严格不变拟单调性*

刘芙萍

(重庆师范大学 数学与计算机学院, 重庆 400047)

摘 要:本文对严格拟单调进行推广,定义了严格不变拟单调:设 K 为 $\mathbf{R}^n$ 中的不变凸集,$\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,如果 f 是不变拟单调的,且对 $\forall x,y\in K,x\neq y$,存在 $z\in\{y+\lambda\eta(x,y):\lambda\in(0,1)\}$,使得 $\eta(x,y)^{\mathrm{T}}f(z)\neq 0$,则称 f 为集合 K 上相对于 η 的严格不变拟单调映射。并建立了严格不变拟单调与严格预拟不变凸之间的关系:设 K 为 $\mathbf{R}^n$ 中的不变凸集,f 是 K 上的可微函数,$\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,如果 η 满足文中所述条件 1,则 f 是集合 K 上相对于 η 的严格预拟不变凸函数的充分必要条件是 ∇f 是集合 K 上相对于 η 的严格不变拟单调,且对所有 $x,y\in K$,有 $f(y)\leqslant f(x)\Rightarrow f(y+\eta(x,y))\leqslant f(x)$ 成立。

关键词:严格不变拟单调;严格预拟不变凸;等价关系

中图分类号:O174.13 文献标识码:A 文章编号:1672-6693(2005)03-0060-03

Strictly Invariant Quasimonotonicity

LIU Fu-ping

(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: In this paper, the strictly invariant quasimonotone is defined as an extension of strictly quasimonotone: Let K of $\mathbf{R}^n$ be an invex set with respect to $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$. A map f is strictly invariant quasimonotone with respect to the same η on K, if f is invariant quasimonotone, and for any distinct $x,y\in K$, there exists $z\in\{y+\lambda\eta(x,y),\lambda\in(0,1)\}$, such as $\eta(x,y)^{\mathrm{T}}F(z)\neq 0$. Relationship between strictly invariant quasimonotonicity and strictly prequasiinvexity are established: Let K of $\mathbf{R}^n$ be an invex set with respect to η, and let f be a differentiable function on K. If η satisfies condition 1, then f is strictly prequasiinvex with respect to the same η on K, if and only if ∇f is strictly invariant quasimonotone with respect to the same η on K, and for all $x,y\in K$, $f(y)\leqslant f(x)$ implies $f(y+\eta(x,y))\leqslant f(x)$.

Key words: strictly invariant quasimonotone; strictly prequasiinvex; equivalent relation

在数理经济、工程、管理科学与优化理论中,凸性起着十分重要的作用。近年来,人们不断尝试去弱化凸性条件,并已取得一系列的成果。Hanson 引入了不变凸,并证明了在不变凸条件下,Kuhn-Tucker条件对非线性规划问题的最优化是充分的[1];Weir 和 Mond 引入了预不变凸函数的概念,并应用它在非线性规划中建立了充分的最优性条件和对偶性[2,3];杨新民对预不变凸函数的有关问题作了研究[4,5]。

而与凸性紧密相关的是单调性。一方面实值函数的凸性等价于相对应的梯度函数的单调性;另一方面,在研究变分不等式问题的存在与解的方法的过程中,单调性起着重要的作用。对凸性与单调性关系推广的一个重要突破是 Karamardian 和 Schaible 证明了伪凸性与伪单调性的等价以及拟凸性与拟单调性的等价[6]。在不变凸性方面,Ruiz-Garzón 等提出并证明了 7 类广义不变凸单调映射和 7 类广义不变凸函数之间的关系[7]。在预不变凸性方面,杨新民等提出了一些广义不变单调映射并建立了这些广义不变单调映射与广义预不变凸函数之间的关系[8]。本文引入严格不变拟单调映射,并建立了严格不变拟单调和严格预拟不变凸的关系。

1 严格不变拟单调映射

定义 1[9] 设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$,$\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,如果对 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]\Rightarrow y+\lambda\eta(x,y)\in K$,则称 K 为

* 收稿日期:2004-12-10 修回日期:2005-03-25

作者简介:刘芙萍(1975-),女,重庆长寿人,硕士研究生,主要研究方向为数学规划与算法。

相对于 η 的不变凸集。

定义 2[10] 设 K 为 $\mathbf{R}^n$ 中的不变凸集,如果对所有的 $x,y\in K,\lambda\in[0,1]$,有

$$f(y)\leqslant f(x)\Rightarrow f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant f(x)$$

成立,则称 f 是集合 K 上相对于这个 η 的预拟不变凸函数。

定义 3[11] 设 K 为 $\mathbf{R}^n$ 中的不变凸集,f: $K\to\mathbf{R}$,η: $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,如果对 $\forall x,y\in K,x\neq y$, $\forall\lambda\in(0,1)$,有 $f(y+\lambda\eta(x,y))<\max\{f(x),f(y)\}$,则称 f 是集合 K 上相对于这个 η 的严格预不变凸函数。

定义 4[8] 设 K 为 $\mathbf{R}^n$ 中的不变凸集,如果对任意 $x,y\in K,x\neq y$,存在 η: $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,使得

$$\eta(y,x)^{\mathrm{T}}f(x)>0\Rightarrow\eta(x,y)^{\mathrm{T}}f(y)\leqslant 0$$

成立,则称 f 是集合 K 上相对于这个 η 的不变拟单调映射。

定义 5[12] 设 K 为 $\mathbf{R}^n$ 中的凸集,若 f 是拟单调的,且对 $\forall x,y\in K,x\neq y$,存在 $z\in(x,y)$,使得 $(y-x)^{\mathrm{T}}f(z)\neq 0$,则称 f 为严格拟单调映射。

定义 6 设 K 为 $\mathbf{R}^n$ 中的不变凸集,η: $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,若 f 是不变拟单调的,且对 $\forall x,y\in K,x\neq y$,存在 $z\in\{y+\lambda\eta(x,y):\ \lambda\in(0,1)\}$,使得 $\eta(x,y)^{\mathrm{T}}\cdot f(z)\neq 0$,则称 f 为集合 K 上相对于 η 的严格不变拟单调映射。

每一个严格不变拟单调映射是不变拟单调的,但反之不然。

例 1 如下定义映射 f 和 η

$$f(x)=(\sin^2x_1\cos x_1,\sin^2x_2\cos x_2),$$
$$x\in[0,\pi]\times[0,\pi]$$
$$\eta(x,y)=[\cos y_1(\sin x_1-\sin y_1),\cos y_2(\sin x_2-\sin y_2)]$$
$$x,y\in[0,\pi]\times[0,\pi]$$

显然,F 是不变拟单调的。

但当 $x_1=x_2,y_1=y_2$,且 $\sin x=\sin y$(如:$x=\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right),y=\left(\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$ 时),则对每一个 $z\in\{y+\lambda\eta(x,y),\lambda\in(0,1)\}$,$\eta(x,y)=0$。则有 $\eta(x,y)^{\mathrm{T}}\cdot f(z)=0$,所以 f 不是一个严格不变拟单调映射。

每一个严格拟单调映射是一个严格不变拟单调映射,但反之不然。

例 2 如下定义映射 f 和 η

$$f(x)=(\cos2x_1,\cos2x_2),x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$
$$\eta(x,y)=[\cos2y_1(\sin x_1-\sin y_1),$$
$$\cos2y_2(\sin x_2-\sin y_2)]\qquad x,y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

显然,在讨论 η 时,f 是严格不变拟单调的,令 $x=\left(\frac{3\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right),y=\left(\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{8}\right)$,则 $(y-x)^{\mathrm{T}}f(x)=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$,但 $(y-x)^{\mathrm{T}}f(y)=-\frac{\sqrt{2}\pi}{4}<0$。这样 f 不是拟单调的,所以,f 也不是严格拟单调的。

2 严格不变拟单调和严格预拟不变凸的关系

条件 1[9] 设 η: $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,则对 $\forall x,y\in\mathbf{R}^n$, $\forall\lambda\in[0,1]$,$\eta(y,y+\lambda\eta(x,y))=-\lambda\eta(x,y)$,$\eta(x,y+\lambda\eta(x,y))=(1-\lambda)\eta(x,y)$。

引理 1[8] 设 K 为 $\mathbf{R}^n$ 中的不变凸集,f 是 K 上的可微函数,η: $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,如果 f 满足条件 1,则 f 是集合 K 上相对于 η 的预拟不变凸函数的充分必要条件是,∇f 是集合 K 上相对于 η 的不变拟单调,且对所有 $x,y\in K,f(y)\leqslant f(x)\Rightarrow f(y+\eta(x,y))\leqslant f(x)$ 成立。

引理 2[11] 设 K 为 $\mathbf{R}^n$ 中的不变凸集,η: $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,$f$ 是集合 K 上相对于 η 的严格预拟不变凸函数的充分必要条件是以下条件成立:

1) f 是集合 K 上相对于 η 的预拟不变凸函数;

2) 存在 $\alpha\in(0,1)$,使得对 $\forall x,y\in K,x\neq y$,有 $f(y+\alpha\eta(x,y))<\max\{f(x),f(y)\}$。

定理 1 设 K 为 $\mathbf{R}^n$ 中的不变凸集,f 是 K 上的可微函数,η: $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,如果 η 满足条件 1,则 f 是集合 K 上相对于 η 的严格预拟不变凸函数的充分必要条件是,∇f 是集合 K 上相对于 η 的严格不变拟单调,且对所有 $x,y\in K$,有

$$f(y)\leqslant f(x)\Rightarrow f(y+\eta(x,y))\leqslant f(x)$$

成立。

证明 设 f 是严格预拟不变凸函数,通过引理 2,f 是预拟不变凸的,且存在 $\lambda\in(0,1)$,使得对 $\forall x,y\in K,x\neq y$,有

$$f(y+\lambda\eta(x,y))<\max\{f(x),f(y)\}$$

通过已知条件和引理 1,则 ∇f 是不变拟单调的。

定义函数 g 为

$$g(\lambda)=f(y+\lambda\eta(x,y)),\lambda\in[0,1]$$

则 g 不是常数,因为

1) 当 $f(x)<f(y)$ 时,显然 g 不是一个常数;

2) 当 $f(x)>f(y)$,如果 g 是常数,则存在 $\lambda_1\in[0,1]$,$y,y+\lambda_1\eta(x,y)\in K$,有

$$f(y)=f(y+\lambda_\eta(x,y))$$

及 $$y+\lambda_1\eta(x,y)+\hat{\lambda}\eta(y,y+\lambda_1\eta(x,y))=$$
$$y+\lambda_1\eta(x,y)-\hat{\lambda}\lambda_1\eta(x,y)=$$
$$y+(\lambda_1-\hat{\lambda}\lambda_1)\eta(x,y)\in K,\hat{\lambda},\lambda_1-\hat{\lambda}\lambda_1\in[0,1]$$
则
$$f(y+\lambda_1\eta(x,y)+\hat{\lambda}\eta(y,y+\lambda_1\eta(x,y)))=$$
$$f(y+(\lambda_1-\hat{\lambda}\lambda_1)\eta(x,y))<$$
$$f(y)=f(y+\lambda_1\eta(x,y))$$
与已知矛盾。所以对某些 λ,$g'(\lambda)\neq 0$,因此对这些 λ,有
$$\eta(x,y)^{\mathrm{T}}\nabla f(y+\lambda\eta(x,y))\neq 0$$
即 ∇f 是严格不变拟单调的。

反之,设 ∇f 是严格不变拟单调的,由定义,∇f 是不变拟单调的。又因为对所有的 $x,y\in K$,有 $f(y)\leqslant f(x)\Rightarrow f(y+\eta(x,y))\leqslant f(x)$ 成立。所以,由引理1,f 是预拟不变凸函数,从而对任意的 $x,y\in K,\lambda\in[0,1]$,有 $f(y)\leqslant f(x)\Rightarrow f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant f(x)$ 成立。

下证对任意一对不同的点 $x,y\in K$ 都存在一个 $\lambda\in(0,1)$,使得 $f(y+\lambda\eta(x,y))\neq f(x)$。

反证,若对任意的 $\lambda\in(0,1)$,有
$$f(y+\eta\lambda(x,y))=f(x)$$
因为 ∇f 是严格不变拟单调的,即对 $\forall x,y\in K,x\neq y$,存在 $z\in\{y+\lambda\eta(x,y):\ \lambda\in(0,1)\}$,使得
$$\eta(x,y)^{\mathrm{T}}\nabla f(z)\neq 0$$
这与对任意的 $\lambda\in(0,1)$,$f(y+\lambda\eta(x,y))=f(x)$ 矛盾。因此,对 $\forall x,y\in K,x\neq y$,存在一个 $\lambda\in(0,1)$,使得 $f(y+\lambda\eta(x,y))<f(x)=\max\{f(x),f(y)\}$。

则由引理2,f 是严格预拟不变凸函数。　证毕

参考文献:

[1] HANSON M A. On Sufficiency of the Kuhn Tucker Conditions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1981,80: 545-550.

[2] WEIR T, MOND B. Preinvex Functions in Multiple-Objective Optimization[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1988,136: 29-38.

[3] WEIR T, JEYAKUMAR V. A Class of Nonconvex Functions and Mathematical Programming[J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 1988,38: 177-189.

[4] 杨新民. 凸函数的一个新特征性质[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版), 2000, 17(1): 9-12.

[5] 杨新民. 凸函数的两个充分性条件[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版), 1994, 11(4): 9-12.

[6] KARAMARDIAN S, SCHAIBLE S. Seven Kinds of Monotone Maps[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,1990,66: 37-46.

[7] RUIZ-GARZON G, OSUNA-GOMEZ R, UFIAN-LIZANA A. Generalized Invex Monotonicity[J]. European Journal of Operational Research, 2003,144: 501-502.

[8] YANG X M, YANG X Q, TEO K L. Generalized Invexity and Generalized Invariant Monotonicity[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2003,117(3): 607-625.

[9] MOHAN S R, NEOGY S K. On Invex Sets and Preinvex Functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1995, 189: 901-908.

[10] PINI R. Invexity and Generalized Convexity[J]. Optimization,1991, 22: 513-525.

[11] YANG X M, YANG X Q, TEO K L. Characterizations and Applications of Prequasi-Invex Funtions[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2001,110(3): 645-668.

[12] HADJISAVVAS N, SCHAIBLE S. On Strong Pseudomonotonicity and (Semi) Strict Quasimonotonicity[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1993,79(1): 139-155.

(责任编辑　黄　颖)