2005 年 9 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Sep. 2005
第 22 卷 第 3 期 Journal of Chongqing Normal University(Natural Science Edition) Vol. 22 No. 3

诣零矩阵和拟阵*

汪 定 国
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院, 重庆 400047)

摘 要:对于一个包含关系的关联矩阵,文献[1]构造了一个拟阵,并由关联矩阵定义了诣零矩阵(nil-矩阵),而且讨论了它的相关性质,进而提出具有 N-特征的矩阵(即 nil-矩阵)能否构造一个拟阵。本文在文献[2~5]的基础上,通过反例证明 nil-矩阵不一定能构造拟阵,又给出了一个较强的能构造拟阵的 nil-矩阵的条件,即对于关联矩阵 A,若任意秩为 $\bar{r}$ 的子矩阵皆为 nil-矩阵,则$(D,N_{\bar{r}}(A))$是一个拟阵,且其秩为 $\bar{r}$,而且这个矩阵 A 的所有 nil-矩阵都是拟阵$(D,N_{\bar{r}}(A))$的独立集。

关键词:关联矩阵; nil-矩阵; 拟阵
中图分类号:O151.21 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2005)03-0058-02

Nil-Matrices and Matroid

WANG Ding-guo
(College of Mathematic and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: For a relation with the incidence matrix, the paper [1] has raised a question, i. e. can we construct a matroid by the matrix with N-property (nil-matrix)? Based on the answer of the question by a reverse example, it isn't fixed. In the same time, it gives a stronger condition of nil-matrix that can construct a matroid as follows. For incidence matrices A, if they are nil-matrix in which the arbitrary submatrices orders are $\bar{r}$, $(D,N_{\bar{r}}(A))$ they are matoid. If their order is $\bar{r}$, all of the A's nil-matrices is the gathering independently of the matoid $(D,N_{\bar{r}}(A))$.

Key words: incidence matrices; nil-matrix; matoid

1 基本概念

Whitney 把任意域上的向量组的一些性质进行抽象推广,从而得出了拟阵的概念。拟阵有若干等价的定义,本文引进独立集公理系统的定义。

定义 1[6] 设 E 是有限元素的集合,I 是 E 的子集族,它满足下列条件:

1) $\Phi\in I$;

2) 若 $X\in I$,且 $Y\subseteq X$,则 $Y\in I$;

3) 若 $X,Y\in I$ 且 $|Y|>|X|$,则存在 $y\in Y\backslash X$,使 $X\cup\{y\}\in I$.

则称(E,I)为一拟阵,记为 $M=M(E,I)$。

下面将给出有关拟阵的一些基本概念。

定义 2[6] 任意 $X\in I$ 称为拟阵 M 的独立集,不是独立集的 E 的子集称为 M 的相关集。

定义 3[6] 若 $B\in I$,但不存在 $B'\supset B$,使 $B'\in I$,则称 B 为拟阵 M 的基,即基是拟阵的极大独立集。用 $\boldsymbol{B}(M)$或 $\boldsymbol{B}$ 表示 M 的所有基的集合。

定义 4[6] 若 $C\notin I$,但任意的 $C'\subset C$ 有 $C'\in I$,则称 C 是拟阵 M 的圈,即圈是拟阵 M 的极小相关集。用 $\boldsymbol{C}(M)$或 $\boldsymbol{C}$ 表示拟阵 M 的所有圈的集合。

定义 5[6] 拟阵的秩函数是一个函数 $r:2^E\to\mathbf{Z}^+$,(2^E 表示 E 的所有子集,$\mathbf{Z}^+$ 表示非负整数),使对任意的 $A\subseteq E$ 有

$$r(A)=\max\{|X|\,|\,X\subseteq A,X\in I\}$$

$r(E)$称为拟阵 M 的秩,通常记为 $r(M)=r(E)$(以下不作说明皆与之相同)。

定义 6[6] 设 E 是一个有 n 个元素的集合,$0\leqslant k\leqslant n$ 是固定的整数。令

$$I=\{X|X\subseteq E,|X|\leqslant k\}$$

* 收稿日期:2004-10-09
作者简介:汪定国(1976-),男,四川广元人,讲师,硕士,主要从事组合最优化方向的研究。

则 $M=M(E,I)$ 是一拟阵,称为均匀拟阵,通常记为 $U_{k,n}$。

引理1[6] 设 E 是有限元素的集合,$\boldsymbol{B}$ 是 E 的子集族。$\boldsymbol{B}$ 是关于 E 的一个拟阵的基集,当且仅当 $\boldsymbol{B}$ 满足下面的条件

1) 若 $B_1,B_2\in\boldsymbol{B}$,则 $|B_1|=|B_2|$;

2) 若 $B_1,B_2\in\boldsymbol{B}$ 且 $x\in B_1$,则存在 $y\in B_2$,使得 $(B_1\setminus\{x\})\cup\{y\}\in\boldsymbol{B}$。

由上面的定理可得如下推论。

推论1[6] 设 E 是有限元素的集合,$\boldsymbol{B}$ 是 E 的子集族,则 $\boldsymbol{B}$ 是关于 E 的某个拟阵的基集当且仅当若 $B_1,B_2\in\boldsymbol{B}$,且 $x\in B_1\setminus B_2$,则存在 $y\in B_2\setminus B_1$,使得 $(B_1\setminus\{x\})\cup\{y\}\in\boldsymbol{B}$。

C、D 是两个有限集,考虑一个关系 $A\subseteq C\times D$。让 $\hat{A}=(a_{c,d})$,$c\in C$, $d\in D$ 是这个关系的关联矩阵。例如:$\hat{A}$ 是一个 $m\times l$ 矩阵,其中 $a_{c,d}=1$,当 $(c,d)\in A$;$a_{c,d}=0$,当 $(c,d)\notin A$,且 $m=|C|$,$l=|D|$($|C|$ 表示 C 的元素个数)

定义7[1] 一个 $m\times l$ 阶($m\geqslant l$)关联矩阵 $(a_{i,k})$ 叫做nil-矩阵,如果经过行与列的置换,它能变成如下的矩阵

$$a_{ii}=1 \text{ 且 } a_{ik}=0 \quad \text{对 } i<k \quad i=1,2,\cdots,m \qquad (1)$$

满足条件(1)的矩阵也说具有N-特征。

在介绍nil-矩阵的特征之前,先给出以下记号,让 $\hat{A}$ 是列集合为 D,行集合为 C 的 $m\times n$ 阶关联矩阵;用 $\hat{N}$ 表示 $\hat{A}$ 的 $m\times l$ 阶子矩阵,$1\leqslant l\leqslant n$,使得它是nil-矩阵;用 N 表示矩阵 $\hat{N}$ 列的集合;$N(A)$ 表示矩阵 $\hat{A}$ 的所有nil-矩阵的集合;$r(\hat{N})$ 是 $\hat{N}$ 的秩;$\bar{r}=\max(\hat{N})$ 对所有的 $\hat{N}\in N(A)$;$N_{\bar{r}}(A)$ 表示使 $r(\hat{N})=\bar{r}$ 的 A 的所有nil-矩阵的集合。

由nil-矩阵的定义,可得出下面nil-矩阵的特征。

引理2[1] 让 $\hat{N}$ 是一个nil-矩阵,N 是它的所有列的集合,让 $N'\subset N$,那么由 N' 组成的矩阵 $\hat{N}'$ 是一个nil-矩阵。

引理3[1] $\hat{N}$ 是一个 $m\times l$ 阶nil-矩阵,$(m\geqslant l)$。d 是任意一个长为 m 的0-1列向量,那么存在一个列 $d'\in\hat{N}$,使得由 $(N\setminus d')\cup d$ 构成的矩阵是一个nil-矩阵。

2 nil-矩阵与拟阵

例1 矩阵 A 的列分别为 d_1,d_2,d_3,d_4,或简单的记为1,2,3,4 ,即

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

于是有 $N(A)=\{1,2,3,4,(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4),(1,3,4),(2,3,4)\}$,$\bar{r}=3$ 且 $N_{\bar{r}}(A)=\{(1,3,4),(2,3,4)\}$,很显然 $(D,N_{\bar{r}}(A))$ 是一个拟阵,其基为(1,3,4)和(2,3,4)。

nil-矩阵的特征2(引理2)造成一个假象,好像它就是一个拟阵的基交换公理。于是文献[1]中便提出了以下问题。

让 $\hat{A}$ 是行集合为 C,列集合为 D 的一个关联矩阵,那么 $(D,N_{\bar{r}}(A))$ 是一个拟阵吗? 矩阵 $\hat{A}$ 满足什么条件,$(D,N_{\bar{r}}(A))$ 是一个拟阵呢? 在这种情况下,矩阵 $\hat{A}$ 的所有nil-矩阵是否形成了这个拟阵的独立集呢?

对以上问题的回答,先讨论引理2与拟阵基交换公理的区别。让 $N,N'\in N_{\bar{r}}(A)$ 且 $d\in N'\setminus N$,引理3说明存在一个列 $d'\in N$,使得由 $(N\setminus d')\cup d$ 构成的矩阵是一个nil-矩阵,然而,这里并没有要求 $d'\in N\setminus N'$,这便是它与基的交换公理的差别之处。

实际上,$(D,N_{\bar{r}}(A))$ 不一定是一个拟阵,下面将用一个反例来说明。在给出反例之前,先看一个nil-矩阵的特征。

定理1 一个关联矩阵 A 是一个秩为 r 的nil-矩阵的必要条件是,A 至少有 $r-1$ 个0,$r-2$ 个0,$r-3$ 个0,$\cdots$,1个0的行与列。

由nil-矩阵的定义,这个定理显然成立。

例2 矩阵 A 是列为 d_1,d_2,d_3,d_4,d_5 或者简单地记为1,2,3,4,5,即

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$N(A)=\{1,2,3,4,5,(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5),(1,2,4),(1,2,5),(1,3,4),(1,4,5),(2,3,4),(3,4,5),(2,3,5)\}$。

其中 $\bar{r}=3$,若 $(D,N_{\bar{r}}(A))$ 是一个拟阵,则它的

基为:(1,2,4),(1,2,5),(1,3,4),(1,4,5),(2,3,4),(3,4,5),(2,3,5)。对于基(1,2,5)与(1,3,4),$4\in(1,3,4)\backslash(1,2,5)$,在(1,2,5)中不存在不在(1,3,4)中的元素 x,使得(1,3,x)是基,即它不满足基的交换公理。从而$(D,N_{\bar{r}}(A))$不是一个拟阵。

那么,$(D,N_{\bar{r}}(A))$在矩阵 A 具有什么条件时是一个拟阵呢?

定理 2　对于关联矩阵 A,若任意秩为 $\bar{r}$ 的子矩阵皆为 *nil*-矩阵,则$(D,N_{\bar{r}}(A))$是一个拟阵,且其秩为 $\bar{r}$,而且这个矩阵 A 的所有 *nil*-矩阵都是拟阵$(D,N_{\bar{r}}(A))$的独立集。

实际上,满足定理条件的$(D,N_{\bar{r}}(A))$是一个均匀拟阵 $U_{\bar{r},l}$(l 为 A 的列数),基的数目最多为 $C_l^{\bar{r}}$。

定理 2 所给出的条件很强,能否将其减弱?或者说,能否找到一个使$(D,N_{\bar{r}}(A))$成为一个拟阵的矩阵 A 要满足的最好条件,这些问题还有待进一步研究。

参考文献:

[1] ALEKSEYEVSKAYA I V, GELFAND I M. Incidence Matrices, Geometrical Base, Combinatorial Prebase and Matroids[J]. Discrete Mathematics,1998,180:23-44.

[2] GWIHEN E,MICHEL L V. External and Internal Elements of A Matroid Basis [J]. Discrete Mathematics,1998,179:111-119.

[3] WENDY C. An Exchange Property of Matoid (Note)[J]. Discrete Mathematics,1995,146:299-302.

[4] JOSEPH E B. On Basis-exchange Properties for Matroids (Note)[J]. Discrete Mathematics,1998,187:265-268.

[5] 汪定国. 关联矩阵与拟阵[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版),2003,20(1):13-16.

[6] 刘桂真,陈庆华. 拟阵[M]. 北京:国防科技大学出版社,1994.

(责任编辑　黄　颖)