Φ-强单调半连续映象的 Browder 变分不等式解的 Ishikawa 迭代算法*

罗春林, 姚益民
(康定民族师范专科学校 数学系, 四川 626001)

摘 要:在 Hilbert 空间 H 中, 在 T: $H\to H$ 有界, Φ-强单调和半连续条件下,利用次微分 $\partial\varphi$ 算子的性质,将求变分不等式$\langle Tu\text{-}f,y-u\rangle\geqslant\varphi(u)-\varphi(y)$, $\forall y\in X$ 的解转化成求集值 Φ-强伪压缩映象的不动点,得到 Browder 变分不等式 $\langle Tu-f,y-u\rangle\geqslant\varphi(u)-\varphi(y)$, $\forall y\in H$ 的带有误差的 Ishikawa 迭代算法,在适当假设下证明了该迭代算法强收敛于不等式的唯一解。本文结果改进和推广了文献中部分已知的结果。

关键词:Hilbert 空间;Φ-强单调;Φ-强伪压缩;Ishikawa 迭代算法;半连续;Browder 变分不等式
中图分类号:O177.91 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2005)03-0072-04

The Ishikawa Iterative Algorithms to Solutions of Browder Variational Inequalities with Φ-Strongly Monotone and Semicontinuous Mapping

LUO Chun-lin, *YAO Yi-min*
(Department of Mathematics, Kangding Nationals Teachers College, Kangding Sichuan 626001, China)

Abstract: In Hilbert space H, we obtain the Ishikawa iterative algorithms with errors to solutions of Browder variational inequalities $\langle Tu-f,y-u\rangle\geqslant\varphi(u)-\varphi(y)$, $\forall y\in H$ with Φ-Strongly Monotone, bounded and Semi-continuous Mapping $T:H\to H$. The results of this paper improve and generalize many known results in the literature.

Key words: Hilbert space; Φ-strongly monotone; Φ-strongly pseudo contractive; Ishikawa iterative algorithms; demicontinuous; Browder variational inequalities

定理 1[1] 设 X 是可分自反 Banach 空间,设 T: $X\to X^*$ 是有界单调半连续映象,φ: $X\to(-\infty,+\infty]$是真凸下半连续泛函,设存在 $v_0\in X$ 满足条件

$$\frac{\langle Tv,v-v_0\rangle+\varphi(v)}{\|v\|}\to+\infty,\ v\in X,\ \|v\|\to\infty \tag{1}$$

则对给定的$f\in X^*$,存在 $u\in X$ 满足变分不等式

$$\langle Tu-f,y-u\rangle\geqslant\varphi(u)-\varphi(y),\ \forall y\in X \tag{2}$$

称 T 有界是指对任意 $D\subseteq X$ 有界,则 T 的像 $T(D)$ 亦有界。显然,若 T 是 Lipshitz 连续的,则 T 必有界。

在 Hilbert 空间中,Noor、Zhang、周武、毕中胜在 T 强单调、Lipschitz 连续时,利用辅助变分原理或利用次微分 $\partial\varphi$ 的预解算子技巧,给出了求变分不等式(2)解的迭代算法[3~7]。

本文在 Hilbert 空间 H 中,在 T 是 Φ-强单调、有界、半连续条件下,利用次微分 $\partial\varphi$ 算子的性质,将求变分不等式(2)的解转化成求集值 Φ-强伪压缩映象的不动点,给出 Browder 变分不等式(2)的带有误差的 Ishikawa 迭代算法。该算法将文献[2~8]中要求算子 T: $H\to H$ 满足强单调和 Lipschitz 连续性条件分别降到 Φ-强单调、有界半连续,从而改进和推广了文献[2~8]等的相应结果。

* 收稿日期:2005-01-12
资助项目:四川省教委自然科学基金重点资助项目(NO.2003407)
作者简介:罗春林(1965-),男,四川广安人,副教授,主要研究方向为泛函分析。

1 预备知识

设 H 是实 Hilbert 空间,$\langle \cdot , \cdot \rangle$ 和 $\| \cdot \|$ 分别表示 H 的内积和范数。需要讨论的问题是,在 Hilbert 空间中,设映象 $T: H\to H$ 和泛函 $\varphi: H\to \mathbf{R}\cup\{+\infty\}$,对任意的 $f\in H$,求 $u\in H$ 使

$$\langle Tu-f, y-u\rangle \geqslant \varphi(u)-\varphi(y),\ \forall y\in H \tag{3}$$

为了得到主要结果,需要下列概念和结果。

定义1 称集值映象 $A: H\to 2^H$ 是 Φ-强单调的,如果存在严格增加泛函 $\Phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$,满足 $\Phi(0)=0$,Φ 严格增加,且 $\Phi(x)\to+\infty$,$x\to\infty$,使得对 $\forall x,y\in H$, $\forall f_1\in A(x)$, $\forall f_2\in A(y)$ 满足

$$\langle f_1-f_2, x-y\rangle \geqslant \Phi(\|x-y\|)\|x-y\|$$

则称集值映象 $S: H\to 2^H$ 是 Φ-强伪压缩的,如果 $I-S$ 是 Φ-强单调的,其中,I 为恒等映象。

当 A 是单值映象时,就得到单值映象的 Φ-强单调和 Φ-强伪压缩的定义。集值映象 $S: H\to 2^H$ 是 Φ-强伪压缩的当且仅当对 $\forall x,y\in H$, $\forall \zeta\in S(x)$, $\forall \eta\in S(y)$ 满足 $\langle \zeta-\eta, x-y\rangle \leqslant \|x-y\|^2-\Phi(\|x-y\|)\|x-y\|$,其中,$\Phi$ 满足 $\Phi(x)\to+\infty$,当 $x\to\infty$。

定义2[9] 设 X 是 Banach 空间,$\varphi: X\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ 是一真泛函。若存在 $f\in X^*$,使得 $\varphi(y)-\varphi(x_0)\geqslant (f, y-x_0)$, $\forall y\in X$。则称 φ 在 x_0 处是次可微的,并称 f 为 φ 在 x_0 处的次梯度。在 x_0 处的一切次梯度的集合用 $\partial\varphi(x_0)$ 记之,称为 φ 在 x_0 处的次微分。

引理1[10] 设 X 是自反严格凸 Banach 空间,$\varphi: X\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ 是一真凸下半连续泛函。则 $\partial\varphi: X\to 2^{X^*}$ 是极大单调映象。

引理2 $q\in H$ 是变分不等式(3)的解的充分必要条件是,$q\in H$ 是集值映象 $S:\mathrm{dom}(\partial\varphi)\to 2^H$ 的不动点,即 $q\in S(q)$,其中 $S(u)$ 定义为 $S(u)=u+f-Tu-\partial\varphi(u)$。

证明 必要性。设 $q\in H$ 是变分不等式(3)的解,故有

$$\langle Tq-f, y-q\rangle \geqslant \varphi(q)-\varphi(y),\ \forall y\in H \tag{4}$$

由 φ 的次微分的定义和上式得 $f-Tq\in\partial\varphi(q)$,则有

$$q\in q+f-Tq-\partial\varphi(q)=S(q) \tag{5}$$

即 q 是映象 S 的不动点。

充分性。设 q 是映象 S 的不动点,所以有(5)式成立,则 $0\in f-Tq-\partial\varphi(q)$,即 $f-Tq\in\partial\varphi(q)$。由 φ 的次微分的定义可知(4)式成立,所以 q 是变分不等式(3)的解。 证毕

引理3 若 $T: H\to H$ 是 Φ-强单调的,$\varphi: H\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ 是真凸下半连续泛函,则集值映象 $S(u)=u+f-Tu-\partial\varphi(u)$ 是 Φ-强伪压缩的。

证明 对任意 $u_1,u_2\in D(\partial\varphi)$,任取 $f_1\in S(u_1)$,$f_2\in S(u_2)$,则存在 $j_1\in\partial\varphi(u_1)$,$j_2\in\partial\varphi(u_2)$,使 $f_1=u_1+f-Tu_1-j_1$,$f_2=u_2+f-Tu_2-j_2$。再由 T 的 Φ-强单调性和 $\partial\varphi$ 的单调性有

$$\langle f_1-f_2, u_1-u_2\rangle = \langle u_1-u_2-(Tu_1-Tu_2)-(j_1-j_2), u_1-u_2\rangle =$$

$$\|u_1-u_2\|^2-(Tu_1-Tu_2, u_1-u_2)-(j_1-j_2, u_1-u_2)\leqslant \|u_1-u_2\|^2-\Phi(\|u_1-u_2\|)\|u_1-u_2\|$$

由 u_1,u_2,f_1,f_2 的任意性知,$S(u)$ 是 Φ-强伪压缩的。 证毕

2 主要结果

定理2 设 $T: H\to H$ 是 Φ-强单调、有界和半连续的,$\varphi: H\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ 是真凸下半连续泛函,则变分不等式(3)有唯一的解 q。

证明 唯一性。设变分不等式(3)有两个解 u_1,u_2,则有

$$\langle Tu_1, y-u_1\rangle \geqslant \varphi(u_1)-\varphi(y)\quad \forall y\in K \tag{6}$$

$$\langle Tu_2, y-u_2\rangle \geqslant \varphi(u_2)-\varphi(y)\quad \forall y\in K \tag{7}$$

在(6)式中取 $y=u_2$, 在(7)式中取 $y=u_1$,然后相加并注意到 T 的 Φ-强伪单调性得

$$0\leqslant\langle Tu_1-Tu_2, u_2-u_1\rangle = -\langle Tu_1-Tu_2, u_1-u_2\rangle \leqslant -\Phi(\|u_1-u_2\|)\|u_1-u_2\|$$

由 $\Phi(x)$ 的严格递增性知 $u_1=u_2$。

存在性。由定理 1,只须验证(1)式成立。因为 φ 是真凸下半连续的,由文献[2]中定理 1.4.8(Ⅳ)知,存在 $h\in H,r\in\mathbf{R}$,使 $\varphi(v)\geqslant(h,v)+r,\ \forall v\in H$。对固定的 $v_0\in\mathrm{dom}(\partial\varphi)$,由 T 的 Φ-强单调性和上式有

$$\langle Tv,v-v_0\rangle+\varphi(v)\geqslant\langle Tv-Tv_0,v-v_0\rangle+(h,v)+r+\langle Tv_0,v\rangle-\langle Tv_0,v_0\rangle\geqslant$$
$$\Phi(\|v-v_0\|)\|v-v_0\|-\|h\|\cdot\|v\|-|r|-\|Tv_0\|\cdot\|v\|-\|Tv_0\|\cdot\|v_0\|\geqslant$$
$$\Phi(\|v-v_0\|)\|v-v_0\|-\|v\|(\|h\|+\|Tv_0\|)-|r|-\|Tv_0\|\cdot\|v_0\|\geqslant\Phi(\|v-v_0\|)(\|v\|-\|v_0\|)-\|v\|p+t$$

其中,$p=(\|h\|+\|Tv_0\|)$,$t=-|r|-\|Tv_0\|\cdot\|v_0\|$ 都为常数。由 $\Phi(x)$ 的性质有

$$\frac{\langle Tv,v-v_0\rangle+\varphi(v)}{\|v\|}\geqslant\Phi(\|v-v_0\|)\left(1-\frac{\|v_0\|}{\|v\|}\right)-p+\frac{t}{\|v\|}\to+\infty\quad(\|v\|\to\infty)$$

所以变分不等式(3)的解存在且唯一。　　证毕

定理 3　设 H 是可分的 Hilbert 空间,$T:H\to H,\varphi:H\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ 满足定理 2 的条件。$S(u)=u+f-Tu-\partial\varphi(u),u\in\mathrm{dom}(\partial\varphi)$。设 $\{u_n\},\{v_n\}$ 是 H 中两个序列,$\{\alpha_n\},\{\beta_n\}$ 是[0,1]中两个序列,满足条件 1) $\alpha_n\to0$,$\beta_n\to0(n\to\infty)$,且 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$;2) $\|u_n\|=o(\alpha_n)$,且 $\|v_n\|\to0(n\to\infty)$。

对任意给定的 $x_0\in H$,定义具误差的 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}$ 如下

$$\begin{cases}x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n\eta_n+u_n,\text{存在 }\eta_n\in S(y_n),\ \forall n\geqslant0\\ y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n\zeta_n+v_n,\text{存在 }\zeta_n\in S(x_n)\end{cases}\tag{8}$$

使 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty},\{y_n\}_{n=0}^{\infty}\subset\mathrm{dom}(\partial\varphi)$ 和 $\{\zeta_n\}_{n=0}^{\infty}\{\eta_n\}_{n=0}^{\infty}$ 有界,则 $\{x_n\}$ 强收敛于变分不等式(3)的唯一解 q。

证明　因 $\{\zeta_n\}_{n=0}^{\infty},\{\eta_n\}_{n=0}^{\infty}$ 有界,令

$$d=\max\{\sup_{n\geqslant0}\{\|\zeta_n-q\|\},\sup_{n\geqslant0}\{\|\eta_n-q\|\}\}+\|x_0-q\|\tag{9}$$
$$M=d+\sum_{n=0}^{\infty}\|u_n\|+1\tag{10}$$

由(8)~(10)式和归纳法容易得到
$$\|x_n-q\|\leqslant d+\sum_{n=0}^{\infty}\|u_n\|\leqslant M\quad\forall n\geqslant0\tag{11}$$

因此有
$$\max\{\|(1-\alpha_n)(x_n-q)+\alpha_n(\eta_n-q)\|,1\}\leqslant\max\{M,1\}=M,\ \forall n\geqslant0\tag{12}$$
$$\max\{\|(1-\beta_n)(x_n-q)+\beta_n(\eta_n-q)\|,1\}\leqslant\max\{M,1\}=M,\ \forall n\geqslant0\tag{13}$$

由 $S(x)$ 的 Φ-强伪压缩性有
$$\langle\eta_n-q,x_{n+1}-q\rangle=\langle\eta_n-q,y_n-q\rangle+\langle\eta_n-q,x_{n+1}-y_n\rangle\leqslant\|y_n-q\|^2-\Phi(\|y_n-q\|)\|y_n-q\|+d_n\tag{14}$$

其中 $d_n=\langle\eta_n-q,x_{n+1}-y_n\rangle$。下证 $\lim\limits_{n\to\infty}d_n\to0$,已知 $\{x_n\},\{\zeta_n\},\{\eta_n\},\{u_n\},\{v_n\}$ 都是有界序列,由条件 1)、2)及(8)式有

$$\begin{aligned}&\|x_{n+1}-y_n\|=\|(\beta_n-\alpha_n)x_n+\alpha_n\eta_n-\beta_n\zeta_n+u_n-v_n\|\leqslant\\&|(\beta_n-\alpha_n)|\cdot\|x_n\|+\alpha_n\|\eta_n\|+\beta_n\|\zeta_n\|+\|u_n\|-\|v_n\|\to0,(n\to\infty)\end{aligned}\tag{15}$$

所以
$$|d_n|=|\langle\eta_n-q,x_{n+1}-y_n\rangle|\leqslant M\|x_{n+1}-y_n\|\to0,(n\to\infty)$$

由(8)~(13)式,知
$$\begin{aligned}&\|y_n-q\|^2=\|(1-\beta_n)(x_n-q)+\beta_n(\zeta_n-q)+v_n\|^2\leqslant\\&\|(1-\beta_n)(x_n-q)+\beta_n(\zeta_n-q)\|^2+2\langle(1-\beta_n)(x_n-q)+\beta_n(\zeta_n-q)+v_n,v_n\rangle\leqslant\\&(1-\beta_n)^2\|(x_n-q)\|^2+2\beta_n(1-\beta_n)\langle(x_n-q),(\zeta_n-q)\rangle+\beta_n^2\|(\zeta_n-q)\|^2+4M\|v_n\|\leqslant\\&\|(x_n-q)\|^2+2\beta_nM^2+\beta_n^2M^2+4M\|v_n\|\end{aligned}\tag{16}$$

由(15)、(16)式可知
$$\langle\eta_n-q,x_{n+1}-q\rangle\leqslant\|(x_n-q)\|^2-\Phi(\|y_n-q\|)\|y_n-q\|+d_n+2\beta_nM^2+\beta_n^2M^2+4M\|v_n\|\tag{17}$$

由 $\|u_n\|=o(\alpha_n)$,可设 $\|u_n\|=\alpha_n\varepsilon_n$,其中,$\varepsilon_n\to0(n\to0)$,再由(8)~(13)及(17)式得

$$\begin{aligned}&\|x_{n+1}-q\|^2=\|(1-\alpha_n)(x_n-q)+\alpha_n(\eta_n-q)+u_n\|^2\leqslant\\&\|(1-\alpha_n)(x_n-q)+\alpha_n(\eta_n-q)\|^2+2\langle(1-\alpha_n)(x_n-q)+\alpha_n(\eta_n-q)+u_n,u_n\rangle\leqslant\\&(1-\alpha_n)^2\|x_n-q\|^2+2\alpha_n\langle\eta_n-q,(1-\alpha_n)(x_n-q)+\alpha_n(\eta_n-q)\rangle+4M\|u_n\|\leqslant\\&(1-\alpha_n)^2\|x_n-q\|^2+2\alpha_n\langle\eta_n-q,x_{n+1}-q-u_n\rangle+4M\|u_n\|\leqslant\\&(1-\alpha_n)^2\|x_n-q\|^2+2\alpha_n[\|(x_n-q)\|^2-\Phi(\|y_n-q\|)\|y_n-q\|+d_n+M\|u_n\|+\\&2\beta_nM^2+\beta_n^2M^2+4M\|v_n\|]+4M\alpha_n\varepsilon_n\leqslant\|x_n-q\|^2-2\alpha_n\Phi(\|y_n-q\|)\|y_n-q\|+\alpha_n\lambda_n\end{aligned}\tag{18}$$

其中 $\lambda_n=\alpha_n M+2(d_n+M\|u_n\|+2\beta_n M^2+\beta_n^2M^2+4M\|v_n\|)+4M\varepsilon_n$,由于 $\alpha_n\to0,d_n\to0,\beta_n\to0,u_n\to0,\|v_n\|\to0,\varepsilon_n\to0(n\to0)$,有 $\lambda_n\to0$。

设 $\sigma=\inf\{\|y_n-q\|:n\geqslant0\}$,则 $\sigma\geqslant0$。下证 $\sigma=0$。假设不然,$\sigma>0$,则 $\|y_n-q\|\geqslant\sigma,\forall n\geqslant0$。由 Φ 的严格递增性可知,$\Phi(\|y_n-q\|)\geqslant\Phi(\sigma)>0,\forall n\geqslant0$。因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=0$,所以存在正整数 N,使得当 $n>N$ 时,$\lambda_n<\Phi(\sigma)\sigma$,从而由(18)式有 $\|x_{n+1}-q\|\leqslant\|x_n-q\|^2-\alpha_n\Phi(\sigma)\sigma,\forall n\geqslant N$。对此式移项求和可得 $\Phi(\sigma)\sigma\sum\limits_{n=N}^{\infty}\alpha_n\leqslant\|x_n-q\|$。这与条件 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty$ 矛盾,故必有 $\sigma=0$ 成立。从而必有 $\{y_{n_j}\}\subset\{y_n\}$,使

$$\|y_{n_j}-q\|\to0,(n_j\to\infty)\tag{19}$$

由(8)~(11)式有 $\|y_n-q\|=\|(x_n-q)-\beta_n(x_n-\zeta_n)+v_n\|\geqslant\|x_n-q\|-\beta_n\|x_n-q\|-\beta_n\|\zeta_n-q\|-\|v_n\|$
从而有 $\|x_{n_j}-q\|\leqslant\|y_{n_j}-q\|+2\beta_{n_j}M+\|v_{n_j}\|$。由(19)式及条件 1)、2)可知 $\|x_{n_j}-q\|\to0,(n_j\to\infty)$。又因为 $\|y_n-q\|=\|y_n-x_{n+1}+x_{n+1}-q\|\geqslant\|x_{n+1}-q\|-\|y_n-x_{n+1}\|=\|x_{n+1}-q\|-\gamma_n$,其中 $\gamma_n=\|y_n-x_{n+1}\|$,由(15)式可得 $\gamma_n\to0(n\to\infty)$。因为 $\|x_{n_j}-q\|\to0,(n_j\to\infty),\lambda_n\to0,\gamma_n\to0,(n\to0)$ 所以 $\forall\varepsilon>0$,存在正整数 n_{j0},使 $\forall n\geqslant n_{j0}$ 有

$$\|x_{n_{j0}}-q\|<\varepsilon,\lambda_n<2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{\varepsilon}{2},\gamma_n<\frac{\varepsilon}{2}\tag{20}$$

下面证明

$$\|x_{n_{j0}+k}-q\|<\varepsilon,\forall k\geqslant1\tag{21}$$

首先证明 $\|x_{n_{j0}+1}-q\|<\varepsilon$,假设 $\|x_{n_{j0}+1}-q\|\geqslant\varepsilon$ 则由(23)和(24)式有 $\|y_{n_{j0}}-q\|\geqslant\|x_{n_{j0}+1}-q\|-\gamma_{j_{n_0}}\geqslant\varepsilon-\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2}$,从而由 Φ 的严格增加性质可知,$\Phi(\|y_{n_{j0}}-q\|)\geqslant\Phi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)>0$。于是从(18)、(20)式可得

$$\|x_{n_{j0}+1}-q\|^2\leqslant\|x_{n_{j0}}-q\|^2+\alpha_{n_{j0}}\lambda_{n_{j0}}-2\alpha_{n_{j0}}\Phi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon^2$$

与假设矛盾,故必有 $\|x_{n_{j0}+1}-q\|^2\leqslant\varepsilon$ 成立,按照同样的方法,由归纳法可证,$\forall k\geqslant1$,$\|x_{n_{j0}+k}-q\|<\varepsilon$ 成立。即(21)式成立。最后,由(21)式及 ε 的任意性可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=q$。 证毕

参考文献:

[1] BROWDER F R. Existence and Approximation of Solutions of Nonlinear Variational Inequalities[J]. Proc Natl Acad Sci USA, 1966,56:1080-1086.

[2] 张石生. 变分不等式和相补问题理论及应用[M]. 上海:上海科学技术文献出版社,1991.

[3] NOOR M A, NOOR K I, RASSIAS T M. Analysis, Geometry and Group: A Riemann Legacy Volume[M]. Florida:Hadronic Press,1993.

[4] NOOR M A. A New Iterative Method for Monotone Mixed Varitational Inequalitites[J]. Comput Modelling, 1997, 26(7): 29-34.

[5] ZHANG X. Some New Iterative Algorithms for Monotone Mixed Veriational Inegualitiex[J]. Appl Math Chinese Univ Ser B, 2002, 17(1):80-84.

[6] 周武,冀小明. 关于一类变分不等式的带有误差项的 Ishikawa 迭代算法[J]. 四川大学学报(自然科学版),2002, 39(6): 1023-1026.

[7] 毕中胜,张超,葛瑜. 关于单调混合变分不等式的带有误差的 Mann 迭代算法[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版),2003, 26(1): 5-7.

[8] 王传伟. 一个求解变分不等式问题的投影算法[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2005,22(1):6-10.

[9] LIU L S. Ishikawa and Mann Iterative Process with Errors for Nonlinear Strongly Accretive Mappings in Banach Spaces[J]. J Math Anal Appl, 1995, 194:114-125.

[10] DING X P, Perturbed Proximal Point Algorithms for Generalized Quasivariational Inclusions[J]. J Math Anal Appl,1997, 210: 88-101.

(责任编辑 黄 颖)