2006 年 3 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Mar. 2006
第 23 卷 第 1 期 Journal of Chongqing Normal University(Natural Science Edition) Vol. 23 No. 1

强不变单调性和强 G-单调性*

刘芙萍
(重庆师范大学 数学与计算机学院, 重庆 400047)

摘 要:对一类广义单调映射——强单调映射进行了推广,引入了强不变单调映射和强 G-单调映射,并建立了强不变单调映射与强预不变凸函数之间的等价关系,以及强 G-单调映射与强 G-凸函数之间的关系。

关键词:强不变单调映射;强预不变凸函数;强 G-单调映射;强 G-凸函数;等价关系
中图分类号:O221.1 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2006)01-0014-05

Strong Invariant Monotonicity and Strong G-monotonicity

LIU Fu-ping
(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: In this paper, we present an extended concept of a sort of generalized monotone map—strong monotone map, the strong invariant monotone map and strong G-monotone map are defined. Equivalent relation between strong invariant monotone map and strong preinvex function and the relation between strong G-monotone map and strong G-convex function are established.

Key words: strong invariant monotone map; strong preinvex function; strong G-monotone map; strong G-convex function; equivalent relation

在数理经济、工程、管理科学与优化理论中,凸性起着十分重要的作用。近年来,人们不断尝试去弱化凸性条件,并已取得一系列的成果。Hanson 引入了不变凸,并证明了在不变凸条件下,Kuhn-Tucker 条件对非线性规划问题的最优化是充分的[1]。Weir 和 Mond 引入了预不变凸函数的概念并应用它在非线性规划中建立了充分的最优性条件和对偶性[2,3]。

而与凸性紧密相关的是单调性。一方面实值函数的凸性等价于相对应的梯度函数的单调性;另一方面,在研究变分不等式问题的存在与解的方法的过程中,单调性起着重要的作用。对凸性与单调性关系的推广的一个重要突破是 Karamardian 和 Schaible 证明了伪凸性与伪单调性的等价以及拟凸性与拟单调性的等价[4]。在不变凸性方面,Ruiz-Garzón 等提出并证明了 7 类广义不变凸单调映射和 7 类广义不变凸函数之间的关系[5]。在预不变凸性方面,杨新民等提出了一些广义不变单调映射并建立了这些广义不变单调映射与广义预不变凸函数之间的关系[6]。Singh 等[7]根据文献[8]的思想对单调性进行推广,建立了 G-广义单调映射,证明了 G-广义单调映射与 G-广义凸函数的关系。

本文引入强不变单调映射和强 G-单调映射,建立强不变单调映射和强预不变凸函数的等价关系,以及强 G-单调映射和强 G-凸函数的关系。

1 强不变单调映射

设为 $\mathbf{R}^n$ 的非空子集,$\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 和 $F:\Gamma\to\mathbf{R}^n$ 均为向量值函数。

定义 1[4] 如果对 $\forall x,y\in\Gamma, x\neq y$,有 $(y-x)^{\mathrm{T}}(F(y)-F(x))>0$,则称 F 为 Γ 上的严格单调映射。

* **收稿日期**:2005-05-11 **修回日期**:2005-10-14
作者简介:刘芙萍(1975-),女,重庆人,硕士研究生,研究方向为数学规划与算法。

定义2[4] 如果存在$\beta>0$,使对$\forall x,y\in\Gamma,x\neq y$,有$(y-x)^{\mathrm{T}}(F(y)-F(x))\geqslant\beta\|y-x\|^2$,则称$F$为$\Gamma$上的强单调映射。

定义3[2,3] 若存在η,使对$\forall x,y\in\Gamma$和$\lambda\in[0,1]$,有$y+\lambda\eta(x,y)\in\Gamma$,则称$\Gamma$为相对于$\eta$的不变凸集。

定义4[6] 设Γ为相对于η的不变凸集,如果对$\forall x,y\in\Gamma,x\neq y$,有$\eta(x,y)^{\mathrm{T}}F(y)+\eta(y,x)^{\mathrm{T}}F(x)<0$,则称$F$为$\Gamma$上相对于$\eta$的严格不变单调映射。

定义5 设Γ为相对于η的不变凸集,如果$\beta>0$,使对$\forall x,y\in\Gamma,x\neq y$,有

$$\eta(x,y)^{\mathrm{T}}F(y)+\eta(y,x)^{\mathrm{T}}F(x)+\beta(\|\eta(x,y)\|^2+\|\eta(y,x)\|^2)\leqslant 0,$$

则称F为Γ上相对于η的强不变单调映射。

注1 强不变单调映射是严格不变单调映射,但反之不然。

例1 设$F(x)=-x,\Gamma=\{x\in\mathbf{R}\mid x\geqslant 0\},\eta(x,y)=(x-y)^2$。因为

$$\eta(x,y)^{\mathrm{T}}F(y)+\eta(y,x)^{\mathrm{T}}F(x)=-y(x-y)^2-x(y-x)^2=-(x+y)(y-x)^2<0,$$

所以F为Γ上相对于η的严格不变单调映射,但F不是强不变单调映射。

若F为Γ上相对于η的强不变单调映射,则$\exists\beta>0$,对$\forall x,y\in\Gamma$,且$x\neq y$,有

$$\eta(x,y)^{\mathrm{T}}F(y)+\eta(y,x)^{\mathrm{T}}F(x)+\beta(\|\eta(x,y)\|^2+\|\eta(y,x)\|^2)=-(x+y)(y-x)^2+2\beta(x-y)^4\leqslant 0,$$

则有$-(x+y)+2\beta(x-y)^2\leqslant 0$,取$x=0$,则$-y+2\beta(-y)^2\leqslant 0$,即$\beta\leqslant\dfrac{1}{2y}$,让$y\to\infty$,则$\beta\leqslant 0$,与$\beta>0$矛盾。所以$F$不是$\Gamma$上相对于$\eta$的强不变单调映射。

注2 当$\eta(x,y)=x-y$时,强单调(此时,其定义域为不变凸集)为强不变单调,但反之不然。

例2 设$F(x)=-1-x,\Gamma=\{x\in\mathbf{R}\mid x\geqslant 0\},\eta(x,y)=x+y$,取$\beta=\dfrac{1}{2}>0$,有

$$\eta(x,y)^{\mathrm{T}}F(y)+\eta(y,x)^{\mathrm{T}}F(x)+\beta(\|\eta(x,y)\|^2+\|\eta(y,x)\|^2)=$$

$$[-2-(x+y)](x+y)+\frac{1}{2}\cdot 2(x+y)^2=-2(x+y)-(x+y)^2+(x+y)^2=-2(x+y)<0,$$

因而F为Γ上相对于η的强不变单调映射。但

$$(y-x)(F(y)-F(x))=(y-x)(-1-y+1+x)=(y-x)(-y+x)=-(y-x)^2<0,$$

所以F不是严格单调的,因此F也不是强单调的(因为强单调映射是严格单调映射)。

定义6[5] 设Γ为$\mathbf{R}^n$中的开集,函数$F:\Gamma\to\mathbf{R}$可微,如果存在η和常数$\beta>0$,使对$\forall x,y\in\Gamma$,有$F(y)-F(x)\geqslant\eta(y,x)^{\mathrm{T}}\nabla F(x)+\beta\|\eta(y,x)\|^2$,则称函数$F$为强不变凸函数。

定义7[10] 设$\Gamma\subseteq\mathbf{R}^n$为相对于$\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$上的不变凸集,函数$F:\Gamma\to\mathbf{R}$,如果存在一个常数$\beta>0$,使对$\forall x,y\in\Gamma$和$\lambda\in[0,1]$,有

$$F(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda F(x)+(1-\lambda)F(y)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2,$$

则称F为Γ上相对于η的强预不变凸函数。

条件1[11] 设$\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,则对$\forall x,y\in\mathbf{R}^n$和$\lambda\in[0,1]$,有

$$\eta(y,y+\lambda\eta(x,y))=-\lambda\eta(x,y),\eta(x,y+\lambda\eta(x,y))=(1-\lambda)\eta(x,y)。$$

Mohan, S. R 等证明了在可微和条件1下,不变凸函数就是预不变凸函数[11],下面用类似的方法证明强预不变凸函数与强不变凸函数等价。

引理1 在条件1和F是可微的情况下,强预不变凸函数与强不变凸函数等价。

证明 充分性。设$\forall x,y\in\Gamma$,让$\lambda\in(0,1),\bar{x}=y+\lambda\eta(x,y)\in\Gamma$,设$F$为强不变凸函数,则$\exists\beta>0$,使

$$F(x)-F(\bar{x})\geqslant\eta(x,\bar{x})^{\mathrm{T}}\nabla F(\bar{x})+\beta\|\eta(x,\bar{x})\|^2\tag{1}$$

$$F(y)-F(\bar{x})\geqslant\eta(y,\bar{x})^{\mathrm{T}}\nabla F(\bar{x})+\beta\|\eta(y,\bar{x})\|^2\tag{2}$$

由(1)$\times\lambda+$(2)$\times(1-\lambda)$得

$$\lambda F(x)+(1-\lambda)F(y)-F(\bar{x})\geqslant\lambda\eta(x,\bar{x})^{\mathrm{T}}\nabla F(\bar{x})+(1-\lambda)\eta(y,\bar{x})^{\mathrm{T}}\nabla F(\bar{x})+\beta\lambda\|\eta(x,\bar{x})\|^2+\beta(1-\lambda)\|\eta(y,\bar{x})\|^2,$$

由条件1,有

$$\lambda\eta(x,\bar{x})^{\mathrm{T}}\nabla F(\bar{x})+(1-\lambda)\eta(y,\bar{x})^{\mathrm{T}}\nabla F(\bar{x})=$$

$$\lambda(1-\lambda)\eta(x,y)^{\mathrm{T}}\nabla F(\bar{x})+(1-\lambda)(-\lambda)\eta(x,y)^{\mathrm{T}}\nabla F(\bar{x})=0,$$

$$\beta\lambda\|\eta(x,\bar{x})\|^2+\beta(1-\lambda)\|\eta(y,\bar{x})\|^2=\beta\lambda\|\eta(x,\bar{x})\|^2+\beta(1-\lambda)\|\lambda\eta(x,y)\|^2=\beta\lambda(1-\lambda)^2\|\eta(x,y)\|^2+$$
$$\beta(1-\lambda)\lambda^2\|\eta(x,y)\|^2=\beta\lambda(1-\lambda)[(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2+\lambda\|\eta(x,y)\|^2]=\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2,$$

所以
$$\lambda F(x)+(1-\lambda)F(y)-F(\bar{x})\geqslant\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2,$$
$$F(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda F(x)+(1-\lambda)F(y)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2。$$

必要性。假定 F 为强预不变凸函数,则对 $\forall x,y\in\Gamma$ 和 $\lambda\in[0,1]$,存在一个常数 $\beta>0$,使得
$$F(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda F(x)+(1-\lambda)F(y)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2$$
则
$$F(x)-F(y)\geqslant\frac{F(y+\lambda\eta(x,y))-F(y)}{\lambda}+\beta(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2。$$

由中值定理,存在 $\bar{\lambda}$,$0<\bar{\lambda}<\lambda$,使得 $F(x)-F(y)\geqslant\eta(x,y)^{\mathrm{T}}\nabla F(y+\bar{\lambda}\eta(x,y))+\beta(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2$,由 λ 在 $[0,1]$ 中的任意性,让 $\lambda\to0$,则 $\bar{\lambda}\to0$,因此 $F(x)-F(y)\geqslant\eta(x,y)^{\mathrm{T}}\nabla F(y)+\beta\|\eta(x,y)\|^2$,由 x,y 的任意性和 β 的存在性,得证。　　证毕

定理 1　设 Γ 为不变开凸集,η 满足条件 1,F 在 Γ 上是可微的,则 F 是 Γ 上相对于 η 的强预不变凸函数的充要条件是 ∇F 是 Γ 上相对于 η 的强不变单调映射,且 F 满足 $F(y+\eta(x,y))\leqslant F(x)$,对 $\forall x,y\in\Gamma$。

证明　必要性。设 F 为 Γ 上相对于 η 的强预不变凸函数,当 $\lambda=1$ 时,$F(y+\eta(x,y))\leqslant F(x)$,对 $\forall x,y\in\Gamma$。再者,由引理 1,F 是强不变凸的,即 $F(y)-F(x)\geqslant\eta(y,x)^{\mathrm{T}}\nabla F(x)+\beta\|\eta(y,x)\|^2$,交换 x 和 y,则有 $F(x)-F(y)\geqslant\eta(x,y)^{\mathrm{T}}\nabla F(y)+\beta\|\eta(x,y)\|^2$,两式相加,得
$$0\geqslant\eta(y,x)^{\mathrm{T}}\nabla F(x)+\eta(x,y)^{\mathrm{T}}\nabla F(y)+\beta(\|\eta(y,x)\|^2+\|\eta(x,y)\|^2),$$
所以 ∇F 是强不变单调的。

充分性(反证法)。若 ∇F 是 Γ 上相对于 η 的强不变单调映射,设 F 不是 Γ 上相对于 η 的强预不变凸函数,则存在 $x,y\in\Gamma$,使对某一 $\lambda\in(0,1)$ 和任意的 $\beta>0$ 有
$$F(y+\lambda\eta(x,y))>\lambda F(x)+(1-\lambda)F(y)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2。$$

由已知条件,对某一 $\lambda\in(0,1)$ 有
$$F(y+\lambda\eta(x,y))>\lambda F(y+\eta(x,y))+(1-\lambda)F(y)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x-y)\|^2,$$
则 $\lambda[F(y+\lambda\eta(x,y))-F(y+\eta(x,y))]+(1-\lambda)[F(y+\lambda\eta(x,y))-F(y)]>-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x-y)\|^2$。
由中值定理,有
$$\lambda(\lambda-1)\eta(x,y)^{\mathrm{T}}\nabla F(y+\lambda_1\eta(x,y))+(1-\lambda)\lambda\eta(x,y)^{\mathrm{T}}\nabla F(y+\lambda_2\eta(x,y))>-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x-y)\|^2,$$
其中 $0<\lambda_2<\lambda<\lambda_1<1$,则有
$$-\eta(x,y)^{\mathrm{T}}\nabla F(y+\lambda_1\eta(x,y))+\eta(x,y)^{\mathrm{T}}\nabla F(y+\lambda_2\eta(x,y))>-\beta\|\eta(x-y)\|^2\tag{3}$$
由条件 1,有
$$\eta(y+\lambda_2\eta(x,y),y+\lambda_1\eta(x,y))=\eta(y+\lambda_2\eta(x,y),y+\lambda_2\eta(x,y)+(\lambda_1-\lambda_2)\eta(x,y))=$$
$$\eta\left(y+\lambda_2\eta(x,y),y+\lambda_2\eta(x,y)+\frac{\lambda_1-\lambda_2}{1-\lambda_2}\eta(x,y+\lambda_2\eta(x,y))\right)=$$
$$-\frac{\lambda_1-\lambda_2}{1-\lambda_2}\eta(x,y+\lambda_2\eta(x,y))=(\lambda_2-\lambda_1)\eta(x,y)\tag{4}$$
$$\eta(y+\lambda_1\eta(x,y),y+\lambda_2\eta(x,y))=\eta(y+\lambda_1\eta(x,y),y+\lambda_1\eta(x,y)-(\lambda_1-\lambda_2)\eta(x,y))=$$
$$\eta(y+\lambda_1\eta(x,y),y+\lambda_1\eta(x,y)+\eta(y,y+(\lambda_1-\lambda_2)\eta(x,y)))=$$
$$-\eta(y,y+(\lambda_1-\lambda_2)\eta(x,y))=(\lambda_1-\lambda_2)\eta(x,y)\tag{5}$$
用 $(\lambda_1-\lambda_2)$ 乘(3)式,则由(4)、(5)式,有
$$\eta(y+\lambda_2\eta(x,y),y+\lambda_1\eta(x,y))^{\mathrm{T}}\nabla F(y+\lambda_1\eta(x,y))+$$
$$\eta(y+\lambda_1\eta(x,y),y+\lambda_2\eta(x,y))^{\mathrm{T}}\nabla F(y+\lambda_2\eta(x,y))>-\beta(\lambda_1-\lambda_2)\|\eta(x,y)\|^2\tag{6}$$
而由(4)、(5)式
$$\|\eta(y+\lambda_2\eta(x,y),y+\lambda_1\eta(x,y))\|^2=\|\eta(y+\lambda_1\eta(x,y),y+\lambda_2\eta(x,y))\|^2=(\lambda_1-\lambda_2)^2\|\eta(x,y)\|^2,$$
$$\|\eta(y+\lambda_2\eta(x,y),y+\lambda_1\eta(x,y))\|^2+\|\eta(y+\lambda_1\eta(x,y),y+\lambda_2\eta(x,y))\|^2=2(\lambda_1-\lambda_2)^2\|\eta(x,y)\|^2,$$

$$\|\eta(x,y)\|^2=\frac{1}{2(\lambda_1-\lambda_2)^2}(\|\eta(y+\lambda_2\eta(x,y),y+\lambda_1\eta(x,y))\|^2+\|\eta(y+\lambda_1\eta(x,y),y+\lambda_2\eta(x,y))\|^2)=$$

$$\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}\|\eta(y+\lambda_1\eta(x,y),y+\lambda_2\eta(x,y))\|^2$$

为方便起见,令
$$A=\eta(y+\lambda_2\eta(x,y),y+\lambda_1\eta(x,y))^{\mathrm{T}}\nabla F(y+\lambda_1\eta(x,y))+\eta(y+\lambda_1\eta(x,y),y+\lambda_2\eta(x,y))^{\mathrm{T}}\nabla F(y+\lambda_2\eta(x,y))$$

又因 ∇F 是 Γ 上相对于 η 的强不变单调映射。所以,存在 $\alpha>0$,$y+\lambda_1\eta(x,y)$,$y+\lambda_2\eta(x,y)\in\Gamma$,有

$$A+\alpha(\|\eta(y+\lambda_1\eta(x,y),y+\lambda_2\eta(x,y))\|^2+\|\eta(y+\lambda_2\eta(x,y),y+\lambda_1\eta(x,y))\|^2)\leqslant 0,$$

由此式和(4)、(5)式知

$$A\leqslant -2\alpha(\lambda_1-\lambda_2)^2\|\eta(x,y)\|^2 \tag{7}$$

又由(6)式和(7)式得 $-2\alpha(\lambda_1-\lambda_2)^2\|\eta(x,y)\|^2\geqslant A>-\beta(\lambda_1-\lambda_2)\|\eta(x,y)\|^2$,即

$$2\alpha(\lambda_1-\lambda_2)>-\beta\Rightarrow 2\alpha(\lambda_1-\lambda_2)<\beta,$$

而由 β 的任意性且 $\beta>0\Rightarrow 2\alpha(\lambda_1-\lambda_2)\leqslant 0$,这与 $2\alpha(\lambda_1-\lambda_2)>0$ 矛盾。 证毕

2 强 G-单调映射

定义8 设 S 为 $\mathbf{R}^n$ 的非空子集,$F:S\to\mathbf{R}^n$,$G:S\to\mathbf{R}^n$,如果存在 $\beta>0$,使

$$[G(x)-G(y),F(x)-F(y)]\geqslant\beta\|G(x)-G(y)\|^2,\ \forall x,y\in S,x\neq y,$$

则称 F 为相对于 G 的强 G-单调映射。

注3 强 G-单调映射是严格 G-单调映射,但反之不然。

例3 设 $F(x)=-x^2$,$G(x)=-x$,$S=\{x\mid x\geqslant 0\}$,则

$$[G(x)-G(y),F(x)-F(y)]=(-x+y,-x^2+y^2)=(y-x)^2(y+x)>0,$$

所以 F 为相对于 G 的严格 G-单调映射,它不是严格单调的。因为

$$(y-x)^{\mathrm{T}}[F(y)-F(x)]=(y-x)(-y^2+x^2)=-(y-x)^2(y+x)\leqslant 0。$$

同时,它也不是强 G-单调映射。如果 F 是强 G-单调映射,则存在 $\beta>0$,使

$$[G(x)-G(y),F(x)-F(y)]=(-x+y,-x^2+y^2)=(y-x)^2(y+x)\geqslant\beta\|-x+y\|^2$$

则有 $y+x\geqslant\beta$,由 x,y 的任意性,及 $x\neq y$,取 $y=0$,则 $x\geqslant\beta\Rightarrow\beta\leqslant 0$,与 $\beta>0$ 矛盾。

注4 当 $G(x)-G(y)=x-y$ 时,强单调映射为强 G-单调映射,但反之不然。

例4 $F(x)=-(x+1)^2$,$G(x)=-x$,$S=\{x\mid x\geqslant 0\}$,存在 $\beta=1$ 使

$$[G(x)-G(y),F(x)-F(y)]=[-x+y,-(x+1)^2+(y+1)^2]=$$
$$(y-x)(y+1-x-1)(y+1+x+1)=(y-x)^2(y+x+2)\geqslant\|y-x\|^2$$

即 $y+x+2\geqslant 0$ 成立。而
$$(y-x)^{\mathrm{T}}[F(y)-F(x)]=(y-x)[-(y+1)^2+(x+1)^2]=$$
$$(y-x)(x+1-y-1)(x+1+y+1)=-(y-x)^2(x+y+2)\leqslant 0$$

因此,F 不是单调的,从而也不是强单调的。

定义9 设 S 为 $\mathbf{R}^n$ 中的开子集,$F:S\to\mathbf{R}$ 是可微的,$G:S\to\mathbf{R}^n$,如果存在 $\alpha>0$,使 $F(x)-F(y)\geqslant[G(x)-G(y),\nabla F(y)]+\alpha\|G(x)-G(y)\|^2$,$\forall x,y\in S,x\neq y$ 成立,则称 F 为强 G-凸函数。

下面的结果提供了强 G-凸函数和强 G-单调梯度的一个联系 对 ∇F 的一些假设是必要的,以补充没有经典单调性的缺陷。

定理2 设函数 $F:S\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是可微的,

1)如果 F 在 S 上是强 G-凸的,则在 $\beta=2\alpha$ 时,∇F 在 S 上是强 G-单调的;

2)相反,设 a)S 是凸集,b)∇F 在 S 上是强 G-单调的,c)G 在 S 上是凹的,d)$[x-y,\nabla F(\bar{x})]<[G(x)-G(y),\nabla F(y)]+\alpha\|G(x)-G(y)\|^2$ 对 $\forall\alpha>0$ 和某些 $x,y\in S$,且 $x\in S$,$\bar{x}=\bar{\lambda}x+(1-\bar{\lambda})y$,$0<\bar{\lambda}<1$,即可得到

ⅰ)$[x-y,\nabla F(\bar{x})]\geqslant\frac{1}{\lambda}[G(x)-G(y),\nabla F(\bar{x})]$,ⅱ)$[G(x)-G(\bar{x}),\nabla F(\bar{x})]\geqslant 0$,ⅲ)$\nabla F(y)\geqslant 0$,则 F 在 S 上是强 G-凸的。

证明　1）因为 F 在 S 上是强 G-凸的，则 $\forall x,y\in S,x\neq y$，有

$$F(x)-F(y)\geqslant[G(x)-G(y),\nabla F(y)]+\alpha\|G(x)-G(y)\|^2$$

$$F(y)-F(x)\geqslant[G(y)-G(x),\nabla F(x)]+\alpha\|G(y)-G(x)\|^2,$$

将上面两式相加得 $$0\geqslant[G(x)-G(y),\nabla F(y)-\nabla F(x)]+2\alpha\|G(y)-G(x)\|^2,$$

即 $$[G(x)-G(y),\nabla F(x)-\nabla F(y)]\geqslant 2\alpha\|G(y)-G(x)\|^2。$$

所以在 $\beta=2\alpha$ 时，∇F 在 S 上是强 G-单调的。

2）设 ∇F 是强 G-单调的，但 F 不是强 G-凸的。则对 $\forall\alpha>0$，存在 $x,y\in S$，使

$$F(x)-F(y)<[G(x)-G(y),\nabla F(y)]+\alpha\|G(x)-G(y)\|^2。\tag{8}$$

由(8)式和中值定理，存在 $\bar{x}\in S,\bar{x}=\bar{\lambda}x+(1-\bar{\lambda})y,0<\bar{\lambda}<1$，使得

$$[x-y,\nabla F(\bar{x})]<[G(x)-G(y),\nabla F(y)]+\alpha\|G(x)-G(y)\|^2,\tag{9}$$

由假设 2）的(a)—(d)，存在 $\beta>0$ 有

$$[x-y,\nabla F(\bar{x})]\geqslant\frac{1}{\lambda}[G(x)-G(y),\nabla F(\bar{x})]=$$

$$\frac{1}{\lambda}[G(x)-G(\bar{x}),\nabla F(\bar{x})]+\frac{1}{\lambda}[G(\bar{x})-G(y),\nabla F(\bar{x})]\geqslant$$

$$\frac{1}{\lambda}[G(\bar{x})-G(y),\nabla F(\bar{x})]\geqslant\frac{1}{\lambda}\{[G(\bar{x})-G(y),\nabla F(y)]+\beta\|G(\bar{x})-G(y)\|^2\}=$$

$$\frac{1}{\lambda}\{[G(\bar{\lambda}x+(1-\bar{\lambda})y)-G(y),\nabla F(y)]+\beta\|G(\bar{\lambda}x+(1-\bar{\lambda})y)-G(y)\|^2\}=$$

$$\frac{1}{\lambda}\{[\bar{\lambda}(G(x)-G(y)),\nabla F(y)]+\beta\|\bar{\lambda}(G(x)-G(y))\|^2\}\geqslant[G(x)-G(y),\nabla F(y)]+\beta\bar{\lambda}\|G(y)-G(x)\|^2$$

与(9)式矛盾。所以 F 在 S 上是强 G-凸的。　　证毕

参考文献：

[1] HANSON M A. On Sufficiency of the Kuhn Tucker Conditions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1981, 80: 545-550.

[2] WEIR T, MOND B. Preinvex Functions in Multiple-Objective Optimization[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1988, 136: 29-38.

[3] WEIR T, JEYAKUMAR V. A Class of Nonconvex Functions and Mathematical Programming[J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 1988, 38: 177-189.

[4] KARAMARDIAN S, SCHAIBLE S. Seven Kinds of Monotone Maps[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1990, 66: 37-46.

[5] RUIZ-GARZON G, OSUNA-GOMEZ R, RUFIAN-LIZANA A. Generalized Invex Monotonicity[J]. European Journal of Operational Research, 2003, 144: 501-502.

[6] YANG X M, YANG X Q, TEO K L. Generalized Invexity and Generalized Invariant Monotonicity[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2003, 117(3): 607-625.

[7] SINGH C, PINI R. *G*-monotonicity and *G*-convexity[J]. Journal of Information and Optimization Sciences, 2004, 25(2): 287-301.

[8] PINI R, SINGH C. Generalized Convexity and Generalized Monotonicity[J]. Journal of Information and Optimization Sciences, 1999, 20(2): 215-233.

[9] SCHAIBLE S. Generalized Monotonicity-a Survey, in: Generalized Convexity[M]. Berlin: Springer, 1994.

[10] 颜丽佳，刘芙萍. 强预不变凸函数[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2005, 22(1): 11-15.

[11] MOHAN S R, NEOGY S K. On Invex Sets and Preinvex Functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1995, 189: 901-908.

（责任编辑　黄　颖）