单调化与极大熵相结合解非单调规划问题*

朱 国 会
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院,重庆 400047)

摘 要:对约束函数单调而目标函数非单调的规划问题,给出了目标函数的一种新的单调化变换公式。先引入极大熵函数,将多个约束的非线性规划问题,转化为只含一个约束的规划问题。再将转化后的只有一个约束的规划问题转化为一个单调规划问题,并证明了其等价性。

关键词:非单调规划;极大熵函数;单调化
中图分类号:O221.2 文献标识码:A 文章编号:1672-6693(2005)02-0024-03

Solving Non-monotonic Programming Problems with Monotonization Method Combined with Maximal Entropy Method

ZHU Guo-hui
(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: This paper deals with some non-monotonic programming problems with monotonic constraints . Firstly, a nonlinear programming problem with multiple constraints can be converted into a programming problem with single constraint via maximum entropy function. Secondly, we give a monotonic transformation for the converted single programming problem and prove the equivalence between the converted monotone programming problem and the programming problem with single constraint.

Key words: non-monotonic programming; maximum entropy function; monotonization

现实生活中,许多社会科学与自然科学中的问题可归结为求一个全局优化问题的全局最优解。而多个局部最优解的存在,使得全局优化问题成为了具有挑战性的一个课题。对于一般的全局最优化问题,目前还没有很好的办法来求其全局最优解。而对于一些特殊的具有较好结构的全局优化问题,如凹极小问题,反凸规划问题,D. C. 规划问题和单调规划等,已经有一些较好的算法可以求得其全局极小点[1~7]等。在文献[8~10]中已经对一些严格单调函数给出了凸、凹化变换公式,进而可以把一些严格单调规划问题转化为一个等价的凹极小问题或反凸规划问题或 D. C. 规划问题。文献[8]也对只有一个线性约束的非单调目标函数给出了一个单调化变换公式,文献[10]对多个线性约束的非单调目标函数给出了另一种单调化变换公式,但文献[10]没有给出其等价性证明。本文对约束函数单调而目标函数非单调的一些规划问题给出了非单调目标函数的一种新的单调化方法。先通过引入极大熵函数,将多个约束的非线性规划问题,转化为只含一个约束的可微规划问题,再给出转换后的只有一个约束的规划问题的一种新的单调化变换,利用所给出的单调化变换公式可将转化后的只有一个约束的规划问题转化为一个等价的单调规划问题,进而可以再把转化后的单调规划问题转化为结构比较好的凹极小问题,或反凸规划问题或标准 D. C. 规划问题。利用已有关于这些结构比较好的规划问题的求全局极小点方法,可以求得原问题的近似全局极小点。

1 问题

考察下述非线性规划问题(P)

$$\min f(x)$$
$$\text{s.t. } g_i(x) \leqslant 0, i = 1, \cdots, m$$

* 收稿日期:2004-06-07 修回日期:2005-02-25
资助项目:国家自然科学基金(NO. 10171118);重庆市教委基金项目(030809)
作者简介:朱国会(1974-),女,重庆南川人,硕士研究生,主要研究方向为运筹学与控制论。

$$x \in X = \{x \in \mathbf{R}^n \mid l_j \leqslant x_j \leqslant u_j, j = 1, \cdots, n\}$$
$$0 < l_j < u_j$$

这里 $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 连续可微,$g_i: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$,$i = 1, \cdots, m$,连续可微且具有一定的单调性。

2 极大熵函数的引入

极大熵方法是近几年发展起来的求解一类非线性规划问题的一种有效方法。

极大熵函数的构造[11,12]如下。

令 $r(x) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \{g_i(x)\}$,易证下述引理成立。

引理 1 问题(P)与下面的问题(P1)等价

$$\min f(x)$$
$$\text{s.t.}\ r(x) \leqslant 0, x \in X$$

令 $\bar{g}_p(x) = \dfrac{1}{p}\ln \sum\limits_{i=1}^{m} e^{pg_i(s)}$,则有如下引理。

引理 2 当 $p \to +\infty$ 时,$\bar{g}_p(x)$ 一致收敛于 $r(x)$[11,12]。

由引理 2 可知,当 p 充分大时,问题(P)的一个近似全局最优解即为规划问题(P2)

$$\min f(x)$$
$$\text{s.t.}\ \bar{g}_p(x) \leqslant 0, x \in X$$

的全局最优解。

3 非单调规划的单调化方法

这部分将给出非单调规划问题目标函数的一个单调化变换公式。由于规划问题(P2)的全局最优解一定是问题(P)的一个近似全局最优解,只需考虑规划问题(P2)。令 $s = \{x \in X \mid \bar{g}_p(x) \leqslant 0\}$,引进松弛变量 x_{n+1},令 $\bar{\bar{g}}_p(x) = \bar{g}_p(x) + x_{n+1} - l_{n+1}$,令 $S_1 = \{(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) \in \bar{X} \mid \bar{\bar{g}}_p(x) = 0\}$。这里,$l_{n+1} > 0$ 是一个给定的常数。取一个正数 u_{n+1},使得 $u_{n+1} \geqslant l_{n+1} - \min_{x \in X}\bar{g}_p(x)$,并令

$$\bar{X} = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid l_j \leqslant x_j \leqslant u_j, j = 1, \cdots, n+1\}$$

则问题(P2)等价于问题(P2′)

$$\min f(x)$$
$$\text{s.t.}\ \bar{\bar{g}}_p(x) = 0, x \in \bar{X}$$

令 $$S_2 = \{x \in \bar{X} \mid \bar{\bar{g}}_p(x) \geqslant 0\}$$

考察问题(P2′)的下述变换(P3)

$$\min w_f(x) = \ln(1 + f(x)) + e^{p(\bar{\bar{g}}_p(x))}$$
$$\text{s.t.}\ (x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in S_2$$

易证变换后的目标函数 $w_f(x)$ 在 S_2 上严格单调增。

不防设 $f(x) > 0$,则有如下定理。

定理 1 假设 $f(x)$ 连续可微,$g_i(x)$ 是连续可微且满足下述条件:存在一个正数 $\varepsilon_0 > 0$,使得 $\dfrac{\partial g_i(x)}{\partial x_k} \geqslant \varepsilon_0$,$\forall x \in X$,$\forall k \in \{1, \cdots, n\}$ 则存在 $p_1 > 0$,当 $p > p_1$ 时,$w_f(x)$ 在 S_2 上严格单调增。

证明 1)当 $k \neq n+1$ 时,

$$\frac{\partial w_f(x)}{\partial x_k} = \frac{1}{1 + f(x)}\frac{\partial f(x)}{\partial x_k} + pe^{p(\bar{\bar{g}}_p(x))}\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m} e^{pg(x)}}\sum_{j=1}^{m} e^{pg_j(x)}\frac{\partial g_j(x)}{\partial x_k}$$

(对任意的 $k = 1, \cdots, n$)。令 $\theta_1 < 0$,使得

$$\theta_1 \leqslant \min_{1 \leqslant k \leqslant n}\min_{x \in X}\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}, \varepsilon_1 = \min_{x \in X} f(x), (\varepsilon_1 > 0)$$

对给定的正数 $\varepsilon_2 > 0$,令 $\bar{p}_1 = \dfrac{\varepsilon_2(1 + \varepsilon_1) - \theta_1}{(1 + \varepsilon_1)\varepsilon_0}$时,则当 $p > \bar{p}_1$ 时,对任意的 $x \in S_2$,有

$$\frac{\partial w_f(x)}{\partial x_k} \geqslant \frac{1}{1 + \varepsilon_1}\theta_1 + p\varepsilon_0 \geqslant \varepsilon_2$$

2)当 $k = n+1$ 时,$\dfrac{\partial w_f(x)}{\partial x_k} = pe^{p(\bar{\bar{g}}_p(x))} \geqslant p$,对任意 $x \in S_2$,对给定的正数 $\varepsilon_2 > 0$,令 $p'_1 = \varepsilon_2$,则当 $p > p'_1$ 时 $\dfrac{\partial w_f(x)}{\partial x_k} \geqslant \varepsilon_2$。

取 $p_1 = \max\{\bar{p}_1, p'_1\}$,则当 $p > p_1$ 时,对任意的 $x \in S_2$,对任意的 $k \in \{1, \cdots, n+1\}$,有 $\dfrac{\partial w_f(x)}{\partial x_k} \geqslant \varepsilon_2$。所以,$w_f(x)$ 在 S_2 上是严格单调增的。 证毕

4 等价性证明

这部分将证明在一定条件下,当 p 充分大时,规划问题(P2′)与(P3)等价,有如下的结论。

定理 2 如果定理 1 的假设成立,且问题(P2′)有可行解,则一定存在一个正数 p_0,使得当 $p > p_0$ 时,x^* 是规划问题(P2′)的全局极小点,当且仅当 x^* 是规划问题(P3)的全局极小点。即规划问题(P2′)与规划问题(P3)等价,也即 $G(\text{P2}') = G(\text{P3})$,这里的 $G(\text{P2}')$ 和 $G(\text{P3})$ 分别表示是规划问题(P2′)和(P3)的全局极小点集合。

证明 令

$$S_2 = \{x \in \bar{X} \mid \bar{\bar{g}}_p(x) \geqslant 0\}$$
$$S_1 = \{x \in \bar{X} \mid \bar{\bar{g}}_p(x) = 0\}$$

由定理 1 知,一定存在 $p_0 > 0$,当 $p > p_0$ 时,$w_f(x)$ 在 S_2 上严格单调增。如果问题(P2′)有可行解,即 S_1 不是空集。下面将证明规划问题(P2′)与规划问题(P3)等价。如果 x^* 是问题(P2′)的全局

极小点,$\bar{\bar{g}}_p(x^*)=0$,并且 $w_f(x^*)\leqslant w_f(x)$,对 $\forall x\in S_1$。假设 x^* 不是问题(P3)的全局极小点,设 y^* 是问题(P3)的全局极小点,则有

$$\bar{\bar{g}}_p(y^*)>0 \tag{1}$$

因为 $g_i(x)$ 是连续的,$\bar{\bar{g}}_p(x)$ 一致收敛于 $r(x)$,所以函数 $\bar{\bar{g}}_p(x)$ 连续,则一定存在一个正数 $\varepsilon>0$,有使得对任意的 $x\in\bar{X}$,且 $|x_j-y_j{}^*|<\varepsilon$,$j=1,2,\cdots,n+1$,有 $\bar{\bar{g}}_p(x)>0$,这里

$$x=(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1}),y^*=(y_1^*,\cdots,y_{n+1}{}^*)$$

如果对所有的 j,都有 $y_j{}^*=l_j$,则有 $y_j{}^*\leqslant x_j{}^*$,$j=1,2,\cdots,n+1$,由于 $\bar{\bar{g}}_p(x)$ 在 $\bar{X}$ 上严格单增的,则一定有 $\bar{\bar{g}}_p(y^*)\leqslant\bar{\bar{g}}_p(x^*)=0$。这与(1)式矛盾。所以,一定存在一个 $j_0(1\leqslant j_0\leqslant n+1)$,使得 $y_{j_0}{}^*>l_{j_0}$。令

$$\varepsilon_0=\min\{\varepsilon/2,y_{j_0}{}^*-l_{j_0}\}$$

$$u^*=(y_1^*,\cdots,y_{j_0-1}{}^*,y_{j_o}{}^*-\varepsilon_0,y_{j_0+1}{}^*,\cdots,y_{n+1}{}^*)$$

则 $u^*\in\bar{X}$ 且 $\bar{\bar{g}}_p(u^*)>0$,所以,$u^*\in S_2$ 且

$$w_f(u^*)\leqslant w_f(y^*) \tag{2}$$

另一方面,因为 $w_f(x)$ 是 S_2 上的严格单增函数,且 $u^*<y^*$,则有

$$w_f(u^*)<w_f(y^*)$$

这与(2)式矛盾。所以,当 $p>p_0$ 时,(P2′)的全局极小点一定是(P3)的全局极小点。

相反,如果 x_p^* 是(P3)的全局极小点,且 $\bar{\bar{g}}_p(x_p{}^*)=0$,显然 x_p^* 是(P2′)的全局极小点。故规划问题(P2′)与(P3)等价。

由文献[12]中的引理2知,规划问题(P2)的全局最优解一定是问题(P)的一个近似全局最优解,而规划问题(P2)与(P2′)等价,(P2′)与(P3)等价。所以当 p 充分大时,(P3)的最优解一定是问题(P)的一个近似全局最优解。再将问题(P3)转化为结构比较好的凹极小问题,利用已有的关于这些结构比较好的规划问题的求全局极小点的方法,可以求得原问题的近似全局极小点。

参考文献:

[1] BENSON H P. Deterministic Algorithm for Constrained Concave Minimization: A Unified Critical Survey [J]. Naval Res, Logist,1996,43:765-795.

[2] HOFFMAN K L A. A Method for Globally Minimizing Concave Functions over Convex Set [J]. Mathematical Programming,1981,20:22-23.

[3] HORST R. Deterministic Methods in Constrained Global Optimization: Some Recent Advances and New Fields of Application[J]. Naval Res Logist,1990,37:433-471.

[4] HORST R, PARDALOS P M, THOAI N V. Introduction to Global Optimization [M]. Dordrecht, Netherland: Kluwer Academic Publisher,1996.

[5] PARDALOS P M, ROSEN J B. Constrained Global Optimization: Algorithms and Applications [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1987.

[6] 吴至友. 非线性规划的单调化方法[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2004,21(2):4-7.

[7] LI D,SUN X L,BISWAL M P,et al. Convexification, Concavification and Monotonization in Global Optimization [J]. Annals of Operations Research,2001,(105):213-226.

[8] SUN X L, MCKINNON K, LI D. A Convexification Method for A Class of Global Optimization Problem with Application to Reliability Optimization[J]. Journal of Global Optimization,2001, 21:185-199.

[9] TUY H. Convex Analysis and Global Optimization [M]. Concavification and Monotonization in Global Optimization [J]. Annals of Operations Research, 2001,105:213-226.

[10] ZHANG L S, WU D H. Convexification, Concavification and Monotonization in Nonlinear Programming Problem [J]. Chinese Annals of Mathematics (Series A), 2002, 23(4):537-544.

[11] 李兴斯. 一类不可微优化问题的有效解法[J]. 中国科学(A辑), 1994,24(4):371-377.

[12] 唐焕文,张立卫,王雪华. 一类约束不可微优化问题的极大熵方法[J]. 计算数学,1993(3):268-275.

(责任编辑 黄 颖)