2005 年 6 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Jun. 2005
第 22 卷 第 2 期 Journal of Chongqing Normal University(Natural Science Edition) Vol. 22 No. 2

Erdös-Mordell 不等式的一个加强及应用*

刘 健
(华东交通大学 体育学院,南昌 330013)

摘 要:Erdös-Mordell 不等式是几何不等式中的一个著名结果。自 1935 年提出以来,大量文献围绕它进行了研究。本文应用重要的 Wolstenholme 不等式的代数形式给出了 Erdös-Mordell 不等式的一个加强,应用加强的结果和有关三角形与一动点的几何不等式变换原则,给出了一个有趣的不等式链,提出并应用计算机验证了 4 个未解决的猜想。

关键词:三角形;点;实数;不等式
中图分类号:O178 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2005)02-0012-03

A Sharpening of the Erdös-Mordell Inequality and Its Applications

LIU Jian
(College of Physical Education, East China Jiaotong Universtity, Nanchang 330013, China)

Abstract: Erdös-Mordell Inequality is a famous result of the Geometry Inequality. Already a lot of papers have carried on research in to it since 1935. In this paper a sharpening of the Erdös-Mordell Inequality is given by using the algebra form of important Wosstenholme Inequality. Applying this result and the tansformation rules of the geometric inequality about a triangle and moving point, an interesting chain of the geometric inequality is brought out. Finaly, four conjectures to be solved are put forward and tested and verified by the computer.

Key words: triangle; point; real number; inequality

1 主要结果

1935 年,P. Erdös[1] 提出了有关三角形的一个新奇的猜想:设 P 为 $\triangle ABC$ 内部任一点,P 到顶点 A、B、C 与边 BC、CA、AB 的距离分别为 R_1、R_2、R_3、r_1、r_2、r_3,则有

$$R_1+R_2+R_3\geqslant 2(r_1+r_2+r_3) \tag{1}$$

两年之后,L. J. Mordell 和 D. F. Barrow[2] 分别证明了上述猜想。1948 年,L. Fejes Tóth[3] 猜测(1)式可以推广到一般的凸 n 边形中,日本的大关信雄[4] 在 1957 年首先证明了这一猜想。1992 年,本文作者[5] 又将 Erdös-Mordell 不等式(1)推广到 m 个凸 n 边形中,得到了更一般的结论。

最近,在研究一个三元二次型不等式的应用时,得到了如下不等式。

$$\frac{R_1^2}{h_ar_1}+\frac{R_2^2}{h_br_2}+\frac{R_3^2}{h_cr_3}\geqslant 4 \tag{2}$$

其中 h_a、h_b、h_c 分别为 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 上的高线。

在这一不等式的证明过程中,作者意外地发现了 Erdös-Mordell 不等式下述加强。

定理 1 符号同上,则对 $\triangle ABC$ 内任一点 P 有

$$R_1+R_2+R_3\geqslant 2\sqrt{h_ar_1+h_br_2+h_cr_3} \tag{3}$$

等号当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形且 P 为其中心时成立。

根据著名的 Cauchy 不等式与(3)式,立即可知(2)式成立。另外,由恒等式

$$r_1/h_a+r_2/h_b+r_3/h_c=1 \tag{4}$$

及 Cauchy 不等式易知

$$h_ar_1+h_br_2+h_cr_3\geqslant (r_1+r_2+r_3)^2$$

则不等式(3)要强于 Erdös-Mordell 不等式。

2 定理 1 的证明

引理 1 对 $\triangle ABC$ 与任意实数 x、y、z 有

* 收稿日期:2004-10-11 修回日期:2005-01-07
作者简介:刘健(1963-),男,江西兴国人,助理研究员,主要从事几何不等式研究。

$$x^2+y^2+z^2\geqslant 2(yz\cos A+zx\cos B+xy\cos C)\quad(5)$$

等号当且仅当 $x:y:z=\sin A:\sin B:\sin C$ 时成立。

上述(5)式即为三角形不等式中著名的 Wolstenholme 不等式[6]。

引理 2　对任意实数 x、y、z 与正数 u、v、w 有

$$[x(v+w)+y(w+u)+z(u+v)]^2\geqslant 4(u+v+w)(yzu+zxv+xyw)\quad(6)$$

等号当且仅当 $x=y=z$ 时成立。

证明　显然,(5)式等价于

$$(x+y+z)^2\geqslant 4\left(yz\cos^2\frac{A}{2}+zx\cos^2\frac{B}{2}+xy\cos^2\frac{C}{2}\right)$$

在上式中作置换:$x\to xa$,$y\to yb$,$z\to zc$,然后利用半角公式 $\cos A/2=(s(s-a)/bc)^{\frac{1}{2}}$(其中 a、b、c 与 s 分别表示△ABC 的三边与半周长,下同此)即可得

$$(xa+yb+zc)^2\geqslant 4s[yz(s-a)+zx(s-b)+xy(s-c)]\quad(7)$$

对于任意正数 u、v、w,显然存在着以 $v+w$、$w+u$、$u+v$ 为边长的三角形,对此三角形使用(7)式,即得(6)式。根据(5)式等号成立的条件即确定(6)式中等号成立的条件。　证毕

从上可见,(6)式实为(5)式的代数形式。

引理 3　符号同上,则对△ABC 内任一点 P 有 $cr_2+br_3\leqslant aR_1$,等号仅当 $\angle PAB=\pi/2-C$ 时成立。

上述引理的证明可见文献[7]。

证明(定理 1)　首先来证有关三角形边长与正数 x、y、z 的加权不等式

$$\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)x+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)y+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)z\geqslant 2\sqrt{(xa+yb+zc)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)}\quad(8)$$

将引理 2 中的 x、y、z 与 u、v、w 互换,可知对任意正数 x、y、z 与实数 u、v、w 有

$$[u(y+z)+v(z+x)+w(x+y)]^2\geqslant 4(x+y+z)(vwx+wuy+uvz)$$

在上式中取 $u=a^2$,$v=b^2$,$w=c^2$,即得

$$[(b^2+c^2)x+(c^2+a^2)y+(a^2+b^2)z]^2\geqslant 4(x+y+z)(b^2c^2x+c^2a^2y+a^2b^2z)$$

再作置换 $x\to\frac{x}{bc}$,$y\to\frac{y}{ca}$,$z\to\frac{z}{ab}$,则得

$$\left[\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)x+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)y+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)z\right]^2\geqslant 4\left(\frac{x}{bc}+\frac{y}{ca}+\frac{z}{ab}\right)(xbc+yca+zab)$$

由此立即可知(8)式成立(a、b、c 为任意正数)。

其次,在(8)式中令 $x=r_1$,$y=r_2$,$z=r_3$,然后利用与(4)式相等价的恒等式

$$ar_1+br_2+cr_3=2\triangle$$

(△为△ABC 的面积)以及 $\triangle=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$,即得 $\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)r_1+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)r_2+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)r_3\geqslant 2\sqrt{h_ar_1+h_br_2+h_cr_3}$

也即

$$\frac{br_3+cr_2}{a}+\frac{cr_1+ar_3}{b}+\frac{ar_2+br_1}{c}\geqslant 2\sqrt{h_ar_1+h_br_2+h_cr_3}$$

根据上式与引理 3 的不等式 $cr_2+br_3\leqslant aR_1$ 以及相应的另两式就知(3)式成立,且易确定(3)式中等号成立的条件如定理 1 中所述。　证毕

在(3)式中,令 P 为△ABC 的重心,则有 $r_1=\frac{1}{3}h_a$,$r_2=\frac{1}{3}h_b$,$r_3=\frac{1}{3}h_c$,$R_1=\frac{2}{3}m_a$,$R_2=\frac{2}{3}m_b$,$R_3=\frac{2}{3}m_c$(m_a、m_b、m_c 分别为△ABC 相应边上的中线),从而得以下有关中线与高线的简洁不等式。

推论 1　在△ABC 中有

$$(m_a+m_b+m_c)^2\geqslant 3(h_a^2+h_b^2+h_c^2)$$

3　一个不等式链

应用定理 1 的不等式与 Cauchy 不等式及已知的有关动点类三角形几何不等式的变换原理,给出一个有趣的几何不等式链。

定理 2　设△ABC 内部任一点 P 关于△ABC 的垂足三角形的面积为 $\triangle_P$,△ABC 的外接圆半径为 R,其余符号同上,则

$$\frac{r_1R_1+r_2R_2+r_3R_3}{R_1+R_2+R_3}\leqslant R\sqrt{\frac{\triangle_P}{\triangle}}\leqslant\frac{R_2R_3+R_3R_1+R_1R_2}{4(r_1+r_2+r_3)}\quad(9)$$

等号当且仅当△ABC 为正三角形且 P 为其中心时成立。

证明　由 $r_1R_1=\sqrt{h_ar_1}\cdot\sqrt{\frac{ar_1}{2\triangle}}R_1$ 及 Cauchy 不等式即可知 $(r_1R_1+r_2R_2+r_3R_3)^2\leqslant\frac{1}{2\triangle}(h_ar_1+h_br_2+h_cr_3)(ar_1R_1^2+br_2R_2^2+cr_3R_3^2)$。由定理 1 的不等式以及重要的恒等式[8] $ar_1R_1^2+br_2R_2^2+cr_3R_c^2=4\triangle_pR^2$(其中 $\triangle_P$ 为 P 点关于△ABC 的垂足三角形的面积)可知 $(r_1R_1+r_2R_2+r_3R_3)^2\leqslant\frac{\triangle_P}{\triangle}(R_1+R_2+R_3)^2R^2$。

由此可见不等式链(9)式的第一个不等式

$$\frac{r_1R_1+r_2R_2+r_3R_3}{R_1+R_2+R_3}\leqslant R\sqrt{\frac{\triangle_P}{\triangle}}\quad(10)$$

成立。

现在,对(10)式中作变换Ⅰ[8]

$$(r_1, r_2, r_3, R_1, R_2, R_3)$$
$$\to (r_1R_1, r_2R_2, r_3R_3, R_2R_3, R_3R_1, R_1R_2)$$

并利用变换Ⅰ下的转换关系[8]

$$R \to 2RR_P, \triangle \to 4R^2\triangle_P, \triangle_P \to \frac{4R^2\triangle_P^2}{\triangle}$$

(其中 R_p 为垂足三角形的外接圆半径)即得

$$\frac{(r_1+r_2+r_3)R_1R_2R_3}{R_2R_3+R_3R_1+R_1R_2} \leqslant 2RR_P\sqrt{\frac{\triangle_P}{\triangle}}$$

由此利用已知的恒等式 $8\triangle_P R_P = R_1R_2R_3 \cdot \triangle / R^2$ 得不等式链(9)式的第二个不等式。

在不等式链(9)式中令 P 为 $\triangle ABC$ 的重心,则易证 $\triangle_G = \frac{\triangle}{9R^2}(a^2+b^2+c^2)$,于是易得如下结论。

推论2 在 $\triangle ABC$ 中有 $\frac{m_ah_a+m_bh_b+m_ch_c}{m_a+m_b+m_c} \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \leqslant \frac{m_bm_c+m_cm_a+m_am_b}{h_a+h_b+h_c}$

4 几个猜想

D. F. Barrow 将 Erdös-Mordell 不等式(1)加强为

$$R_1+R_2+R_3 \geqslant 2(w_1+w_2+w_3)$$

其中 w_1、w_2、w_3 分别为 $\angle BPC$、$\angle CPA$、$\angle APB$ 的平分线。

以上加强启发笔者针对定理1的不等式提出更强的猜想。

猜想1 符号同上,则对 $\triangle ABC$ 内任一点 P 有

$$R_1+R_2+R_3 \geqslant 2\sqrt{h_aw_1+h_bw_2+h_cw_3}$$

由已知的垂足三角形的面积不等式 $\triangle_P \leqslant \frac{1}{4}\triangle$ 及不等式链(9)式的第一个不等式可知

$$\frac{r_1R_1+r_2R_2+r_3R_3}{R_1+R_2+R_3} \leqslant \frac{1}{2}R \tag{11}$$

考虑这一不等式的指数推广,进一步得到如下猜想。

猜想2 设 $0<k\leqslant 2$,则对 $\triangle ABC$ 内任一点 P 有

$$\frac{r_1R_1^k+r_2R_2^k+r_3R_3^k}{R_1^k+R_2^k+R_3^k} \leqslant \frac{1}{2}R$$

对(11)式作前面所述的变换Ⅰ,并利用转换关系 $R \to 2RR_P$,易得

$$r_1+r_2+r_3 \leqslant RR_P\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right) \tag{12}$$

文献[8]中已证明不等式

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} \geqslant \frac{2}{R}+\frac{1}{2R_P}$$

这促使笔者猜测(12)式还可加强为线性不等式

$$r_1+r_2+r_3 \leqslant R/2+2R_P$$

进而考虑上式的推广,提出以下更一般的猜想。

猜想3 设 $0.27 \leqslant k \leqslant 1$,则对 $\triangle ABC$ 内任一点 P 有 $r_1+r_2+r_3 \leqslant kR+(3-2k)R_p$,则(1)式即为

$$\frac{R_1+R_2+R_3}{r_1+r_2+r_3} \geqslant 2 \tag{13}$$

考虑(13)式左端的上界,提出以下猜想。

猜想4 对 $\triangle ABC$ 内任一点 P 有

$$\frac{R_2R_3+R_3R_1+R_1R_2}{2(r_2r_3+r_3r_1+r_1r_2)} \geqslant \frac{R_1+R_2+R_3}{r_1+r_2+r_3}$$

计算机的验证表明以上所提的4个猜想很可能是成立的。由 Erdös-Mordell 不等式引出的另外一些猜想参见最近的文献[9]。

参考文献:

[1] ERDÖS P. Advanced Problem 3740[J]. Amer Math Monthly,1935,42:396.

[2] MORDELL L J,BARROW D F. Advanced Problem 3740 and Solutions[J]. Amer Math Monthly,1937,44:252-254.

[3] FEJES TÓTH L. Inequalities Concerning Polygons and Polyhedra[J]. Duke Math J,1948,15:817-822.

[4] ŌZEKI N. On P. Erdös Inequality to the Triangle[J]. J College Arts Sci Chiba Univ,1957(2):247-250.

[5] 刘健. Erdös-Mordell 不等式的再推广及其它[J]. 数学通讯,1992,70(5):31-33.

[6] MITRINÓVIC D S,PEČARIĆ J E,VOLENEC V. Recent Advances in Geometric Inequalities[M]. Dordrecht:Kluwer Academic Publishers,1989.

[7] BOTTEMA O. 几何不等式[M]. 单墫译. 北京:北京大学出版社,1991.

[8] 刘健. 几个新的三角形不等式[C]. 数学竞赛(15). 长沙:湖南教育出版社,1992.

[9] 刘健. 一个几何不等式的两则应用[J]. 开封大学学报,2004,18(1):87-91.

(责任编辑 黄 颖)