凸函数积分有界性质及其应用*

刘 建 玉
(安徽邮电职业技术学院 基础理论部,合肥 230031)

摘 要:给出了闭区间$[a,b]$上为凸函数的$f(x)$的一个定积分的有界性质,并应用该性质对一类特殊的均值不等式进行了证明。

关键词:函数;定积分界值;均值不等式
中图分类号:O174.13 文献标识码:A 文章编号:1672-6693(2005)02-0018-03

The Finite Peculiarity and Application of Convex Function Integral

LIU Jian-yu
(Anhui Vocational College of Posts and Telecom, Hefei 230031, China)

Abstract: The dissertation introduces the finite peculiarity of convex function $f(x)$, which belongs to closed interval $[a,b]$. The peculiarity is applied to prove a series of special equal worth inequality.

Key words: function; definite integral limit worth; equal worth inequality

1 凸函数的概念[1]

定义 1 设$f(x)$在$[a,b]$上连续,若对于$[a,b]$中任意两点x_1,x_2有$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geqslant\frac{f(x_1)+(x_2)}{2}$,则称$f(x)$在$[a,b]$上是向上凸的,或上凸函数;若有$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+(x_2)}{2}$,则称$f(x)$在$[a,b]$上是向下凸的,或下凸函数。

定义 2 设$f(x)$在$[a,b]$上连续,若对于$[a,b]$中任意两点x_1,x_2及实数$\lambda(0<t<1)$,有$f(tx_1+(1-t)x_2)\geqslant tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$,则称$f(x)$在$[a,b]$上是向上凸的;若有

$$f(tx_1+(1-t)x_2)\leqslant tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$$

则称$f(x)$是下凸的。

定理 1[2] 设$f(x)$在(a,b)内存在二阶导数,则
1) $f(x)$在(a,b)内上凸的充要条件是$f''(x)\leqslant 0$;
2) $f(x)$在(a,b)内下凸的充要条件是$f''(x)\geqslant 0$。

2 凸函数的一个积分性质

定理 2 设$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内存在二阶导数,1)若$f''(x)\leqslant 0$,即$f(x)$是$[a,b]$上的上凸函数,则

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \quad (1)$$

2)若$f''(x)\geqslant 0$,即$f(x)$是$[a,b]$上的下凸函数,则

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \quad (2)$$

证明 1)先证左边不等式,作变换$t=(b-x)/(b-a)(0\leqslant t\leqslant 1)$,按定义 2 有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)\int_0^1 f[ta+(1-t)b]\mathrm{d}t\geqslant$$
$$(b-a)\int_0^1 f[ta+(1-t)f(b)]\mathrm{d}t=$$
$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

再证右边不等式,若$x\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$,$x$关于$\frac{a+b}{2}$的对称点是$a+b-x$,于是

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}}[f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}t\leqslant$$

* 收稿日期:2004-10-11 修回日期:2005-02-25
作者简介:刘建玉(1956-),男,江苏徐州人,高级讲师,主要研究方向为运筹学及规划论。

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} 2f\left(\frac{x+a+b-x}{2}\right)\mathrm{d}x = 2\int_a^{\frac{a+b}{2}} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

所以(1)式得证。

2)当函数下凸时,同理可证(2)式。其左边不等式为

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{\frac{a+b}{2}} [f(x)+f(a+b-x)]\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^{\frac{a+b}{2}} 2f\left(\frac{x+a+b-x}{2}\right)\mathrm{d}x = 2\int_a^{\frac{a+b}{2}} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

其右边不等式为

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\int_0^1 f[ta+(1-t)b]\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\int_0^1 f[ta+(1-t)f(b)]\,\mathrm{d}t = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

所以(2)式得证。　　证毕

3　凸函数的积分界值性质的应用

应用定理 2 可证得一些特殊均值的不等式,为便于应用,把(1)、(2)式改写成

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

例 1　若 $x>0, y>0$,则

$$\frac{2}{x^{-1}+y^{-1}} \leqslant \sqrt{xy} \leqslant \frac{x-y}{\ln x-\ln y} \leqslant \frac{x+y}{2} \tag{3}$$

证明　令 $f(x)=\mathrm{e}^x$,则 $f''(x)=\mathrm{e}^x>0$,其中 $x\in(-\infty,+\infty)$,对任意的 a, b 有

$$\mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}} \leqslant (b-a)^{-1}\int_a^b \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^b}{2}$$

即
$$\mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}} \leqslant \frac{\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a}{b-a} \leqslant \frac{\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^b}{2}$$

令 $\mathrm{e}^b=x, \mathrm{e}^a=y$,则有 $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x-y}{\ln x-\ln y} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$,

记
$$L(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{\ln x-\ln y}, & x\neq y\\ x, & x=y\end{cases}$$

称 $L(x,y)$ 为对数均值,由(3)式得

$$\sqrt{xy} \leqslant L(x,y) \leqslant \frac{x+y}{2}$$

此不等式说明两个正数的几何平均值与算术平均值之间可插入对数均值。

又因为
$$\sqrt{xy}=\frac{2xy}{2\sqrt{xy}} \geqslant \frac{2xy}{x+y}=\frac{2}{x^{-1}+y^{-1}}$$

所以有 $\dfrac{2}{x^{-1}+y^{-1}} \leqslant \sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x-y}{\ln x-\ln y} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$。　　证毕

例 2　$a>0, b>0, n\in \mathbf{N}^+$ 且 $n\neq 1$,则有以下均值关系

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leqslant \frac{1}{n+1}(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+a^{n-2}b^2+ab^{n-1}+b^n) \leqslant \frac{a^n+b^n}{2} \tag{4}$$

证明　设 $f(x)=x^n, x\in(0,+\infty), n\in\mathbf{N}^+$,且 $n\neq 1$,有 $f''(x)=n(n-1)x^{n-2}>0, x\in(0,+\infty)$,所以对任意正数 a、b,由定理 2 有

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leqslant \frac{1}{(b-a)}\int_a^b x^n\,\mathrm{d}x\ \frac{a^n+b^n}{2}$$

即
$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leqslant \frac{1}{(b-a)}\ \frac{b^n-a^n}{n+1} \leqslant \frac{a^n+b^n}{2}$$

所以(4)式得证。特别地当 $n=2$ 时有

$$\frac{(a^2+2ab+b^2)}{4} \leqslant \frac{(a^2+ab+b^2)}{3} \leqslant \frac{(a^2+b^2)}{2} \tag{5}$$

当且仅当 $a=b$ 时,(4)、(5)式取等号。　　证毕

例 3　设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上连续的下凸函数 $f(0)>f(1)$,对充分大的 n,有以下不等式成立

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) < \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x < \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{6}$$

证明　因 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的下凸函数,由定理 2 对 $\forall x_1, x_2\in[0,1]$,设 $x_1<x_2$,有

$$(x_2-x_1)f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant (x_2-x_1)\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

对区间 $[0,1]$ n 等分,$\left[\dfrac{k-1}{n},\dfrac{k}{n}\right]$,$k=1,2,3,\cdots,n$

有
$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{k-1}{n}\right)+f\left(\frac{k}{n}\right)\right] = \frac{1}{2n}[f(1)+f(0)]+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) < \frac{1}{2n}[2f(0)]+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{7}$$

如果对区间 $[0,1]$ 进行 $2n$ 等分,则

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2n}} f(x)\,\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{2k+1}{2n}} f(x)\,\mathrm{d}x+$$

$$\int_{\frac{2n-1}{2n}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2n}f(\zeta_n)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{2n}f(\eta_n)$$

其中 $\zeta_n\in\left[0,\frac{1}{2n}\right]$,$\eta_n\in\left[\frac{2n-1}{2n},1\right]$。

只需证明$\frac{[f(\zeta_n)+f(\eta_n)]}{2}>f(1)$即可,由 $f(x)$ 的连续性,当 $\zeta_n\to0$,$\eta_n\to1$ $(n\to\infty)$时,有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}[f(\zeta_n)+f(\eta_n)]=$$

$$\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]>f(1)=f\left(\frac{n}{n}\right)$$

知存在 N,当 $n>\mathrm{N}$ 时,有

$$\frac{1}{2}[f(\zeta_n)+f(\eta_n)]>f(1)=f\left(\frac{n}{n}\right)$$

即

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x>\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\tag{8}$$

由(7)、(8)式知(6)式成立。 证毕

参考文献:

[1] 吉林大学数学系. 数学分析(上)[M]. 北京:人民教育出版社,1992.
[2] 欧阳光中. 数学分析(上)[M]. 上海:上海科技出版社,1982.
[3] M·阿佛里耳. 非线性规划[M]. 上海:上海科技出版社,1979.

(责任编辑 黄 颖)