Banach空间中关于增生算子方程解带误差的 Ishikawa 迭代序列*

龙宪军, 全 靖
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院, 重庆 400047)

摘 要 设 X 是任意实 Banach 空间, $T: X\to X$ 是 Lipschitz 连续的增生算子,在没有假设 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n<\infty$ 之下,证明了由 $x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n(f-Ty_n)+u_n$ 及 $y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n(f-Tx_n)+v_n$, $\forall n\geqslant 0$ 生成的、带误差的 Ishikawa 迭代序列强收敛到方程 $x+Tx=f$ 的唯一解,并给出了更为一般的收敛率估计:若 $u_n=v_n=0$, $\forall n\geqslant 0$,则有 $\|x_{n+1}-x^*\|\leqslant(1-\gamma_n)\|x_n-x^*\|\leqslant\cdots\leqslant\prod_{j=0}^{n}(1-\gamma_j)\|x_0-x^*\|$,其中 $\{\gamma_n\}$ 是 $(0,1)$ 中的序列,满足 $\gamma_n\geqslant\left[\frac{1}{2}\max\{\eta,1-\eta\}-\frac{1}{4}\min\{\eta,1-\eta\}\right]\alpha_n$, $\forall n\geqslant 0$。

关键词:任意实 Banach 空间;Lipschitz 增生算子;带误差的 Ishikawa 迭代序列;收敛率估计
中图分类号:O177.91 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2005)04-0010-04

Ishikawa Iteration Process with Errors for Solutions to Equations Involving Accretive Operators in Banach Space

LONG Xian-jun, *QUAN Jing*
(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: Let X be an arbitrary real Banach space and $T: X\to X$ be a Lipschitz continuous accretive operator. Under the lack of the assumption of $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n<\infty$, it is shown that the Ishikawa iterative sequence with errors engendered by $x_{n+1}=(1-\alpha_n)\cdot x_n+\alpha_n(f-Ty_n)+u_n$ and $y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n(f-Tx_n)+v_n$ for all $n\geqslant 0$. converges strongly to the unique solution of the equation $x+Tx=f$. Moreover, this result provides a general convergence rate estimation for such a sequence: if $u_n=v_n=0$ for all $n\geqslant 0$, then we have $\|x_{n+1}-x^*\|\leqslant(1-\gamma_n)\|x_n-x^*\|\leqslant\cdots\leqslant\prod_{j=0}^{n}(1-\gamma_j)\|x_0-x^*\|$, where $\{\gamma_n\}$ is a sequence in $(0,1)$, such that for all $n\geqslant 0$, $\gamma_n\geqslant\left[\frac{1}{2}\max\{\eta,1-\eta\}-\frac{1}{4}\min\{\eta,1-\eta\}\right]\alpha_n$, $\forall n\geqslant 0$.

Key words: arbitrary real Banach space; Lipschitz accretive operator; Ishikawa iterative process with errors; convergence rate estimate

1 预备知识

设 X 是任意实 Banach 空间,其范数与对偶空间分别记成 $\|\cdot\|$ 与 X^*。记 $J(\cdot): X\to 2^{X^*}$ 是 X 的正规对偶映像,即 $J(x)=\{x^*\in X^*: \langle x,x^*\rangle=\|x\|^2=\|x^*\|^2\}$, $\forall x\in X$。其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 X 与 X^* 之间的广义对偶对。X 中具有定义域 $D(T)$ 与值域 $R(T)$ 的算子 T 称为增生的,若对任意 $x,y\in D(T)$,存在 $j(x-y)\in J(x$

* 收稿日期:2005-04-04
资助项目:重庆市科委科研课题基金(No. 8409)
作者简介:龙宪军(1980-),男,重庆人,硕士研究生,研究方向为最优化与变分不等式理论与算法。

$-y)$,使得$\langle Tx-Ty,j(x-y)\rangle\geqslant 0$。$T$ 是增生的当且仅当对一切 $x,y\in D(T)$ 及 $r>0$,有 $\|x-y\|\leqslant\|x-y+r(Tx-Ty)\|$。这表明,$T$ 是强增生的,当且仅当$(T-kI)$是增生的。一个增生算子 T 称为 m-增生的,若 $R(I+rT)=X$ 对一切 $r>0$,其中 I 是 X 上的恒等算子。T 称为耗散算子(m-耗散算子),若$(-T)$是增生的(m-增生的)。增生算子由 Browder[1] 与 Kato[2] 各自独立引入。在增生算子理论中,一个归功于 Browder 的早期的基本结果是,若 T 是 X 上的局部 Lipschitz 增生算子,则初值问题

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+Tu=0,u(0)=u_0 \tag{1}$$

有解。进一步,利用方程(1)式的存在性结果,Browder[1] 证明了,如果 T 是局部 Lipschitz 增生算子,则 T 是 m-增生的。特别地,对任意 $f\in X$,方程 $x+Tx=f$ 有解。

最近,Liu[3] 把 Tan 与 Xu[4] 的结果从 p 一致光滑 Banach 空间推广到任意 Banach 空间,而且还提供了收敛率估计。同时,曾六川[5,6] 又把 Liu[3] 的结果加以改进和推广,去掉了部分限制条件。基于以上研究,本文设 X 是任意实 Banach 空间,$T:\ X\to X$ 是 Lipschitz 连续的增生算子,在没有假设 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n<\infty$ 之下,证明了带误差的 Ishikawa 迭代序列强收敛到方程 $x+Tx=f$ 的唯一解,并提供了更为一般的收敛率估计。因此所得结果改进和推广了文献[1~7]中相应的结果。

引理1[7] 设 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$ 与 $\{t_n\}$ 是非负实数列,满足条件 i)$t_n\in[0,1]$,且 $\sum_{n=0}^{\infty}t_n=\infty$;ii)$\sum_{n=0}^{\infty}b_n<\infty$,且 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n<\infty$。若 $a_{n+1}\leqslant(1-t_n)a_n+b_na_n+c_n$,$\forall n\geqslant 0$,则 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$。

引理2[8] 设 X 是实 Banach 空间,且 $T:\ D(T)\subset X\to X$ 是一 m-增生映像,则对任给 $f\in X$,方程 $x+Tx=f$ 在 $D(T)$ 中有唯一解。

2 主要结果

定理1 设 X 是任意实 Banach 空间,$T:\ D(T)=X\to X$ 是 Lipschitz 连续的增生算子。又设 $\{u_n\}$ 与 $\{v_n\}$ 是 X 中的序列,$\{\alpha_n\}$ 与 $\{\beta_n\}$ 是$[0,1]$中的实序列,且满足条件 i)$\sum_{n=0}^{\infty}\|u_n\|<\infty$,且 $\|v_n\|\to 0(n\to\infty)$;ii)$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$;iii)$0<\alpha_n\leqslant\dfrac{1-\max\{\eta,1-\eta\}-\frac{1}{2}\min\{\eta,1-\eta\}}{(L+1)^2+(L-1)\min\{\eta,1-\eta\}}$ 且 $0\leqslant\beta_n\leqslant\dfrac{\min\{\eta,1-\eta\}}{L(L+1)}$,对某个 $\eta\in(0,1)$。其中,$L(\geqslant 1)$是 T 的 Lipschitz 常数,则对任意 $x_0\in X$,由

$$x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n(f-Ty_n)+u_n \tag{2}$$

$$y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n(f-Tx_n)+v_n,\forall n\geqslant 0 \tag{3}$$

生成的带误差的 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}$,强收敛到方程 $x+Tx=f$ 的唯一解 x^*。特别地,若取 $u_n=v_n=0$,$\forall n\geqslant 0$,则存在$(0,1)$中的序列 $\{\gamma_n\}$ 满足 $\gamma_n\geqslant\left[\frac{1}{2}\max\{\eta,1-\eta\}-\frac{1}{4}\min\{\eta,1-\eta\}\right]\alpha_n$,$\forall n\geqslant 0$,使得对一切 $n\geqslant 0$,有 $\|x_{n+1}-x^*\|\leqslant\prod_{j=0}^{n}(1-\gamma_j)\|x_0-x^*\|$。

证明 因 T 是 Lipschitz 连续的增生算子,由 Browder[1] 的结果知,T 是 m-增生的,由引理2可得,对任给 $f\in X$,方程 $x+Tx=f$ 在 X 中有唯一解,记 $x^*\in D(T)$。设 $Sx=f-Tx$,故 S 有不动点 x^* 且 S 为 Lipschitz 映像,有 Lipschitz 常数 L。由于 T 是增生的,则 $-S$ 也是增生的。因此对一切 $x,y\in D(T)$ 及 $r>0$,有 $\|x-y\|\leqslant\|x-y-r(Sx-Sy)\|$。由(2)、(3)式可得

$$\|y_n-x^*\|=\|(1-\beta_n)(x_n-x^*)+\beta_n(Sx_n-x^*)+v_n\|\leqslant(1-\beta_n+L\beta_n)\|x_n-x^*\|+\|v_n\|$$

$$\|x_n-Sy_n\|\leqslant\|x_n-x^*\|+L\|y_n-x^*\|\leqslant[1+L+(L^2-L)\beta_n]\|x_n-x^*\|+L\|v_n\| \tag{4}$$

$$\|Sx_{n+1}-Sy_n\|\leqslant L\|x_{n+1}-y_n\|=L\|(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nSy_n+u_n-y_n\|=$$

$$L\|x_n-y_n+\alpha_n(Sy_n-x_n)+u_n\|\leqslant L\|\beta_n(Sx_n-x_n)+v_n\|+L\alpha_n\|Sy_n-x_n\|+L\|u_n\|\leqslant$$

$$L(L+1)\beta_n\|x_n-x^*\|+L\|u_n\|+L\|v_n\|+L\alpha_n[(1+L+(L^2-L)\beta_n)\|x_n-x^*\|+L\|v_n\|]\leqslant$$

$$[L(L+1)\beta_n + L\alpha_n(1+L+(L^2-L)\beta_n)]\|x_n - x^*\| + L\|u_n\| + L\|v_n\| + L^2\alpha_n\|v_n\| \tag{5}$$

观察到

$$x_n = x_{n+1} + \alpha_n x_n - \alpha_n S y_n - u_n = (1+\alpha_n)x_{n+1} + \alpha_n(-S)x_{n+1} + \alpha_n^2(x_n - Sy_n) + \alpha_n(Sx_{n+1} - Sy_n) - (1+\alpha_n)u_n$$

且 $x^* = (1+\alpha_n)x^* - \alpha_n S x^*$,故可见

$$x_n - x^* = (1+\alpha_n)(x_{n+1} - x^*) + \alpha_n[(-S)x_{n+1} - (-S)x^*] + \alpha_n^2(x_n - Sy_n) + \alpha_n(Sx_{n+1} - Sy_n) - (1+\alpha_n)u_n$$

由于 S 是耗散算子,因此由(4)、(5)式可得

$$\|x_n - x^*\| \geqslant (1+\alpha_n)\left\|(x_{n+1} - x^*) + \frac{\alpha_n}{1+\alpha_n}[(-S)x_{n+1} - (-S)x^*]\right\| -$$
$$\alpha_n^2\|x_n - Sy_n\| - \alpha_n\|Sx_{n+1} - Sy_n\| - (1+\alpha_n)\|u_n\| \geqslant (1+\alpha_n)\|x_{n+1} - x^*\| - \alpha_n^2\|x_n - Sy_n\| -$$
$$\alpha_n\|Sx_{n+1} - Sy_n\| - (1+\alpha_n)\|u_n\| \geqslant (1+\alpha_n)\|x_{n+1} - x^*\| - [(L+1)^2\alpha_n^2 +$$
$$L(L+1)\alpha_n\beta_n + L(L+1)(L-1)\alpha_n^2\beta_n]\|x_n - x^*\| - L\alpha_n[1+(L+1)\alpha_n]\|v_n\| - L\alpha_n\|u_n\| - (1+\alpha_n)\|u_n\|$$

于是,可得

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leqslant \frac{1}{1+\alpha_n}\|x_n - x^*\| + \frac{1}{1+\alpha_n}[(L+1)^2\alpha_n^2 + L(L+1)\alpha_n\beta_n +$$
$$L(L+1)(L-1)\alpha_n^2\beta_n]\|x_n - x^*\| + L\alpha_n[1+(L+1)\alpha_n]\|v_n\| + L\alpha_n\|u_n\| + (1+\alpha_n)\|u_n\| =$$
$$(1-\gamma_n)\|x_n - x^*\| + L\alpha_n[1+(L+1)\alpha_n]\|v_n\| + (1+\alpha_n+L\alpha_n)\|u_n\| \tag{6}$$

其中

$$\gamma_n = \frac{\alpha_n - (L+1)^2\alpha_n^2 - L(L+1)\alpha_n\beta_n - L(L+1)(L-1)\alpha_n^2\beta_n}{1+\alpha_n}$$

由于 $0 \leqslant \beta_n \leqslant \dfrac{\min\{\eta, 1-\eta\}}{L(L+1)}$, $\forall n \geqslant 0$,所以

$$\gamma_n = \frac{\alpha_n - (L+1)^2\alpha_n^2 - L(L+1)\alpha_n\beta_n - L(L+1)(L-1)\alpha_n^2\beta_n}{1+\alpha_n} \geqslant$$
$$\frac{1}{1+\alpha_n}\left[\alpha_n - (L+1)^2\alpha_n^2 - L(L+1)\alpha_n\frac{\min\{\eta,1-\eta\}}{L(L+1)} - L(L+1)(L-1)\alpha_n^2\frac{\min\{\eta,1-\eta\}}{L(L+1)}\right] \geqslant$$
$$\frac{1}{1+\alpha_n}[\alpha_n - (L+1)^2\alpha_n^2 - \min\{\eta,1-\eta\}\alpha_n - (L-1)\min\{\eta,1-\eta\}\alpha_n^2] =$$
$$\frac{1}{1+\alpha_n}\{\alpha_n - [(L+1)^2 + (L-1)\min\{\eta,1-\eta\}]\alpha_n^2 - \min\{\eta,1-\eta\}\alpha_n\}$$

又因为 $0 < \alpha_n \leqslant \dfrac{1 - \max\{\eta,1-\eta\} - \frac{1}{2}\min\{\eta,1-\eta\}}{(L+1)^2 + (L-1)\min\{\eta,1-\eta\}}$, $\forall n \geqslant 0$,于是有

$$\gamma_n \geqslant \frac{1}{1+\alpha_n}\left\{\alpha_n - [(L+1)^2 + (L-1)\min\{\eta,1-\eta\}]\alpha_n\frac{1-\max\{\eta,1-\eta\} - \frac{1}{2}\min\{\eta,1-\eta\}}{(L+1)^2 + (L-1)\min\{\eta,1-\eta\}} - \min\{\eta,1-\eta\}\alpha_n\right\} \geqslant$$
$$\frac{1}{1+\alpha_n}\left[\max\{\eta,1-\eta\} - \frac{1}{2}\min\{\eta,1-\eta\}\right]\alpha_n \geqslant \left[\frac{1}{2}\max\{\eta,1-\eta\} - \frac{1}{4}\min\{\eta,1-\eta\}\right]\alpha_n \tag{7}$$

从而,由(6)、(7)式推得

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leqslant (1-\gamma_n)\|x_n - x^*\| + L\alpha_n[1+(L+1)\alpha_n]\|v_n\| + (1+\alpha_n+L\alpha_n)\|u_n\| \tag{8}$$

令 $a_n = \|x_n - x^*\|$, $t_n = \left[\frac{1}{2}\max\{\eta,1-\eta\} - \frac{1}{4}\min\{\eta,1-\eta\}\right]\alpha_n$, $b_n = 0$,且

$$c_n = L\alpha_n[1+(L+1)\alpha_n]\|v_n\| + (1+\alpha_n+L\alpha_n)\|u_n\|$$

则(8)式可化为 $a_{n+1} \leqslant (1-t_n)a_n + b_n a_n + c_n$, $\forall n \geqslant 0$。由定理 1 的条件ⅰ)、ⅱ)知,$t_n \in (0,1)$,$\sum_{n=0}^{\infty} t_n = \infty$,且 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$,故由引理 1 有 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,即序列 $\{x_n\}$ 强收敛到方程 $x + Tx = f$ 的唯一解 x^*。

收敛率估计:取 $u_n = v_n = 0$, $\forall n \geqslant 0$,则根据(8)式有

$$\|x_{n+1}-x^*\| \leqslant (1-\gamma_n)\|x_n-x^*\| \leqslant \cdots \leqslant \prod_{j=0}^{n}(1-\gamma_j)\|x_0-x^*\|$$

其中，$\{\gamma_n\}$是$(0,1)$中的序列，满足$\gamma_n \geqslant \left[\frac{1}{2}\max\{\eta,1-\eta\}-\frac{1}{4}\min\{\eta,1-\eta\}\right]\alpha_n, \forall n \geqslant 0$。 证毕

定理2 设$T: D(T)=X \to X$是Lipschitz连续的增生算子，且$L_*(\geqslant 1)$是$(T-I)$的Lipschitz常数。又设$\{u_n\}$与$\{v_n\}$是X中的序列，$\{\alpha_n\}$与$\{\beta_n\}$是$[0,1]$中的实序列，满足条件 i) $\sum_{n=0}^{\infty}\|u_n\|<\infty$，且$\|v_n\| \to 0 (n \to \infty)$；ii) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$；iii) $0<\alpha_n \leqslant \frac{1-\max\{\eta,1-\eta\}-\frac{1}{2}\min\{\eta,1-\eta\}}{(L_*+1)^2+(L_*-1)\min\{\eta,1-\eta\}}$且$0 \leqslant \beta_n \leqslant \frac{\min\{\eta,1-\eta\}}{L_*(L_*+1)}$，对某个$\eta \in (0,1)$，则对任意$x_0 \in X$，由

$$x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n(f-Ty_n+y_n)+u_n,$$
$$y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n(f-Tx_n+x_n)+v_n, \forall n \geqslant 0$$

生成的带误差的Ishikawa迭代序列$\{x_n\}$，强收敛到方程$Tx=f$的唯一解x^*。特别地，若取$u_n=v_n=0, \forall n \geqslant 0$，则存在$(0,1)$中的序列$\{\gamma_n\}$满足$\gamma_n \geqslant \left[\frac{1}{2}\max\{\eta,1-\eta\}-\frac{1}{4}\min\{\eta,1-\eta\}\right]\alpha_n, \forall n \geqslant 0$，使得对一切$n \geqslant 0$，有$\|x_{n+1}-x^*\| \leqslant \prod_{j=0}^{n}(1-\gamma_j)\|x_0-x^*\|$。

证明 由于T是强增生算子，且具有强增生常数$k=1$，所以$(T-I)$是增生算子。又由于方程$Tx=f$等价于方程$x+(T-I)x=f$，因此根据定理1，当以$(T-I)$代替T时，定理2的结论成立。 证毕

参考文献：

[1] BROWDER F E. Nonlinear Mapping of Nonexpansive and Accretive Type in Banach Spaces[J]. Bull Amer Math Soc, 1967, 73: 875-882.

[2] KATO T. Nonlinear Semigroups and Evolution Equations[J]. J Math Soc Japan, 1967, 18/19: 212-225.

[3] LIU L W. Strong Convergence of Iteration Methods for Equations Involving Accretive Operators in Banach Spaces[J]. Nonlinear Anal, 2000, 42: 271-276.

[4] TAN K K, XU H K. Iterative Solutions to Nonlinear Equations of Strongly Accretive Operators in Banach Spaces[J]. J Math Anal Appl, 1993, 178: 9-21.

[5] 曾六川. Banach空间中关于增生算子方程的迭代法的强收敛定理[J]. 数学年刊, 2003, 24A: 231-238.

[6] 曾六川. 关于增生算子方程解的带误差的Ishikawa迭代程序[J]. 数学物理学报, 2004, 24A: 654-660.

[7] 李育强,刘理蔚. 关于Lipschitz强增生算子的迭代程序[J]. 数学学报, 1998, 41: 845-850.

[8] 张石生. m-增生算子方程解的Mann和Ishikawa迭代逼近[J]. 应用数学与力学, 1999, 20(12): 845-850.

(责任编辑 黄 颖)