

带电圆柱位于接地导体平面附近静电场描述*

杨 英,胡先权

(重庆师范大学 物理学与信息技术学院,重庆 400047)

摘 要 根据数学物理理论,对带电导体圆柱位于接地导体平面附近时的静电场进行了统一的研究。采用镜象法与保角映射法相结合,严格地求出了等势线函数和电场线函数,作出了相应的等势线簇图形和电场线簇图形,并进行了必要的讨论。

关键词 拉普拉斯方程;保角映射;镜象法;等势线簇;电场线簇

中图分类号:O441.1

文献标识码:A

文章编号:1672-669X(2005)04-0033-03

Description of Static Electricity Field upon Condition that a Charged Cylinder Conductor is Nearby the Conductor Plank Interfacing with Earth

YANG Ying, HU Xian-quan

(College of physics and Information Technology, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract Based on the mathematical physics theory, this paper unitedly deals with the static electricity field upon condition that charged conductor of cylinder nearby the conductor plank interfacing with earth. By means of combination of conformal mapping and electrical mirror-images, we have obtained the exact solution of the electrical potential functions and power line functions and plotted the relative equipotential line maps and power line maps, meanwhile, we have made the necessary discussion about the items above.

Key words Laplace's equation; conformal mapping; electrical images; equipotential lines; power lines

目前流行的电磁场理论著作和参考文献大多分析研究孤立点电荷在平面或球面附近的情形^[1~7],很少考虑点电荷系或者具有一定形状和大小的带电实体存在于平面或球面附近的情况。本文采用镜象法与保角映射法^[8,9]相结合求出了等势线函数和电场线函数,作出了相应的等势线簇图形和电场线簇图形。

1 带电圆柱位于接地导体附近时的电势和电场的求解

接地导体平面位于 $x=0$ 处,带电圆柱位于 y 轴右侧,圆柱轴线到 y 轴的距离为 L ,电势为 V_0 ,导体圆柱的镜象位于 y 轴左侧,到 y 轴的距离亦为 L ,电势为 $-V_0$,如图 1 所示。利用保角映射把图 1 中带电圆柱对应的圆周 C_1 和镜象圆柱对应的圆周 C_2 映

射成同心圆,将研究区域映射成圆环域,如图 2 所示。从而归结为求解拉普拉斯方程:

$$\nabla^2 V = 0$$

$$V|_{\text{在边界}C_1} = V_0$$

$$V|_{\text{在边界}C_2} = -V_0$$

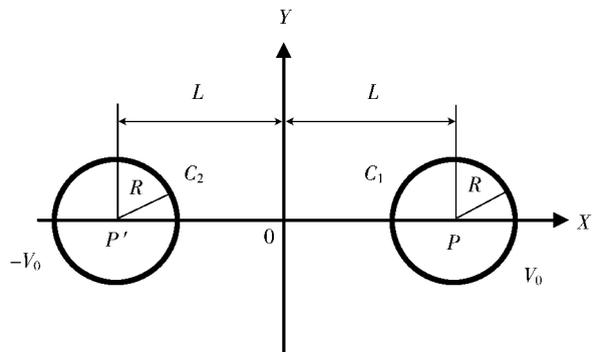


图 1 带电圆柱和镜象圆柱对称分布图

* 收稿日期 2005-05-13

资助项目:重庆市教育委员会科学技术研究项目(NO. 20030806)

作者简介:杨英(1978-),女,重庆江津人,硕士研究生,研究方向为电磁物理和数学物理。

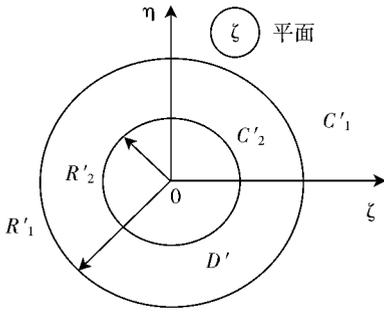


图2 经图1保角映射得到的圆环域

采用保角变换与分离变量相结合,可求得带电圆柱位于接地导体平面附近时的电势分布函数为

$$V(x, y) = C_0 + \frac{A_0}{2} \ln \frac{(x-x_1)^2 + y^2}{(x-x_2)^2 + y^2} \quad (1)$$

其中

$$x_1 = L - \sqrt{L^2 - R^2}$$

$$x_2 = L + \sqrt{L^2 - R^2}$$

A_0, C_0 的表达式为:

$$C_0 = \frac{2V_0 \operatorname{artanh} \left[\frac{(L-2R)}{(L+2R)} \right]^{\frac{1}{2}} - 2V_0 \operatorname{artanh} \left[\frac{(L-2R)}{(L+2R)} \right]^{\frac{1}{2}}}{\operatorname{arcosh} \left[\frac{L^2 - 2R^2}{2R^2} \right]} = 0$$

$$A_0 = \frac{-2V_0}{\operatorname{arcosh} \left(\frac{L^2 - 2R^2}{2R^2} \right)}$$

所以(1)式简化为

$$V(x, y) = \frac{-V_0}{\operatorname{arcosh} \left(\frac{L^2 - 2R^2}{2R^2} \right)} \ln \frac{(x-x_1)^2 + y^2}{(x-x_2)^2 + y^2} \quad (2)$$

2 等势线的描绘

令(2)式中 $V(x, y) = C$, 得到带电导体圆柱位于接地导体平面附近时的等势面对应的等势线函数。该函数为隐函数, 本文采用 Mathematica 5.0 绘图函数库中的 ImplicitPlot 命令绘制二维的隐函数图形^[10]。选择两圆柱相关参数: $L = 5\text{m}$, $R = 2.0\text{m}$, $V_0 = 10.0\text{V}$, 等势线常数 C 分别等于 $10.0, 8.0, 6.0, 4.0, 2.0\text{V}$, 并且将相关数据代入(2)式中, 即可作出5条相应的等势线, 如图3的虚线所示。

3 电场线簇的描绘

根据解析函数的实部函数与虚部函数对应的曲线簇在空间处处正交的性质, 很容易由 V 作为解析函数的实部, 通过构造一个解析函数而求出其虚

部, 得到 V 的共轭调和函数, 此即电势函数 V 相应的电场线函数。

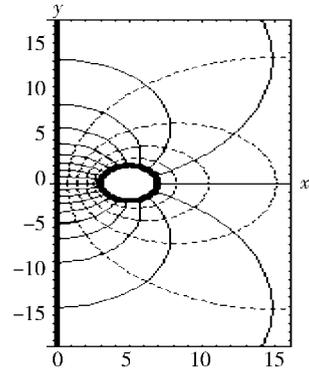


图3 带电导体圆柱位于接地导体平面附近时的静电场图形

$$\text{设复变函数 } w = f(z) = V + iU \quad (3)$$

令(2)式表示的电势函数 V 作为(3)式的实部, 则(3)式称为静电场问题的复位势函数^[8,9], 其中的 U 即为相应的电场线函数。

利用柯西—黎曼方程^[8]及其等价运算, 可求得该静电场问题的电场线

函数主值

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{A_0(x-x_1)}{(x-x_1)^2 + y^2} - \frac{A_0(x-x_2)}{(x-x_2)^2 + y^2} \quad (4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{A_0 y}{(x-x_1)^2 + y^2} - \frac{A_0 y}{(x-x_2)^2 + y^2}$$

$$\text{柯西—黎曼方程} \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad (5)$$

所以

$$U = \int \frac{\partial V}{\partial x} dy = A_0 \int \frac{(x-x_1)}{(x-x_1)^2 + y^2} dy - \int \frac{(x-x_2)}{(x-x_2)^2 + y^2} dy =$$

$$A_0 \arctan \frac{y}{x-x_1} - A_0 \arctan \frac{y}{x-x_2} + c(x) \quad (6)$$

又

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -A_0 \frac{y/(x-x_1)^2}{1+(y/(x-x_1))^2} + A_0 \frac{y/(x-x_2)^2}{1+(y/(x-x_2))^2} =$$

$$\frac{-A_0 y}{(x-x_1)^2 + y^2} + \frac{-A_0 y}{(x-x_2)^2 + y^2} + c'(x)$$

由上式及(5)(6)式可知

$$c'(x) = 0 \Rightarrow c(x)$$

因而相应的电场线函数为

$$U(x, y) = A_0 \arctan \frac{y}{x-x_1} - A_0 \arctan \frac{y}{x-x_2} \quad (7)$$

利用等势线描绘中的相关常数, 并且令电场线函数分别等于 $U = -10.0, -8.0, -6.0, -4.0, -2.0, 0.0, 2.0, 4.0, 6.0, 8.0, 10.0\text{V/m}$, 即可作出11条相

应的电场线曲线,如图3中实线簇所示。图3完整地描绘出了带电导体圆柱位于接地导体平面附近时的静电场图形。

4 讨论

1) 虽然常数 C_0, A_0, x_1, x_2 的表达式较复杂,但它们都是用初等函数表示的,因此由(2)式决定的 $x-y$ 平面的电势分布 $V(x, y)$ 仍是初等函数。通过对(2)式的 V 进行梯度运算: $V = -\nabla V$, 还可求出电场强度。

2) 由(2)式不难推出等势线簇方程

$$\left[x - \frac{Cx_2 - x_1}{C-1} \right]^2 + y^2 = \left(\frac{Cx_2 - x_1}{C-1} \right)^2 + \frac{x_1^2 - x_2^2}{C-1} \quad (8)$$

其中常数 C 与等势线对应的电势 V_0 , 以及 A_0 有如下关系

$$C = \exp(2V_0/A_0)$$

3) (8)式所表示的等势线的几何图形代表 $x-y$ 平面的圆簇(圆, 直线), 可由 Mathematica5.0 描绘出的隐函数图形给予充分证实。当等势线常数 C 分别等于 10, 0V 时, 描绘出的图形确为导体圆柱(等势体)的圆截面。

4) 由(7)式不难推出电场线簇方程

$$\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{x_1 - x_2}{2 \tan(E_0/A_0)} \right)^2 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 + \left(\frac{x_1 - x_2}{2 \tan(E_0/A_0)} \right)^2 - x_1 x_2 \quad (9)$$

其中 E_0 为电场线簇常数。 E_0 取不同的值, 则画出空间不同方位走向的电场线。(9)式表示的电场线簇亦为圆簇。

参考文献:

- [1] 蔡圣善, 朱耘, 徐建军. 电动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002. 86-102.
- [2] 郭硕鸿. 电动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1997. 58-78.
- [3] B B 巴蒂金, И H 托普蒂金. 电动力学学习题集[M]. 北京: 人民教育出版社, 1964. 181-228.
- [4] J D 杰克逊. 经典电动力学[M]. 朱培豫译. 北京: 人民教育出版社, 1979. 30-53.
- [5] 马西奎. 电磁场理论及应用[M]. 西安: 西安大学出版社, 2001. 31-71.
- [6] BLEANEY B I, BLEANEY B. Electricity and Magnetism (3th ed)[M]. Great Britain: Oxford University Press, 1975. 32-34.
- [7] 费曼. 费曼物理学讲义[M]. 王之辅译. 上海: 上海科学技术出版社, 1983. 75-76.
- [8] 梁昆淼. 数学物理方法(第三版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998. 219-223, 290-291, 318-320.
- [9] 吴崇试. 数学物理方法[M]. 北京: 北京大学出版社, 1999. 17-21.
- [10] 洪维恩. 数学运算大师-Mathematica 4[M]. 魏宝琛改编. 北京: 人民邮电出版社, 2002. 229-249.

(责任编辑 欧红叶)