2005 年 12 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Dec. 2005
第 22 卷 第 4 期 Journal of Chongqing Normal University(Natural Science Edition) Vol. 22 No. 4

Banach 空间上广义渐近拟非扩张型映象不动点的逼近*

向 长 合
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院,重庆 400047)

摘　要:引入一类比渐近拟非扩张型映象更加广泛的广义渐近拟非扩张型映象,并给出具混合误差的 Ishikawa 迭代序列强收敛于广义渐近拟非扩张型映象的一个不动点的充要条件:设 E 是一 Banach 空间,$T:E\to E$ 是广义渐近拟非扩张型映象,其渐近系数 k_n 满足 $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n-1)<\infty$;若 T 在 $F(T)$ 中的点处一致连续,任取一点 $x_0\in E$,$\{x_n\}$ 是由下式定义的具混合误差的 Ishikawa 迭代序列 $\begin{cases}x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nT^ny_n+u_n,\\ y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_nT^nx_n+v_n,n\geqslant 0\end{cases}$,其中 $\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的两个数列且 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n$ 收敛,$\{u_n\}$、$\{v_n\}$ 是 E 中两个点列且 $\{v_n\}$ 有界同时 $\sum_{n=0}^{\infty}\|u_n\|$ 收敛。则 $\{x_n\}$ 强收敛于 T 在 E 中一个不动点的充要条件是 $\liminf\limits_{n\to\infty}D(x_n,F(T))=0$。

关键词:Banach 空间;渐近非扩张映象;渐近拟非扩张映象;渐近拟非扩张型映象;迭代序列;不动点;混合误差
中图分类号:O177.91　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2005)04-0006-04

Approximation of Fixed Points of Generalized Asymptotic Quasi-nonexpansive Type Mapping

XIANG Chang-he
(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: This paper introduces a generalized asymptotically quasi-nonexpansive type mapping—a class of mapping, which is more general than asymptotic quasi-nonexpansive type mapping and gives some necessary and sufficient conditions for the Ishikawa iterative sequence with mixed errors to converge strongly to a fixed point of generalized asymptotic quasi-nonexpansive type mapping. The results presented in this paper improve and generalize some recent results.

Key words: Banach space; asymptotically nonexpansive mappings; asymptotically quasi-nonexpansive mappings; asymptotically quasi-nonexpansive type mappings; iterative sequence; fixed point; mixed error

不动点理论在研究各类方程中起着非常重要的作用。为了扩大其应用范围,在 Goebel 和 Kirk 于 1972 年首次引入了渐近非扩张映象的概念之后,人们又相继提出渐近非扩张型映象、渐近拟非扩张映象、渐近拟非扩张型映象等概念,并对其不动点的各种迭代序列逼近进行了研究,得到大量成果。本文引入一类更加广泛的广义渐近拟非扩张型映象,并讨论其不动点的逼近问题。

1　预备知识

定义 1　设 E 是 Banach 空间,C 是 E 中的非空子集,T 是从 C 到 C 的映象,$F(T)$ 是 T 的所有不动点构成的集合,则

* 收稿日期:2005-03-22
资助项目:国家自然科学基金项目(No. 10471159)
作者简介:向长合(1963-),男,四川岳池人,副教授,研究方向为非线性分析及微分方程。

1)称 T 是渐近非扩张映象[1],如果存在 $\{k_n\}\subset[1,\infty)$,$\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$,使得

$$\|T^nx-T^ny\|\leqslant k_n\|x-y\|,\forall n\geqslant 1,\forall x,y\in C;$$

2)称 T 是渐近非扩张型映象[2],如果 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sup\limits_{x,y\in C}(\|T^nx-T^ny\|^2-\|x-y\|^2)\leqslant 0$;

3)称 T 是渐近拟非扩张映象[3,4],如果 $F(T)$ 非空且存在 $\{k_n\}\subset[1,\infty)$,$\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$,使得

$$\|T^nx-p\|\leqslant k_n\|x-p\|,\forall x\in C,\forall p\in F(T),\forall n\geqslant 1;$$

4)称 T 是渐近拟非扩张型映象[5],如果 $F(T)$ 非空且 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sup\limits_{x\in C,p\in F(T)}(\|T^nx-p\|^2-\|x-p\|^2)\leqslant 0$。

最近,文献[5]对渐近拟非扩张型映象的不动点的逼近问题进行了研究,得到如下两个定理。

定理1[5] 设 E 是一Banach空间,$T:E\to E$ 是一个渐近拟非扩张型映象且满足如下条件:存在两个常数 $L>0$ 和 $\alpha>0$,使得 $\|Tx-p\|\leqslant L\|x-p\|^{\alpha}$,$\forall x\in E$,$\forall p\in F(T)$。任取一点 $x_0\in E$,$\{x_n\}$ 是由下式定义的具混合误差的Ishikawa迭代序列[6]

$$\begin{cases}x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nT^ny_n+u_n\\ y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_nT^nx_n+v_n,n\geqslant 0\end{cases}\tag{1}$$

其中 $\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的两个数列,$\{u_n\}$、$\{v_n\}$ 是 E 中两个点列且满足条件 i)$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n<\infty$,ii)$\{v_n\}$ 有界,$u_n=u'_n+u''_n$,$n\geqslant 0$ 且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|u'_n\|<\infty$,$\|u''_n\|=o(\alpha_n)$,则 $\{x_n\}$ 强收敛于 T 在 E 中一个不动点当且仅当

$$\liminf_{n\to\infty}D(x_n,F(T))=0\tag{2}$$

其中 $D(y,S)$ 表示点 y 到集合 S 的距离,即 $D(y,S)=\inf\limits_{s\in S}\|y-s\|$。

注1 当定理1中条件 i)满足时,条件 ii)中对 $\{u_n\}$ 的假设等价于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|u_n\|<\infty$。

定理2[5] 设 E 是一Banach空间,$T:E\to E$ 是一个具有不动点的渐近非扩张映象,$\{x_n\}$ 是由(1)式定义的满足定理1中条件 i)和 ii)的具混合误差的Ishikawa迭代序列,则 $\{x_n\}$ 强收敛于 T 在 E 中一个不动点当且仅当(2)式成立。

文献[5]得到定理1后,接着证明具有不动点的渐近非扩张映象是渐近拟非扩张型映象并满足定理1中的条件,从而得到定理2,其证明思路如下。

由于 T 是具有不动点的渐近非扩张映象,从而 $\|T^nx-p\|^2-k_n^2\|x-p\|^2\leqslant 0$,$\forall x\in E$,$\forall p\in F(T)$,由此得到 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sup\limits_{x\in E,p\in F(T)}(\|T^nx-p\|^2-\|x-p\|^2)\leqslant 0$,即 T 是渐近拟非扩张型映象。显然,这一证明是不严格的,因此,定理2是否成立尚有待进一步研究。事实上,若 T 是从 C 到 C 的具有不动点的渐近非扩张映象,则有

$$\|T^nx-p\|^2-\|x-p\|^2\leqslant(k_n^2-1)\|x-p\|^2,\forall x\in C,\forall p\in F(T),$$

由此及 $\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$,只能得到当 C 是 E 中有界子集时,具有不动点的渐近非扩张映象一定是渐近拟非扩张型映象。在一般情况下,此结论不一定成立。由此可见,有必要进一步对渐近拟非扩张型映象进行推广。

定义2 设是Banach空间,C 是 E 中的非空子集,T 是从 C 到 C 的映象,$F(T)$ 是 T 的所有不动点构成的集合,则

1)称 T 是广义渐近非扩张型映象,如果存在 $\{k_n\}\subset[1,\infty)$,$\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$,使得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{x,y\in C}(\|T^nx-T^ny\|-k_n\|x-y\|)\leqslant 0;$$

2)称 T 是广义渐近拟非扩张型映象,如果 $F(T)$ 非空且存在 $\{k_n\}\subset[1,\infty)$,$\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$,使得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{x\in C,p\in F(T)}(\|T^nx-p\|-k_n\|x-p\|)\leqslant 0。$$

将其中的 k_n 称为 T 的渐近系数。

注2 当 C 是 E 中有界子集时,广义渐近非扩张型映象等价于渐近非扩张型映象,广义渐近拟非扩张型映象等价于渐近拟非扩张型映象;在一般情况下,渐近拟非扩张映象、渐近拟非扩张型映象以及具有不动点的渐近非扩张映象、渐近非扩张型映象、广义渐近非扩张型映象都是广义渐近拟非扩张型映象的特例。

本文的目的就是研究上述映象中最广泛的广义渐近拟非扩张型映象的不动点的迭代逼近问题。为此给

出如下一些引理。

引理 1[7]　设 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$ 是 3 个非负数列，满足 $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n<\infty$，$\sum_{n=n_0}^{\infty} c_n<\infty$；$a_{n+1}\leqslant(1+b_n)a_n+c_n(n\geqslant n_0)$，其中 n_0 是某非负整数，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在。

引理 2　设 E 是赋范线性空间，T 是从 E 到 E 的映象且 $F(T)$ 非空，若 T 在 $F(T)$ 中的点处一致连续，即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x\in E$，$p\in F(T)$ 且 $\|x-p\|<\delta$ 时，有 $\|Tx-Tp\|=\|Tx-p\|<\varepsilon$，则 $F(T)$ 是 E 中的闭子集。

证明　设 $\{p_n\}$ 是 $F(T)$ 中任一点列且在 E 中强收敛于点 x^*。由 T 在 $F(T)$ 中的点处一致连续得，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x\in E$，$p\in F(T)$ 且 $\|x-p\|<\delta$ 时，有 $\|Tx-p\|<\varepsilon$。取 $\varepsilon_1=\min\{\varepsilon,\delta\}>0$，则存在自然数 N，当 $n\geqslant N$ 时，$\|x^*-p_n\|<\varepsilon_1$，从而 $\|Tx^*-p_n\|<\varepsilon$。由此得 $\|Tx^*-x^*\|\leqslant\|Tx^*-p_N\|+\|p_N-x^*\|<\varepsilon+\varepsilon_1\leqslant 2\varepsilon$，由 ε 的任意性知 $Tx^*=x^*$，即 $x^*\in F(T)$。　　证毕

注 3　若 T 满足定理 1 中条件：存在常数 $L>0$ 和 $\alpha>0$，使得 $\|Tx-p\|\leqslant L\|x-p\|^{\alpha}$，$\forall x\in E$，$\forall p\in F(T)$，则 T 在 $F(T)$ 中的点处一致连续；特别地，若 T 是渐近拟非扩张映象，则 T 在 $F(T)$ 中的点处一致连续。

2　主要结论

定理 3　设 E 是一 Banach 空间，T: $E\to E$ 是广义渐近拟非扩张型映象，其渐近系数 k_n 满足 $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n-1)<\infty$；若 T 在 $F(T)$ 中的点处一致连续，任取一点 $x_0\in E$，$\{x_n\}$ 是根据

$$\begin{cases}x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n T^n y_n+u_n\\ y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n T^n x_n+v_n,n\geqslant 0\end{cases}\tag{3}$$

定义的具混合误差的 Ishikawa 迭代序列得到，其中 $\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的两个数列且 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n$ 收敛，$\{u_n\}$、$\{v_n\}$ 是 E 中两个点列且 $\{v_n\}$ 有界同时 $\sum_{n=0}^{\infty}\|u_n\|$ 收敛。则 $\{x_n\}$ 强收敛于 T 在 E 中一个不动点的充要条件是 $\liminf\limits_{n\to\infty} D(x_n,F(T))=0$。

证明　必要性显然，下面证明充分性。设 $\liminf\limits_{n\to\infty} D(x_n,F(T))=0$。首先证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n,F(T))$ 存在且等于零。任意给定 $\varepsilon>0$，由于 T 是广义渐近拟非扩张型映象，所以，存在自然数 $N=N(\varepsilon)$，当 $n\geqslant N$ 时，有 $\|T^n x-p\|-k_n\|x-p\|<\varepsilon$，$\forall x\in E$，$\forall p\in F(T)$，注意到 $\{k_n\}\subset[1,\infty)$，当 $n\geqslant N$ 时，有

$$\begin{aligned}\|y_n-p\|=&\|(1-\beta_n)(x_n-p)+\beta_n(T^n x_n-p)+v_n\|\leqslant\\ &(1-\beta_n)\|x_n-p\|+\beta_n(\|T^n x_n-p\|-k_n\|x_n-p\|)+\beta_n k_n\|x_n-p\|+\|v_n\|\leqslant\\ &(1-\beta_n)k_n\|x_n-p\|+\beta_n\varepsilon+\beta_n k_n\|x_n-p\|+\|v_n\|=k_n\|x_n-p\|+\beta_n\varepsilon+\|v_n\|\\ \|x_{n+1}-p\|=&\|(1-\alpha_n)(x_n-p)+\alpha_n(T^n y_n-p)+u_n\|\leqslant\\ &(1-\alpha_n)\|x_n-p\|+\alpha_n(\|T^n y_n-p\|-k_n\|y_n-p\|)+\alpha_n k_n\|y_n-p\|+\|u_n\|\leqslant\\ &(1-\alpha_n)k_n^2\|x_n-p\|+\alpha_n\varepsilon+\alpha_n k_n(k_n\|x_n-p\|+\beta_n\varepsilon+\|v_n\|)+\|u_n\|\leqslant\\ &k_n^2\|x_n-p\|+(\varepsilon+K\varepsilon+K\|v_n\|)\alpha_n+\|u_n\|=(1+b_n)\|x_n-p\|+c_n,\forall n\geqslant N,\forall p\in F(T)\end{aligned}\tag{4}$$

其中 $1\leqslant K=\sup\limits_{n\geqslant 1} k_n<\infty$，$0\leqslant b_n=k_n^2-1\leqslant 2K(k_n-1)$，$c_n=(\varepsilon+K\varepsilon+K\|v_n\|)\alpha_n+\|u_n\|$。注意到 b_n 和 c_n 均与点 p 无关，当 $n\geqslant N$ 时，有 $D(x_{n+1},F(T))\leqslant(1+b_n)D(x_n,F(T))+c_n$。由于 $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n-1)$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛；再由 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}\|u_n\|$ 收敛且 $\{v_n\}$ 有界，知 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛。故由引理 1 知 $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n,F(T))$ 存在。再结合假设得 $\liminf\limits_{n\to\infty} D(x_n,F(T))=0$ 得

$$\lim_{n\to\infty} D(x_n,F(T))=0\tag{5}$$

然后证明 $\{x_n\}$ 是 E 中 Cauchy 点列。由(5)式知，存在自然数 N_1，当 $n\geqslant N_1$ 时，有 $D(x_n,F(T))<\varepsilon$，从而存在 $p_n\in F(T)$，使得

$$\|x_n-p_n\|<\varepsilon\tag{6}$$

由(4)式，当 $n\geqslant N$ 且 $n\geqslant N_1$ 时，有 $\|x_{n+m}-p_n\|\leqslant(1+b_{n+m-1})\|x_{n+m-1}-p_n\|+c_{n+m-1}$，$\forall m\geqslant 1$。

因此，

$$\begin{aligned}\|x_{n+m}-x_n\|\leqslant&\|x_{n+m}-p_n\|+\|p_n-x_n\|\leqslant(1+b_{n+m-1})\|x_{n+m-1}-p_n\|+c_{n+m-1}+\|x_n-p_n\|\leqslant\\ &(1+b_{n+m-1})[(1+b_{n+m-2})\|x_{n+m-2}-p_n\|+c_{n+m-2}]+c_{n+m-1}+\|x_n-p_n\|\leqslant\end{aligned}$$

$$(1+b_{n+m-1})\cdots(1+b_n)\|x_n-p_n\|+(1+b_{n+m-1})\cdots(1+b_{n+1})c_n+\cdots+(1+b_{n+m-1})c_{n+m-2}+c_{n+m-1}+\|x_n-p_n\|\leqslant$$
$$\exp(\sum_{k=n}^{\infty}b_k)(\|x_n-p_n\|+\sum_{k=n}^{\infty}c_k)+\|x_n-p_n\| \tag{7}$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$及$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$收敛,故存在自然数N_2,当$n\geqslant N_2$时,有 $\sum_{k=n}^{\infty}b_k<\ln 2$, $\sum_{k=n}^{\infty}c_k<\varepsilon$ (8)

因此,由(6)、(7)、(8)式知,当$n\geqslant\max\{N,N_1,N_2\}$且$m\geqslant 1$时,有$\|x_{n+m}-x_n\|\leqslant 2(\varepsilon+\varepsilon)+\varepsilon=5\varepsilon$。这说明$\{x_n\}$是Banach空间$E$中Cauchy点列,必强收敛于$E$中一点$x^*$。

最后证明$x^*\in F(T)$。由于$|D(x_n,F(T))-D(x^*,F(T))|\leqslant\|x_n-x^*\|$,由此及(5)式得

$$D(x^*,F(T))=\lim_{n\to\infty}D(x_n,F(T))=0$$

根据引理2,$F(T)$是E中的闭子集,从而$x^*\in F(T)$,即$\{x_n\}$强收敛于$F(T)$中一点x^*。 证毕

定理4 设E是一Banach空间,$T:E\to E$是一个渐近拟非扩张映象,其渐近系数k_n满足$\sum_{n=1}^{\infty}(k_n-1)<\infty$;$\{x_n\}$是由(3)式定义的满足定理3中条件的具混合误差的Ishikawa迭代序列,则$\{x_n\}$强收敛于T在E中一个不动点的充要条件是$\liminf_{n\to\infty}D(x_n,F(T))=0$。

证明 由注2、注3及定理3即得。 证毕

根据此定理,可以给出定理2如下的一个正确形式。

定理5 设E是一Banach空间,$T:E\to E$是一个具有不动点的渐近非扩张映象,其渐近系数k_n满足$\sum_{n=1}^{\infty}(k_n-1)<\infty$;$\{x_n\}$是由(3)式定义的满足定理3中条件的具混合误差的Ishikawa迭代序列,则$\{x_n\}$强收敛于T在E中一个不动点的充要条件是$\liminf_{n\to\infty}D(x_n,F(T))=0$。

注4 对于渐近拟非扩张映象,仔细分析本文定理3的证明过程可知,若去掉“$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n$收敛”这一限制,只需增加“$\sum_{n=0}^{\infty}\|v_n\|$收敛”这一条件,本文结论仍然成立。

注5 本文主要是在如下几方面对文献[5]进行了推广和改进。

1)将文献[5]中的渐近拟非扩张型映象推广到了广义渐近拟非扩张型映象,定理1仅是本文定理3的推论;

2)定理1中的条件“存在两个常数$L>0$和$\alpha>0$,使得$\|Tx-p\|\leqslant L\|x-p\|^{\alpha}$,$\forall x\in E$,$\forall p\in F(T)$”被本文“$T$在$F(T)$中的点处一致连续”这一较弱的条件取代,甚至可以用“$F(T)$是闭子集”这一更弱的条件取代。

参考文献:

[1] GOEBEL K, KIRK W A. A Fixed Point Theorem for Asymptotically Nonexpansive Mappings [J]. Proc Amer Math Soc, 1972, 35:171-174.

[2] KIRK W A. Fixed Point Theorems Non-Lipschitzian Mappings of Asymptotically Nonexpansive Type [J]. Israel J Math, 1974, 17:339-346.

[3] LIU Q H. Iterative Sequences for Asymptotically Quasi-Nonexpansive Mappings with Error Member [J]. J Math Anal Appl, 2001, 259:18-24.

[4] LIU Q H. Iterative Sequences for Asymptotically Quasi-Nonexpansive Mappings with Error Member of Uniformly Convex Banach Spaces [J]. J Math Anal Appl, 2002, 266:468-471.

[5] CHANG S S, KIM J K, KANG S M. Approximating Fixed Points of Asymptotically Quasi-Nonexpansive Type Mappings by the Ishikawa Iterative Sequences with Mixed Errors[J]. Dynamic Systems and Applications, 2004, 13:179-186.

[6] ZHOU H Y, CHO Y J, CHANG S S. Approximating the Fixed Points of Φ-hemicontractions by the Ishikawa Iterative Process with Mixed Errors in Normed Linear Spaces [J]. Nonlinear Anal TMA, 2001, 47:4819-4826.

[7] ZHOU Y Y, CHANG S S. Convergence of Implicit Iterative Process for a Finite Family of Asymptotically Nonexpansive Mappings in Banach Spaces [J]. Numer Funct Anal and Optimiz, 2002, 23:911-921.

(责任编辑 黄 颖)