{x})$ 是(DVP)的有效解。

证明 首先由定理4可知,存在 $\bar{\mu}\in \mathbf{R}^m$,$\bar{\mu}\geqslant 0$,使得 $(\bar{x},\bar{\mu})$ 是(VFP)的广义 Lagrange 鞍点。且 $\sum_{j=1}^{m}\bar{\mu}_j h_j(\bar{x})=0$。下面证明 $\bar{x}$ 是(VP_μ)的有效解,

$$(VP_\mu)\quad \min_{x\in C} L(x,\mu)$$

若不然,则存在 $\hat{x}\in C$,使得 $L(\hat{x},\bar{\mu})\leqslant L(\bar{x},\bar{\mu})$,这与(4)式的后半部分矛盾。从而可知 $E(\bar{x})\in\Omega(\bar{\mu})$,即 $E(\bar{x})$ 对(DVP)可行。

现在假设 $E(\bar{x})$ 不是(DVP)的有效解,则存在 $\hat{y}\in\bigcup_{\mu\in u}\Omega(\mu)$,使得

$$E(\bar{x})\leqslant\hat{y} \tag{10}$$

又知存在 $\hat{\mu}\in u$,使得 $\hat{y}\in\Omega(\hat{\mu})$. 又 $\hat{\mu}\geqslant 0$,$h(\bar{x})\leqslant 0$,

(下转20页)

(上接 8 页)

$g_i(\bar{x}) > 0$ 可知

$$\sum_{j=1}^{m} \hat{\mu}_j h_j(\bar{x}) / g_i(\bar{x}) \leqslant 0, i = 1, 2, \cdots, p$$

结合(10)式可知 $L(\bar{x}, \hat{\mu}) \leqslant \hat{y}$,这与 $\hat{y} \in \Omega(\hat{\mu})$ 矛盾,所以 $E(\bar{x})$ 是(DVP)的有效解。　证毕

参考文献:

[1] OSUNA-Gómez R, RUFIÁN-LIZANA A, RUÍZ-CANALES P. Duality in Nondifferentiable Vector Programming [J]. J Math Anal Appl, 2001, 259: 462-475.

[2] 徐增坤. 论多目标分式规划 [J]. 系统科学与数学, 1994, 14(3): 199-208.

[3] BECTOR C R, CHANDRA S, KUMAR V. Duality for Nonlinear Multiobjective Programs: A Linearization Approach [J]. Opsearch, 1992, 29(4): 274-283.

[4] BITRAN G R. Duality for Nonlinear Multiple-criteria Optimization Problems [J], J Optim Theory Appl, 1981, 35(3): 367-401.

[5] EGUDO R R, HANSON M A. Duality with Generalized Convexity [J]. J Austral Math Soc Ser. B, 1986, 28: 10-21.

[6] 杨新民. 半序线性空间中向量极值问题的 Lagrange 乘子定理和鞍点定理[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版), 1995, 12(4): 13-16.

[7] YANG X M. Alternative Theorems and Optimality Conditions and Weakened Convexity [J]. Opsearch 29, 1992 (2): 125-135.

[8] YANG X M, YANG X Q, TEO K L. Duality and Saddle-point Type Optimality for Generalized Nonlinear Fractional Programming [J]. J Math Anal Appl, 2004, 289: 100-109.

(责任编辑　黄　颖)