股票价格的马氏链预测法*

叶宗文, 罗　珊, 曾　波, 李　彦
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院, 重庆 400047)

摘　要 :马氏链预测法是通过对事物不同状态的初始概率及状态之间的转移概率的研究,预测事物的未来状态。本文建立了股票价格预测的马尔可夫链数学模型,并举例说明了该模型在股票交易市场预测中的应用。

关键词 :股票价格 ;马氏链预测模型 ;模型应用
中图分类号 :O211.67　　文献标识码 :A　　文章编号 :1672-6693(2006)01-0064-03

Markov Mathematic Forecast Method of Stock Price

YE Zong-wen, LUO Shan, ZENG Bo, LI Yan
(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract :The Markov method can forecast the future state of things by studying the initial probability of differ states and transfer probability among the stages. This paper sets up the Markov mathematic forecast model of stock price, and illustrate the application of this model in the stock exchange market.

Key words :stock price ;Markov forecast model ;appliance of model

1　模型建立的理论基础[1,2]

建立马氏链预测模型的基础是"无后效性"(马氏性)和"齐次性"。无后效性通俗地讲就是:已知现在,将来与过去无关,即事物在以后的状态只与本阶段的状态有关,而与以前其它任何阶段所处的状态均无关。这一特性在数学上用条件分布表示为:设 $\{X(t), t\in T\}$ 为一随机过程, $t_i\in T, i=1,2,\cdots,n$,且 $t_1<t_2<\cdots<t_n$,如果对于状态空间 S 中的任意状态 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$,有 $X(t_n)$ 的条件分布函数满足:

$$P\{X(t_n)<x_n \mid X(t_{n-1})=x_{n-1},\cdots,X(t_1)=x_1\}= P\{X(t_n)<x_n \mid X(t_{n-1})=x_{n-1}\}, x_n\in S, \quad (1)$$

则称 $\{X(t), t\in T\}$ 具有马氏性或无后效性,并称 $\{X(t), t\in T\}$ 为马尔柯夫过程。

若上述马尔柯夫过程的状态空间 S 为 **R** 中的可列集,时间参数集 T 为可列离散集,则称 $\{X(t), t\in T\}$ 为离散参数马氏链。特别地,设 $S=\{0,1,2,\cdots,n\}$,即本文只考虑有限状态的马氏链,设 $T=\{0,1,2,\cdots\}$,则(1)式可写为

$$P\{X_{m+1}=j \mid X_m=i, X_{m-1}=i_{m-1},\cdots, X_0=i_0\}=P\{X_{m+1}=j \mid X_m=i\} \quad (2)$$

若(2)式与 m 无关,即

$$P\{X_{m+1}=j \mid X_m=i\}\equiv P\{X_1=j \mid X_0=i\}\equiv P_{ij}(m,1)\equiv p_{ij}。$$

则称马氏链具有"平稳性"或"齐次性", p_{ij} 表示由状态 i 经过一步转移到状态 j 的概率,它具有下列性质:1) $p_{ij}\geqslant 0, (i,j\in S)$;2) $\sum_{j\in S}p_{ij}=1, (i\in S)$。

以 p_{ij} 为元素的矩阵 $P=(p_{ij})$ 称为状态转移概率矩阵,其形式为

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \square & & \square \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

本文用到的关于马氏链极限知识[2,3]介绍如下。如果存在概率分布 $\{\pi_k, k\geqslant 0\}$ 使得马氏链的任意状态 j,k 均有 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{jk}(n)=\pi_k$,则称 $\{\pi_k, k\geqslant 0\}$ 为此链的极限分布。

若存在概率分布 $\{\pi_k, k\geqslant 0\}$ 满足:对马氏链的

* 收稿日期 :2005-03-04　　修回日期 :2005-07-15
作者简介 :叶宗文(1976-),男,重庆云阳人,硕士研究生,研究方向为随机经济系统分析。

任意状态 k 有 $\pi_k=\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j p_{jk}, k\geqslant 0$,简记为

$$\pi=\pi\cdot Q,\tag{3}$$

其中,$\pi=(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\cdots)$,$Q$ 为该链的转移概率矩阵。则称 $\{\pi_k, k\geqslant 0\}$ 为链的平稳分布。称(3)式为平稳方程。

引理[3] 非周期不可约正常返马氏链存在唯一的平稳分布,也是极限分布。

2 模型的建立

设事物有 n 个互不相容的状态,其初始分布为 $I^{(0)}=(i_1{}^{(0)}\ i_2{}^{(0)}\cdots\ i_n{}^{(0)})$,式中 $i_t{}^{(0)}\ (t=1,2,\cdots,n)$ 表示在时刻 0 处于状态 t 的概率,若经过 k 步转移后处于状态 t 的概率为 $i_t{}^{(k)}$,由 C—K 方程[1] 可得

$$i_t{}^{(k+1)}=\sum i_t{}^{(k)}\cdot p_{ij}\qquad (t=1,2,\cdots,n)$$

其矩阵形式为

$$(i_1{}^{(k+1)}\ i_2{}^{(k+1)}\cdots\ i_n{}^{(k+1)})=(i_1{}^{(k)}\ i_2{}^{(k)}\cdots\ i_n{}^{(k)})\cdot\begin{bmatrix}p_{11} & \cdots & p_{1n}\\ \square & & \square\\ p_{n1} & \cdots & p_{nn}\end{bmatrix}$$

简记为

$$I^{(k+1)}=I^{(k)}\cdot P$$

递推得

$$I^{(1)}=I^{(0)}\cdot P$$

$$I^{(2)}=I^{(1)}\cdot P=I^{(0)}\cdot P^2$$

$$\cdots$$

$$I^{(k+1)}=I^{(k)}\cdot P=\cdots=I^{(0)}\cdot P^{(k+1)},\text{即}$$

$$I^{(k+1)}=I^{(0)}\cdot P^{(k+1)}\tag{4}$$

这就是马氏链预测模型。可见对于马氏链,它处于任意时刻的概率分布和一步状态转移概率所决定。

3 模型在股票价格预测中的应用

对于一支股票来说,令 $X(n)$ 表示该股票在第 n 天的收盘价,显然 $X(n)$ 是一个随机变量,$\{X(n), n\geqslant 0\}$ 是一个离散参数的随机过程。本文假定股票价格具有无后效性与时间齐次性。为了使问题简化,只考虑 3 个状态[4]。

股票收盘价格下降 0.1 元以上,称为"下降";变动范围在 $-0.1\sim 0.1$ 元之间,称为"持平";上升 0.1 元以上,称为"上升",且用 1、2、3 分别表示收盘价下降、持平、上升三种状态。连续观察长安汽车股票 2004 年 9 月 1 日—10 月 27 日收盘价的变动情况得如下数据,见表 1。

下面利用马氏链预测模型对上述资料进行分析预测,这里状态空间 $S=\{1,2,3\}$。

表 1 长安汽车股 2004 年 9 月 1 日—10 月 27 日各收盘价情况

序号	状态	序号	状态	序号	状态
1	1	13	3	25	1
2	2	14	3	26	2
3	3	15	1	27	1
4	1	16	1	28	3
5	2	17	3	29	2
6	2	18	3	30	1
7	1	19	2	31	2
8	2	20	1	32	1
9	1	21	1	33	2
10	2	22	1	34	1
11	3	23	1		
12	3	24	1		

由表 1 可知,最后一天的状态为 1 而无状态转移,故出现 1 的总次数应记为 $16-1=15$ 次,其中由 1 转为 1 的次数是 6 次,即转移概率 $p_{11}=\frac{6}{15}=0.4$;由 1 转为 2 的次数是 6 次,即转移概率 $p_{12}=\frac{6}{15}=0.4$;由 1 转为 3 的次数为 3 次,即转移概率 $p_{13}=\frac{3}{15}=0.2$。同理可得,$p_{21}=\frac{7}{9}=0.777\ 8$,$p_{22}=\frac{1}{9}=0.111\ 1$,$p_{23}=\frac{1}{9}=0.111\ 1$,$p_{31}=\frac{2}{9}=0.222\ 2$,$p_{32}=\frac{2}{9}=0.222\ 2$,$p_{33}=\frac{5}{9}=0.555\ 6$。

由上可得,该股票收盘价状态的一步转移矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}p_{11} & \cdots & p_{1n}\\ \square & & \square\\ p_{n1} & \cdots & p_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.400\ 0 & 0.400\ 0 & 0.200\ 0\\ 0.777\ 8 & 0.111\ 1 & 0.111\ 1\\ 0.222\ 2 & 0.222\ 2 & 0.555\ 6\end{bmatrix}$$

利用表 1 的资料预测以后各交易日的情况,由马氏性与齐次性,用第 34 个交易日作为初始状态,认为初始分布 $I^{(0)}=(1\quad 0\quad 0)$。

现利用模型(4)式对长安汽车股票以后各交易日价格状态预测如下。

第 35 个交易日收盘价状态概率向量为 $I^{(1)}=$

$$I^{(0)}\cdot P=(1\quad 0\quad 0)\cdot\begin{bmatrix}0.400\ 0 & 0.400\ 0 & 0.200\ 0\\ 0.777\ 8 & 0.111\ 1 & 0.111\ 1\\ 0.222\ 2 & 0.222\ 2 & 0.555\ 6\end{bmatrix}=$$

$(0.400\quad 0.400\quad 0.200)$

经计算表明，第 35 个交易日价格下降 0.1 元的概率为 40%，价格变动范围在 −0.1～0.1 元之间的概率为 40%，价格上升 0.1 元的概率为 20%。同理可得

第 36 个交易日收盘价状态概率向量

$I^{(2)}=I^{(0)}\cdot P^2=(0.5155\quad 0.2489\quad 0.2356)$；

第 37 个交易日收盘价状态概率向量

$I^{(3)}=I^{(0)}\cdot P^3=(0.4521\quad 0.2862\quad 0.2617)$；

第 38 个交易日收盘价状态概率向量

$I^{(4)}=I^{(0)}\cdot P^4=(0.4616\quad 0.2708\quad 0.2676)$；

第 39 个交易日收盘价状态概率向量

$I^{(5)}=I^{(0)}\cdot P^5=(0.4547\quad 0.2742\quad 0.2711)$；

…

第 44 个交易日收盘价状态概率向量

$I^{(10)}=I^{(0)}\cdot P^{10}=(0.4546\quad 0.2727\quad 0.2727)$；

第 45 个交易日收盘价状态概率向量

$I^{(11)}=I^{(0)}\cdot P^{11}=(0.4546\quad 0.2727\quad 0.2727$；

…

这样，以后各个交易日的收盘价状态都可预测。由上面的计算还可看出，随着交易日的增加，只要稳定条件不变，即一步转移矩阵不变，该股票价格在经过较长时间之后以大约 45.46% 的可能性处于下降状态，以大约 27.27% 的可能性处于持平和上升状态。

这个事实还可根据马氏链极限知识从理论上证明如下。

证明　事实上，由 P 可知，该链是非周期不可约正常返链，由引理知存在唯一的平稳分布，也是最终分布。设该股票收盘价状态最终概率分布为

$$\pi=(x_1\quad x_2\quad x_3),$$

其中 x_1、x_2、x_3 分别表示下降、持平、上升的概率，且

$Q=P=\begin{bmatrix}0.4000 & 0.4000 & 0.2000\\ 0.7778 & 0.1111 & 0.1111\\ 0.2222 & 0.2222 & 0.5556\end{bmatrix}$，由平稳分布方程(3)得

$$\begin{cases}(x_1\ x_2\ x_3)\begin{bmatrix}0.4000 & 0.4000 & 0.2000\\ 0.7778 & 0.1111 & 0.1111\\ 0.2222 & 0.2222 & 0.5556\end{bmatrix}=(x_1\ x_2\ x_3)\\ x_1+x_2+x_3=1\end{cases}$$

经化简得

$$\begin{cases}0.6x_1-0.7778x_2-0.2222x_3=0\\ 0.4x_1-0.8889x_2+0.2222x_3=0\\ 0.2x_1+0.1111x_2-0.4444x_3=0\\ x_1+x_2+x_3=1\end{cases}$$

解得 $x_1=0.4544$，$x_2=0.2728$，$x_3=0.2728$。这与前面用模型直接推算的结论一致。　证毕

最后，要指出的是，股票价格除了受市场机制的影响外，还受其它很多因素比如国家政策的影响[5]，不能保证稳定条件即转移概率矩阵长期不变。因此，本方法适宜于对短时期内股票价格进行预测，对短期股票投资分析提供参考。

参考文献：

[1] 愈钟祺. 随机过程理论及其应用[M]. 天津：天津科学技术出版社，1996.

[2] 刘嘉琨. 应用随机过程[M]. 北京：科学出版社，2000.

[3] 孙荣恒. 应用随机过程[M]. 北京：清华大学出版社，2004.

[4] 郭天印. Markov 预测与决策的 Excel 实现[J]. 陕西工学院学报，2003，19(1)：74-76.

[5] 董景荣. 汇率预报的非线性组合建模与预测方法研究[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版)，2003，20(3)：1-4.

(责任编辑　游中胜)