一种新的求全局优化最优性条件的方法*

吴至友[1],白富生[2]
(1. 重庆师范大学 数学与计算机科学学院,重庆 400047;2. 复旦大学 数学科学学院,上海 200433)

摘　要:介绍了一种新的求全局优化最优性条件的方法:L-次梯度方法。L-次梯度是一个函数集,该函数集可能是一些非线性函数所组成的集合。本文首先引入函数的 L-次梯度和集合的 L-正则锥的概念,然后利用 L-次梯度和 L-正则锥来得到全局优化问题的一些充分性条件,最后通过对二次函数的 L-次梯度和集合 $\prod_{i=1}^{n}\{0,1\}$ 的 L-正则锥的明确刻画,得到 $\{0,1\}$ 二次规划问题的全局最优性条件。

关键词:全局最优性条件;L-次梯度;$\{0,1\}$ 二次规划
中图分类号:O221.2　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2006)01-0001-05

A New Method for Developing Optimality Conditions in Global Optimization

WU Zhi-you, BAI Fu-sheng
(1. College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047;
2. School of Mathematic Science, Fudan University, Shanghai 200433, China)

Abstract: This paper proposes a new method for global optimality condition: L-subdifferential method. L-subdiffernential is a set of function which are not necessarily linear functions. In this paper, we first introduce the definitions of L-subdiffernential and L-normal cone, then we obtain some sufficient conditions of global optimality in terms of L-subdifferential and L-normal cone. Finally, we obtain some global optimadity conditions for $\{0,1\}$ quadratic programming problems via the explicit descriptions of the L-subdifferential of quadratic functions and the L-normal cone of the set $\prod_{i=1}^{n}\{0,1\}$.

Key words: global optimality condition, L-subdifferential, $\{0,1\}$ quadratic programming problem

最优化领域的基本理论研究之一是如何刻画一个全局优化问题的解。全局最优必要性条件是刻画一个解不是全局最优解的基本工具,而充分性条件是刻画一个解是全局最优解的基本工具。最近几年,在如何刻画一个凸规划问题的解方面,特别是在给出凸规划问题的必要条件方面已经取得了很大的进展。然而,在如何刻画一个非凸规划问题的全局最优解方面的进展却很有限,只在几种特殊的非凸规划问题的全局最优解的刻画方面有一定的进展[1~5]。特别地,在非凸二次规划的全局最优解的刻画方面,最近取得了一些比较大的进展[6~11]。

本文将利用一种新的方法:L-次梯度方法(关于 L-次梯度的概念可参见文献[12,13])来给出一个可行解是非凸规划问题的全局最优解的充分性条件。L-次梯度与一般凸函数的次梯度不同,一般凸函数的次梯度是一些线性函数所成的集合,而 L-次梯度可能是一些非线性函数所成的集合。本文还将对二次函数的 L-次梯度及集合 $\prod_{i=1}^{n}\{0,1\}$ 的 L-正则锥进行明确刻画,从而得到 $\{0,1\}$ 二次规划问题的全局最优解的一些充分性条件。文献[1]利用二次函数性质 $\inf\left\{f(x)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Ax+a^{\mathrm{T}}x:\ x\in\mathbf{R}^n\right\}>-\infty$,当且仅当存在 $x\in\mathbf{R}^n$,使得 $Ax+a=0$,而且 A 是一个半正定矩阵,得到了 $\{0,1\}$ 二次规划问题的一些充分性条件。本文利用 L-次梯度方法所得到的关于 $\{0,1\}$ 二次规划问题的充分性条件是文献[1]中所得到的充分性条件的推广。

* 收稿日期:2005-01-21
资助项目:重庆市教委课题资助(No. 030809)
作者简介:吴至友(1967-),女,重庆人,教授,博士,研究方向为最优化理论与方法。

1 L-次梯度,L-正则锥和全局最优性条件

本节将给出几个本文用到的基本概念和基本结论。本文将使用如下记号:$\mathbf{R}$ 表示实数集,$\mathbf{R}^n$ 表示 n 维欧式空间,$\mathbf{R}^n$ 中的内积和范数分别定义为:$[x,y]=\sum_{i=1}^n x_i y_i$ 和 $\|x\|=\sqrt{[x,x]}$。I 表示单位矩阵。$A\geq 0$ 表示矩阵 A 是半正定的。$\mathrm{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 表示对角线上元素为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的对角矩阵。

令 L 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一些实函数所成的集合。

定义1 (L-次梯度) 令 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$,$x_0\in\mathbf{R}^n$,$l\in L$ 称为函数 f 在 x_0 的 L-微分,如果 $f(x)\geqslant f(x_0)+l(x)-l(x_0)$,$\forall x\in\mathbf{R}^n$,$f$ 在 x_0 的所有 L-次微分的集合 $\partial_L f(x)$ 称为函数 f 在 x_0 的 L-次梯度。

值得注意的是,如果 L 是一些线性函数所成的集合,f 是一个下半连续的凸函数,则 $\partial_L f(x)=\partial f(x)$,这里 $\partial f(x)$ 是指一般凸分析意义上的凸函数的次梯度[14],在下一部分将对不同的函数 L,讨论二次函数的 L-次梯度的相关性质[8,11]。

定义2 (L-正则锥) 对一个给定的集合 $D\in\mathbf{R}^n$,D 的 L-正则锥 $N_{L,D}(x)$ 是指

$$N_{L,D}(x):=\begin{cases}\{l\in L: l(y)-l(x)\leqslant 0,\forall y\in D\},\text{若 } x\in D\\ \varnothing,\text{若 } x\notin D\end{cases}$$

如果定义 D 的指示函数 δ_D 为 $\delta_D(x)=\begin{cases}0,\text{若 } x\in D\\ +\infty,\text{若 } x\notin D\end{cases}$,那么,显然有 $N_{L,D}(x)=\partial_L\delta_D(x)$,对任意的 $x\in D$。

定理1 (全局最优解的充分性条件) 设 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$,$S\subset\mathbf{R}^n$,$a\in S$,令 L 是一些实函数所成的集合,使得对任意的 $l\in L$,有 $-l\in L$。如果

$$-\partial_L f(a)\cap N_{L,S}(a)\neq\varnothing, \tag{1}$$

则 a 是 f 在 S 上的一个全局极小点。

证明 由(1)式,存在 $l\in N_{L,S}(a)$,使得 $-l\in\partial_L f(a)$。所以,对任意 $x\in S$,有 $f(x)-f(a)\geqslant -l(x)+l(a)$,而且 $l(x)-l(a)\leqslant 0$。所以,$f(x)-f(a)\geqslant 0$。即 a 是 f 在 S 上的全局极小点。 证毕

推论1 (全局最优解的充要条件) 设 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$,$S\subset\mathbf{R}^n$,$a\in S$。令 L 是一些实函数所成的集合,使得对 $\forall l\in L$,有 $-l\in L$。如果 $f\in L$,则 a 是 f 在 S 上的全局极小点的充要条件是 $-\partial_L f(a)\cap N_{L,S}(a)\neq\varnothing$。

证明 假设 a 是 f 在 S 上的全局极小点,则由 $f\in L$ 及定理1很容易得到

$$-f\in-\partial_L f(a)\cap N_{L,S}(a)\neq\varnothing。$$

证毕

推论2 (凸规划问题的充要条件) 设 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是一个下半连续的凸函数,$S\subset\mathbf{R}^n$ 是一个凸集,且 $\mathrm{int}(S)\neq\varnothing$。$L_1$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一些线性函数所成的集合,$L\supset L_1$ 而且对任意的 $l\in L$,有 $-l\in L$。令 $a\in S$,则 a 是 f 在 S 上的一个全局极小点的充要条件是(1)式成立。

证明 由定理1知,如果条件(1)式成立,则 a 是函数 f 在 S 上的全局极小点。反过来,如果 a 是函数 f 在 S 上的全局极小点,则 $-\partial f(a)\cap N_S(a)\neq\varnothing$。由 $L\supset L_1$,有 $\partial_L f(a)\supset\partial f(a)$,而且 $N_{L,S}(a)\supset N_S(a)$。所以,有 $-\partial_L f(a)\cap N_{L,S}(a)\supset-\partial f(a)\cap N_S(a)\neq\varnothing$。 证毕

值得注意的是,对一般的函数 f,集合 S,以及一般的函数集 L,计算 $\partial_L f(a)$ 和 $N_{L,S}(a)$ 是很困难的。下面将对二次函数 f,集合 $S=\prod_{i=1}^n\{0,1\}$ 和由一些特殊的二次函数所成的集合 L,进行讨论,进而得到 $\{0,1\}$ 二次规划问题的全局最优解的一些充分性条件。

2 $\{0,1\}$ 二次规划问题的全局最优性条件

令 S^n 是所有 $n\times n$ 对称矩阵所成的集合。考虑如下的 $\{0,1\}$ 二次规划问题:

$$\text{(QP)}\quad \min \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Ax+x^{\mathrm{T}}a$$

$$\text{s.t.}\quad x\in S:=\prod_{i=1}^n\{0,1\},$$

这里 $A\in S^n$,$a\in\mathbf{R}^n$,$\mu(A)$ 表示矩阵 A 的最小特征值。

命题1 令 $\bar{x}=\{\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n\}^{\mathrm{T}}\in S$,及

$$L_1=\left\{\frac{\alpha}{2}\|x\|^2+x^{\mathrm{T}}\beta \mid \alpha\in\mathbf{R},\beta\in\mathbf{R}^n\right\} \tag{2}$$

则有 1) $\partial_{L_1}f(\bar{x})=\left\{\frac{\alpha}{2}\|x\|^2+\beta^{\mathrm{T}}x \,\middle|\, \begin{array}{l}\alpha\leqslant\mu(A)\\ \beta=a+(A-\alpha I)\bar{x}\end{array}\right\}$;2) $N_{L_1,S}(\bar{x})=\left\{\frac{\alpha}{2}\|x\|^2+\beta^{\mathrm{T}}x \,\middle|\, \begin{array}{l}\beta_i+\frac{\alpha}{2}\leqslant 0,\text{若 } \bar{x}_i=0\\ \beta_i+\frac{\alpha}{2}\geqslant 0,\text{若 } \bar{x}_i=1\end{array}\right\}$。

证明　1) 由定义,$l_0\in\partial_{L_1}f(\bar{x})$ 当且仅当

$$l_0(x)-l_0(\bar{x})\leqslant f(x)-f(\bar{x}),\forall x\in\mathbf{R}^n \tag{3}$$

令 $l_0(x)=\frac{\alpha}{2}\|x\|^2+x^{\mathrm{T}}\beta$,$\varphi(x)=f(x)-l_0(x)$,则 $\varphi(x)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(A-\alpha I)x+x^{\mathrm{T}}(a-\beta)$。由(3)式,对任意的 $x\in\mathbf{R}^n$ 有 $\varphi(x)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(A-\alpha I)x+x^{\mathrm{T}}(a-\beta)\geqslant f(\bar{x})-l_0(\bar{x})$。所以,$\varphi(x)$ 是有下界的,而且在 $\bar{x}$ 达到其极小点。所以一定有,$A-\alpha I\geq 0$。则 $\varphi(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的凸函数,而且 $\varphi(x)$ 在 $\bar{x}$ 达到极小点的充要条件是 $\nabla\varphi(\bar{x})=0$,即 $(A-\alpha I)\bar{x}+(a-\beta)=0$,也即 $\beta=a+(A-\alpha I)\bar{x}$。

2) 由定义,$l_1\in N_{L_1,S}(\bar{x})$ 当且仅当 $l_1(x)-l_1(\bar{x})\leqslant 0,\forall x\in S$。令 $l_1(x)=\frac{\alpha}{2}\|x\|^2+x^{\mathrm{T}}\beta$,则

$$l_1(x)-l_1(\bar{x})=\frac{\alpha}{2}\sum_{i=1}^n(x_i^2-\bar{x}_i^2)+\sum_{i=1}^n\beta_i(x_i-\bar{x}_i)=\frac{\alpha}{2}\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x}_i)^2+\sum_{i=1}^n(\beta_i+\alpha\bar{x}_i)(x_i-\bar{x}_i)。$$

所以,$l_1(x)-l_1(\bar{x})\leqslant 0,\forall x\in S$,当且仅当对任意的 $i=1,\cdots,n$,有

$$\frac{\alpha}{2}(x_i-\bar{x}_i)^2+(\beta_i+\alpha\bar{x}_i)(x_i-\bar{x}_i)\leqslant 0,\forall x_i\in\{0,1\} \tag{4}$$

如果 $\bar{x}_i=0$,则(4)式等价于 $\beta_i+\frac{\alpha}{2}\leqslant 0$ 如果 $\bar{x}_i=1$,则(4)式等价于 $\beta_i+\frac{\alpha}{2}\geqslant 0$。所以,可以得到结论 2)成立。　　证毕

定理 2　设 $\bar{x}\in S$,$\tilde{X}=\mathrm{diag}(\tilde{x})$,$e:=(1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$,这里 $\tilde{x}_i=\begin{cases}-2,\bar{x}_i=0\\2,\bar{x}_i=1\end{cases}$,则 $-\partial_{L_1}f(\bar{x})\cap N_{L_1,S}(\bar{x})\neq\varnothing$ 等价于

$$\tilde{X}(a+A\bar{x})\leqslant\mu e。 \tag{5}$$

证明　由命题 1 可得 $-l(x)=-\frac{\alpha}{2}\|x\|^2-\beta^{\mathrm{T}}x\in\partial_{L_1}f(\bar{x})$,当且仅当 $-\alpha\leqslant\mu(A)$ 且 $-\beta=a+(A+\alpha I)\bar{x}$。

所以 $-\partial_{L_1}f(\bar{x})\cap N_{L_1,S}(\bar{x})\neq\varnothing$ 等价于存在 $\alpha\in\mathbf{R}$,使得 $-\alpha\leqslant\mu(A)$,而且

$$[-a-(A+\alpha I)\bar{x}]_i+\frac{\alpha}{2}=\begin{cases}-a_i-(A\bar{x})_i+\frac{\alpha}{2}\leqslant 0,\text{若 } \bar{x}_i=0\\ -a_i-(A\bar{x})_i-\frac{\alpha}{2}\geqslant 0,\text{若 } \bar{x}_i=1\end{cases}$$

等价于 $\begin{cases}-a_i-(A\bar{x})_i\leqslant\frac{\mu(A)}{2}e,\text{若 } \bar{x}_i=0\\ a_i+(A\bar{x})_i\leqslant\frac{\mu(A)}{2}e,\text{若 } \bar{x}_i=1\end{cases}$,即 $-\partial_{L_1}f(\bar{x})\cap N_{L_1,S}(\bar{x})\neq\varnothing$ 等价于(5)式。　　证毕

由定理 1 和定理 2,可以得到如下的 $\{0,1\}$ 二次规划问题的全局极小点的充分性条件。

定理 3　(充分条件 1)设 $\bar{x}\in S$,如果满足条件 $\tilde{X}(a+A\bar{x})\leqslant\mu e$,则 $\bar{x}$ 是 $\{0,1\}$ 二次规划问题(QP)的全局极小点。

由定理 1 和定理 2 容易证明上述定理。

注意,充分条件(5)式就是参考文献[1]中所给出的充分条件。

推论 3　(充要条件 1)设 $\bar{x}\in S$,如果 $f(x)\in L_1$,即 $f(x)=\frac{\alpha}{2}\|x\|^2+a^{\mathrm{T}}x$。这里 $\alpha\in\mathbf{R}$,$a\in\mathbf{R}^n$,则 $\bar{x}$ 是 $\{0,1\}$ 二次规划问题(QP)的全局极小点的充要条件是 $\tilde{X}(a+A\bar{x})\leqslant\mu e$。

同样,此推论由定理1和定理2容易证明。

注意,如果取不同的L,可以得到如下的一些结论。

命题2 令$\bar{x}=(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)^{\mathrm{T}}\in S$,且

$$L_2=\left\{\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Qx+x^{\mathrm{T}}\beta \mid Q=\mathrm{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_2),\alpha_i\in\mathbf{R},\beta\in\mathbf{R}^n\right\} \tag{6}$$

则1) $\partial_{L_2}f(\bar{x})=\left\{\sum_{i=1}^n\frac{\alpha_i}{2}x_i^2+\beta^{\mathrm{T}}x \;\middle|\; \begin{array}{c}A-Q\geq 0,Q=\mathrm{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),\alpha_i\in\mathbf{R}\\ \beta=a+(A-Q)\bar{x},\beta\in\mathbf{R}^n\end{array}\right\}$,

2) $N_{L_2,S}(\bar{x})=\left\{\sum_{i=1}^n\frac{\alpha_i}{2}x_i^2+\beta^{\mathrm{T}}x \;\middle|\; \begin{array}{l}\beta_i+\frac{\alpha_i}{2}\leqslant 0,\text{如果 }\bar{x}_i=0\\ \beta_i+\frac{\alpha_i}{2}\geqslant 0,\text{如果 }\bar{x}_i=1\end{array}\right\}$。

证明 1)由定义,$l_2\in\partial_{L_2}f(\bar{x})$当且仅当

$$l_2(x)-l_2(\bar{x})\leqslant f(x)-f(\bar{x}),\forall x\in\mathbf{R}^n \tag{7}$$

令$l_2(x)=\sum_{i=1}^n\frac{\alpha_i}{2}x_i^2+\beta^{\mathrm{T}}x$,$\varphi(x)=f(x)-l_2(x)$。则$\varphi(x)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(A-Q)x+x^{\mathrm{T}}(a-\beta)$,这里$Q=\mathrm{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$。由(7)式,对任意的$x\in\mathbf{R}^n$,有$\varphi(x)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(A-Q)x+x^{\mathrm{T}}(a-\beta)\geqslant f(\bar{x})-l_2(\bar{x})$。所以,$\varphi(x)$是有下界的,而且在$\bar{x}$达到其极小点。所以一定有,$A-Q\geq 0$。则$\varphi(x)$是$\mathbf{R}^n$上的凸函数,而且$\varphi(x)$在$\bar{x}$达到极小点的充要条件是$\nabla\varphi(\bar{x})=0$,即$(A-Q)\bar{x}+(a-\beta)=0$,即$\beta=a+(A-Q)\bar{x}$。

2)由定义,$l_3\in N_{L_2,S}(\bar{x})$当且仅当$l_3(x)-l_3(\bar{x})\leqslant 0,\forall x\in S$。令$l_3(x)=\sum_{i=1}^n\frac{\alpha_i}{2}x_i^2+\beta^{\mathrm{T}}x$,则

$$l_3(x)-l_3(\bar{x})=\sum_{i=1}^n\frac{\alpha_i}{2}(x_i^2-\bar{x}_i^2)+\sum_{i=1}^n\beta_i(x_i-\bar{x}_i)=\sum_{i=1}^n\frac{\alpha_i}{2}(x_i-\bar{x}_i)^2+\sum_{i=1}^n(\beta_i+\alpha_i\bar{x}_i)(x_i-\bar{x}_i)$$

所以,$l_3(x)-l_3(\bar{x})\leqslant 0,\forall x\in S$,当且仅当对任意的$i=1,\cdots,n$,有

$$\frac{\alpha_i}{2}(x_i-\bar{x}_i)^2+(\beta_i+\alpha_i\bar{x}_i)(x_i-\bar{x}_i)\leqslant 0,\text{对}\forall x_i\in\{0,1\} \tag{8}$$

如果$\bar{x}_i=0$,则(8)式等价于$\beta_i+\frac{\alpha_i}{2}\leqslant 0$ 如果$\bar{x}_i=1$,则(8)式等价于$\beta_i+\frac{\alpha_i}{2}\geqslant 0$。所以可以得到结论2)成立。 证毕

定理4 设$\bar{x}\in S$,$\tilde{X}=\mathrm{diag}(\tilde{x})$,$e:=(1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$,这里$\tilde{x}_i=\begin{cases}-2,\bar{x}_i=0\\2,\bar{x}_i=1\end{cases}$,则$-\partial_{L_2}f(\bar{x})\cap N_{L_2,S}(\bar{x})\neq\varnothing$等价于存在对角矩阵$Q:=\mathrm{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$,$\alpha_i\in\mathbf{R}^n$,$i=1,\cdots,n$,使得

$$A+Q\geq 0\text{ 且 }\tilde{X}(a+A\bar{x})+Qe\leqslant 0 \tag{9}$$

证明 由命题1可得$-l(x)=-\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Qx-\beta^{\mathrm{T}}x\in\partial_{L_1}f(\bar{x})$,当且仅当$A+Q\geq 0$且$-\beta=a+(A+Q)\bar{x}$。所以,$-\partial_{L_2}f(\bar{x})\cap N_{L_2,S}(\bar{x})\neq\varnothing$等价于存在$\alpha_i\in\mathbf{R}^n$,$i=1,\cdots,n$使得$Q=\mathrm{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$,$A+Q\geq 0$,且

$$[-a-(A+Q)\bar{x}]_i+\frac{\alpha_i}{2}=\begin{cases}-a_i-(A\bar{x})_i+\frac{\alpha_i}{2}\leqslant 0,\text{若 }\bar{x}_i=0\\ -a_i-(A\bar{x})_i-\frac{\alpha_i}{2}\geqslant 0,\text{若 }\bar{x}_i=1\end{cases}$$

所以$-\partial_{L_2}f(\bar{x})\cap N_{L_2,S}(\bar{x})\neq\varnothing$等价于(9)式成立。 证毕

由定理1和定理4,可以得到如下的$\{0,1\}$二次规划问题的全局极小点的充分性条件。

定理5 (充分条件2)设$\bar{x}\in S$,如果存在对角矩阵$Q:=\mathrm{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$,$\alpha_i\in\mathbf{R}^n$,$i=1,\cdots,n$,使得$A+Q\geq 0$且$\tilde{X}(a+A\bar{x})+Qe\leqslant 0$,则$\bar{x}$是$\{0,1\}$二次规划问题的全局极小点。

由定理1和定理4容易证明此定理。

推论4　(充要条件2)设 $\bar{x}\in S$,如果 $f(x)\in L_2$,即 $f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{2}x_i^2+a^{\mathrm{T}}x$,这里 $\alpha_i\in\mathbf{R}$,$a\in\mathbf{R}^n$,$i=1,\cdots,n$。则 $\bar{x}$ 是 $\{0,1\}$ 二次规划问题(QP)的全局极小点的充要条件是存在对角矩阵 $Q:=\mathrm{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$,$\alpha_i\in\mathbf{R}^n$,$i=1,\cdots,n$,使得 $A+Q\geq 0$ 且 $\tilde{X}(a+A\bar{x})+Qe\leqslant 0$。

由定理4和推论1容易证明此推论。

注意,如果取 $Q=-\mu(A)I$,则条件(9)式就是条件(5)式。所以,条件(5)式是(9)式的一种特殊情形。从这里可以看出,对不同的集合 L,可以得到不同的条件。而且,用 L-次梯度方法,推广了文献[1]中的充分性条件。

参考文献:

[1] BECK A, TEBOULLE M. Global Optimality Conditions for Quadratic Optimization Problems with Binary Constraints[J]. SIAM J Optim, 2000(11):179-188.

[2] DUR M, HORST R, LOCATELLI M. Necessary and Sufficient Global Optimality Conditions for Convex Maximization Revisitedp[J]. J Math Anal Appl, 1998,217(2):637-649.

[3] GLOVER B M, ISHIZUKA Y, JEYAKUMAR V, et al. Complete Characterizations of Global Optimality for Problems Involving the Pointwise Minimum of Sublinear Functions[J]. SIAM J Optim, 1996(6):362-372.

[4] HIRIART-URRUTY J B. Global Optimality Conditions in Maximizing a Convex Quadratic Function Under Convex Quadratic Constraints[J]. J Global Option, 2001,21:445-455.

[5] HIRIART-URRUTY J B. Conditions for Global Optimality 2[J]. J Global Optim, 1998,13:349-367.

[6] HORST R, PARDALOS P. Handbook of Global Optimization, Nonconvex Optimization and its Applications [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995.

[7] MORE J. Generalzations of the Trust Region Problem[J]. Optim Meth Soft, 1993, 2:189-209.

[8] PALLASCHKE D, ROLEWICZ S. Foundations of Mathematical Optimization:Convex Analysis Without Linearity[M]. Dordrechet: Kluwer Academic Publishers, 1997.

[9] PENG J M, YUAN Y. Optimization Conditions for the Minimization of a Quadratic with Two Quadratic Constraints[J]. SIAM J Optim, 1997,7(3):579-594.

[10] PINAR M C. Sufficient Global Optimality Conditions for Bivalent Quadratic Optimization[J]. J Optim Theor Appl, 2004,122(2):443-450.

[11] RUBINOV A M. Abstract Convexity and Global Optimization[M]. Dordrechet: Kluwer Academic Publishers,2000.

[12] STERN R, WOLKOWICZ H. Indefinite Trust Region Subproblems and Nonsymmetric Eigenvalue Perturbations[J]. SIAM J Optim, 1995, 5:286-313.

[13] STREKALOVSKY A. Global Optimality Conditions for Nonconvex Optimization[J]. J Global Optim,1998,12(40):415-434.

[14] ZALINESCU C. Convex Analysis in General Vector Spaces[M]. London: World Scientific, 2002.

(责任编辑　黄　颖)