一致凸 Banach 空间上有限个非扩张映象的隐式迭代过程*

向长合
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院，重庆 400047)

摘　要：对有限个具有公共不动点的非扩张映象引入具误差的隐式迭代序列，并在不同条件下证明了具误差的隐式迭代序列分别弱收敛，和强收敛于这有限个非扩张映象的某一公共不动点。

关键词：一致凸 Banach 空间；非扩张映象；隐式迭代序列；公共不动点；Opial 条件
中图分类号：O177.91　　文献标识码：A　　文章编号：1672-6693(2006)02-0005-03

An Implicit Iterative Process for a Finite Family of Nonexpansive Mappings in Uniformly Convex Banach Space

XIANG Chang-he
(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: This paper introduces implicit iterative sequence possessed errors for a finite family of nonexpansive mappings with common fixed points and proves that, under different conditions, the implicit iterative sequence with errors converges weakly and converges strongly to a common fixed point respectively.

Key words: uniformly convex Banach space; nonexpansive mappings; implicit iterative sequence; common fixed point; Opial's condition

1　预备知识

设 E 是 Banach 空间，K 是 E 中的非空子集，T 是从 K 到 K 的映象，$F(T)$ 是 T 的所有不动点构成的集合，则

1）称 T 是非扩张映象[1]，如果

$$\|Tx-Ty\| \leqslant \|x-y\|,\forall x,y\in K;$$

2）称 E 满足 Opial 条件[2]，如果对 E 中任一点列 $\{x_n\}$，当 x_n 弱收敛于 x 时，都有 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\|x_n-x\| < \overline{\lim_{n\to\infty}}\|x_n-y\|,\forall y\in E,y\neq x$；

3）称 T 是半紧的[3]，若对 K 中任一满足 $\|x_n-Tx_n\|\to 0$ 的有界点列 $\{x_n\}$，都存在强收敛的子列；

4）称 T 在原点半闭[3]，如果对 K 中任一点列 $\{x_n\}$，当 $\{x_n\}$ 在 K 中弱收敛于 q 且 $\{Tx_n\}$ 强收敛于 0 时，都有 $Tq=0$。

2001 年，文献[4]首次对有限个具有公共不动点的非扩张映象引入由下列式子归纳定义的隐式迭代序列 $\{x_n\}$

$$\begin{cases}x_1=\alpha_1x_0+(1-\alpha_1)T_1x_1\\ x_2=\alpha_2x_1+(1-\alpha_2)T_2x_2\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ x_N=\alpha_Nx_{N-1}+(1-\alpha_N)T_Nx_N\\ x_{N+1}=\alpha_{N+1}x_N+(1-\alpha_{N+1})T_1x_{N+1}\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\end{cases}\tag{1}$$

其中 $x_0\in K$，并在 Hilbert 空间中对其收敛性进行了研究；2002 年，文献[5]在一致凸 Banach 空间上对有限个具有公共不动点的非扩张映象研究了由(1)式定义的隐式迭代序列的收敛性；2003 年，文献[6]

* 收稿日期：2005-06-16
资助项目：国家自然科学基金项目(No. 10471159)
作者简介：向长合(1963-)，男，四川岳池人，副教授，研究方向为非线性泛函分析及微分方程。

对文献[5]进行了改进,得到如下两个定理。

定理 1[6] 设 E 是满足 Opial 条件的一致凸实 Banach 空间,K 是 E 的非空闭凸子集 $T_1,T_2,\cdots,T_N: K\to K$ 是 N 个具有公共不动点的非扩张映象,$\{\alpha_n\}$ 是[0,1]中满足 $b<\alpha_n<c$ 的序列,其中 $b,c\in(0,1)$ 是两个常数。则由(1)式定义的隐式迭代序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $T_1,T_2,\cdots,T_N$ 的某一公共不动点。

定理 2[6] 设 E 是一致凸实 Banach 空间,K 是 E 的非空闭凸子集,$T_1,T_2,\cdots,T_N: K\to K$ 是 N 个具有公共不动点的非扩张映象且至少有一个是半紧的,$\{\alpha_n\}$ 是[0,1]中满足 $b<\alpha_n<c$ 的序列,其中 $b,c\in(0,1)$ 是两个常数。则由(1)式定义的隐式迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 $T_1,T_2,\cdots,T_N$ 的某一公共不动点。

在不动点逼近理论中,误差项是必需考虑的一个重要因素。本文受文献[7]的启发,对 N 个非扩张映象引入具误差的隐式迭代序列如下。

定义 1 设 K 是 Banach 空间 E 的非空闭凸集,$T_1,T_2,\cdots,T_N: K\to K$ 是 N 个非扩张映象,$\{x_n\}$ 是由下式归纳定义的迭代序列

$$\begin{cases} x_1=\alpha_1x_0+\beta_1T_1x_1+\gamma_1u_1 \\ x_2=\alpha_2x_1+\beta_2T_2x_2+\gamma_2u_2 \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ x_N=\alpha_Nx_{N-1}+\beta_NT_Nx_N+\gamma_Nu_N \\ x_{N+1}=\alpha_{N+1}x_N+\beta_{N+1}T_1x_{N+1}+\gamma_{N+1}u_{N+1} \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots \end{cases}\tag{2}$$

其中 x_0 是 K 中给定的一点,$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 K 中有界点列,$\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$、$\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$、$\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,1]$ 且满足

$$\alpha_n+\beta_n+\gamma_n=1,\beta_n<1(\forall n\geqslant1),\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n<\infty$$

则 $\{x_n\}$ 称为具误差的隐式迭代序列。

记 $T_{kN+i}=T_i(\forall i=1,2,\cdots,N,\forall k=0,1,2,\cdots)$,则隐式迭代过程(2)式可表示为如下紧凑格式

$$x_n=\alpha_nx_{n-1}+\beta_nT_nx_n+\gamma_nu_n(\forall n\geqslant1)\tag{3}$$

由于 $0\leqslant\beta_n<1$ 且 T_n 是非扩张映象,所以,映象 $x\to\alpha_nx_{n-1}+\beta_nT_nx+\gamma_nu_n$ 是从 Banach 空间 E 的非空闭凸子集 K 到 K 的压缩映象,存在唯一不动点 $x_n\in K$。因而,本文定义 1 给出的具误差的隐式迭代序列的定义是合适的。本文研究这一具误差的隐式迭代序列的弱收敛性及强收敛性,需如下引理。

引理 1[3] 设 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 是两个非负数列,满足 $a_{n+1}\leqslant a_n+b_n(n\geqslant n_0)$,且 $\sum_{n=n_0}^{\infty}b_n<\infty$,其中 n_0 是某非负整数,则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在。

引理 2[8] 设 E 是一致凸 Banach 空间,$\{t_n\}\subset[b,c]\subset(0,1)$ 且 $\{x_n\}$,$\{y_n\}\subset E$,若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|x_n\|\leqslant d$,$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|y_n\|\leqslant d$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\|t_nx_n+(1-t_n)y_n\|=d<\infty$;则 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=0$。

引理 3[3] 设 E 是一致凸 Banach 空间,K 是 E 的非空闭凸子集,$T: K\to K$ 是具有不动点的渐近非扩张映象(特别地,若 $T: K\to K$ 是具有不动点的非扩张映象),则 $I-T$ 在原点半闭,即对 K 中任一点列 $\{x_n\}$,如果 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $q\in K$ 且 $\{(I-T)x_n\}$ 强收敛于 0,则 $(I-T)q=0$。

2 主要结论

定理 3 设 E 是满足 Opial 条件的一致凸 Banach 空间,K 是 E 的非空闭凸子集,$T_1,T_2,\cdots,T_N: K\to K$ 是公共不动点集 $F=\cap_{i=1}^{N}F(T_i)$ 非空的 N 个非扩张映象,$\{u_n\}$ 是 K 中有界点列,$\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$、$\{\gamma_n\}$ 是[0,1]中的 3 个数列且满足如下条件

1) $\alpha_n+\beta_n+\gamma_n=1\ (\forall n\geqslant1)$,

2) $0<b\leqslant\beta_n\leqslant c<1\ (\forall n\geqslant1)$,$b,c$ 是常数,

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n<\infty$

则由(3)式定义的具误差的隐式迭代序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $T_1,T_2,\cdots,T_N$ 的某一公共不动点。

证明 因公共不动点集 $F=\cap_{i=1}^{N}F(T_i)$ 非空,任取 $p\in F$。由于 $\{u_n\}$ 是 K 中有界点列,设

$$M=\sup\{\|u_n-p\|\mid n\geqslant1\}\tag{4}$$

记 $T_{kN+i}=T_i(\forall i=1,2,\cdots,N,\forall K=0,1,2,\cdots)$,由(3)、(4)式、条件 1)及 T_n 是非扩张映象,得

$$\begin{aligned}&\|x_n-p\|=\\&\|\alpha_n(x_{n-1}-p)+\beta_n(T_nx_n-p)+\gamma_n(u_n-p)\|\leqslant\\&\alpha_n\|x_{n-1}-p\|+\beta_n\|T_nx_n-p\|+\gamma_n\|u_n-p\|\leqslant\\&(1-\beta_n)\|x_{n-1}-p\|+\beta_n\|x_n-p\|+M\gamma_n\end{aligned}\tag{5}$$

由条件 2)和(5)式,有

$$\|x_n-p\|\leqslant\|x_{n-1}-p\|+\frac{M}{1-c}\gamma_n$$

由条件 3),据引理 1 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-p\|$ 存在,设

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-p\|=d\tag{6}$$

由此可见,$\{x_n\}$ 是 K 中有界点列,注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=0$,由(3)、(6)式,得

$$\lim_{n\to\infty}\|(1-\beta_n)(x_{n-1}-p)+\beta_n(T_nx_n-p)\|=$$

$$\lim_{n\to\infty}\|(x_n-p)+\gamma_n(x_{n-1}-u_n)\|=d \tag{7}$$

由于 $\|T_nx_n-p\|=\|T_nx_n-T_np\|\leqslant\|x_n-p\|$，再由(6)式，有 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\|T_nx_n-p\|\leqslant d$ (8)

由(6)~(8)式和条件2)，根据引理2，得

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n-1}-T_nx_n\|=0 \tag{9}$$

由此，得 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_{n-1}\|=$

$$\lim_{n\to\infty}\|\beta_n(T_nx_n-x_{n-1})+\gamma_n(u_n-x_{n-1})\|=0 \tag{10}$$

由(9)、(10)式，得 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-T_nx_n\|=$

$$\lim_{n\to\infty}\|(x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}-T_nx_n)\|=0 \tag{11}$$

$\forall j\in\{1,2,\cdots,N\}$，由(10)式，得

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_{n+j}\|=0 \tag{12}$$

由于

$$\|x_n-T_{n+j}x_n\|\leqslant\|x_n-x_{n+j}\|+$$
$$\|x_{n+j}-T_{n+j}x_{n+j}\|+\|T_{n+j}x_{n+j}-T_{n+j}x_n\|\leqslant$$
$$2\|x_n-x_{n+j}\|+\|x_{n+j}-T_{n+j}x_{n+j}\|$$

由此及(11)、(12)式，得

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-T_{n+j}x_n\|=0(\forall j=1,2,\cdots,N)$$

即任给 $\varepsilon>0$，存在自然数 n_0，当 $n\geqslant n_0$ 时，不等式 $\|x_n-T_{n+j}x_n\|<\varepsilon$，对 $j=1,2,\cdots,N$ 一致成立。

任取 $i\in\{1,2,\cdots,N\}$，任给 $n\geqslant n_0$，存在 $j\in\{1,2,\cdots,N\}$，使得 $n+j=kN+i$。其中，k 是某非负整数。于是，当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$\|x_n-T_ix_n\|=\|x_n-T_{kN+i}x_n\|=$$
$$\|x_n-T_{n+j}x_n\|<\varepsilon\ (\forall i=1,2,\cdots,N)$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\|x_n-T_ix_n\|=0\ (\forall i=1,2,\cdots,N) \tag{13}$$

由于 E 是一致凸 Banach 空间，因而 E 是自反的，而 $\{x_n\}$ 是 K 中有界点列，所以有界点列 $\{x_n\}$ 必有子列 $\{x_{n_k}\}$ 弱收敛于 E 中某一个点 x^*。因为 K 是 E 的闭子集，所以 K 弱闭，从而 $x^*\in K$。

另一方面，由(13)式，有

$$\lim_{k\to\infty}\|x_{n_k}-T_ix_{n_k}\|=0\ (i=1,2,\cdots,N),$$

由引理3得 $(I-T_i)x^*=0\ (i=1,2,\cdots,N)$，即 $x^*\in F$。

最后，证明 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x^*。反设 $\{x_n\}$ 不弱收敛于 x^*，由于 E 自反，存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{m_k}\}$ 弱收敛于 K 中异于 x^* 的点 y^*，同样由引理3，$y^*\in F$。又因 $\forall p\in F$，$\lim_{n\to\infty}\|x_n-p\|$ 存在，特别地，$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x^*\|$ 和 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-y^*\|$ 都存在。由于 E 满足 Opial 条件，有

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x^*\|=\lim_{k\to\infty}\|x_{n_k}-x^*\|<$$
$$\lim_{k\to\infty}\|x_{n_k}-y^*\|=\lim_{n\to\infty}\|x_n-y^*\|=$$
$$\lim_{k\to\infty}\|x_{m_k}-y^*\|<\lim_{k\to\infty}\|x_{m_k}-x^*\|=\lim_{n\to\infty}\|x_n-x^*\|$$

则矛盾。因此，$\{x_n\}$ 弱收敛于 $x^*\in F$。 证毕

定理4 设 E 是一致凸 Banach 空间，K 是 E 的非空闭凸子集，$T_1,T_2,\cdots,T_N$: $K\to K$ 是 N 个具有公共不动点的非扩张映象且至少有一个是半紧的，$\{u_n\}$ 是 K 中有界点列，$\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$、$\{\gamma_n\}$ 是[0,1]中的3个数列且满足定理3中的条件1)~3)，则由(3)式定义的具误差的隐式迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 $T_1,T_2,\cdots,T_N$ 的某一公共不动点。

证明 由于 E 是一致凸 Banach 空间，虽然不一定满足 Opial 条件，但由定理3的证明过程可见，由(3)式定义的具误差的隐式迭代序列 $\{x_n\}$ 必有子列 $\{x_{n_k}\}$ 弱收敛于 $T_1,T_2,\cdots,T_N$ 在 K 中的某一公共不动点 x^* 且极限 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x^*\|$ 存在，同时，$\lim_{n\to\infty}\|x_n-T_ix_n\|=0(i=1,2,\cdots,N)$。

因为 $T_1,T_2,\cdots,T_N$ 中至少有一个是半紧的，由上述结果及半紧的定义，必存在 $\{x_{n_k}\}$ 中的子列(仍记为 $\{x_{n_k}\}$)强收敛于 x^*。

因为极限 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x^*\|$ 存在，从而

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x^*\|=\lim_{k\to\infty}\|x_{n_k}-x^*\|=0,$$

即迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 x^*。 证毕

参考文献：

[1] HALPERN B. Fixed Points of Nonexpanding Maps[J]. Bull Amer Math Soc, 1967, 73:957-961.

[2] OPIAL Z. Weak Convergence of the Sequence of Successive Approximations for Nonexpansive Mappings[J]. Bull Amer Math Soc, 1967, 73:595-597.

[3] CHANG S S, CHO Y J, ZHOU H Y. Demi-closed Principle and Weak Convergence Problems for Asymptotically Nonexpansive Mappings[J]. J Korean Math Soc, 2001, 38:1245-1260.

[4] XU H K, ORI R G. An Implicit Iteration Process for Nonexpansive Mappings[J]. Numer Funct Anal and Optimiz, 2001, 22:767-773.

[5] ZHOU Y Y, CHANG S S. Convergence of Implicit Iterative Process for a Finite Family of Asymptotically Nonexpansive Mappings in Banach Spaces[J]. Numer Funct Anal and Optimiz, 2002, 23:911-921.

[6] CHANG S S, CHO Y J. The Implicit Iterative Processes for Asymptotically Nonexpansive Mappings[J]. Nonlinear Anal and Appl, 2003, (1):369-382.

[7] LIU L S. Ishikawa and Mann Iterative Process with Errors for Nonlinear Strongly Accretive Mappings in Banach Spaces[J]. J Math Anal Appl, 1995, 194:114-125.

[8] Schu J. Weak and Strong Convergence to Fixed Points of Asymptotically Nonexpansive Mappings[J]. Bull Austral Math Soc, 1991, 43:153-159.

(责任编辑　黄　颖)