Hilbert 空间上有限个非扩张映象的隐式迭代过程*

向长合
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院,重庆 400047)

摘 要:在对参数较弱的限制条件下,本文利用 Hilbert 空间恒等式及 Opial 性质,在 Hilbert 空间上对有限个具有公共不动点的非扩张映象,研究了具误差的隐式迭代序列的弱收敛性和强收敛性。

关键词:Hilbert 空间;非扩张映象;隐式迭代序列;公共不动点;半紧

中图分类号:O177.91 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2006)03-0010-03

An Implicit Iterative Process for a Finite Family of Nonexpansive Mappings in Hilbert Space

XIANG Chang-he
(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: Under weaker restrictive condition for the parameter, this paper presents the study of the weak convergence and strong convergence of the implicit iterative sequence with errors for a finite family of nonexpansive mappings with common fixed points in Hilbert space by using Hilbert space identity and Opial's property for the Hilbert spaces.

Key words: Hilbert space; nonexpansive mappings; implicit iterative sequence; common fixed point; semi-compact

本文假设 H 是一个 Hilbert 空间,C 是 H 中的一个非空闭凸子集,T 是从 C 到 C 的非扩张映象,即 $\| Tx - Ty \| \leqslant \| x - y \|$,$\forall x, y \in C$,且其不动点集 $F(T) = \{x \in C: Tx = x\}$ 非空。到目前为止,已有许多作者对一个非扩张映象的不动点的各种迭代逼近进行了研究,得到大量成果。最近,一些作者又对有限个非扩张映象公共不动点的迭代逼近问题进行了研究。2001 年,文献[1]对有限个非扩张映象 $T_1, T_2, \cdots, T_N$ 引入由下式归纳定义的隐式迭代序列 $\{x_n\}$

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1 - \alpha_n) T_n x_n \quad (n \geqslant 1) \tag{1}$$

其中 $T_n = T_{n \bmod N}$,$x_0 \in C$。并在 Hilbert 空间上研究了其收敛性,得到如下主要定理。

定理 1[1] 设 C 是 Hilbert 空间 H 的非空闭凸子集,$T_1, T_2, \cdots, T_N: C \to C$ 是 N 个具有公共不动点的非扩张映象,若 $x_0 \in C$,$\{\alpha_n\}$ 是 $(0, 1)$ 内的序列且 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$,则由隐式迭代过程(1)式定义的序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $T_1, T_2, \cdots, T_N$ 的某一公共不动点。

2002 年,文献[2]在满足 Opial 条件的一致凸 Banach 空间上,也对有限个具有公共不动点的非扩张映象研究了由(1)式定义的隐式迭代序列的收敛性;2003 年,文献[3]对文献[2]进行了改进,得到如下结论:若 $\{\alpha_n\}$ 是 $[0,1]$ 中满足 $b < \alpha_n < c$ 的序列,其中 $b, c \in (0,1)$ 是两个常数,则由(1)式定义的隐式迭代序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $T_1, T_2, \cdots, T_N$ 的某一公共不动点;若进一步假设 $T_1, T_2, \cdots, T_N$ 中至少有一个是半紧的,则由(1)式定义的隐式迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 $T_1, T_2, \cdots, T_N$ 的某一公共不动点。

在隐式迭代过程(1)式中,并未考虑误差的影响,而在不动点逼近理论中,误差项是一个不容忽视的因素。本文受文献[4]的启发,对有限个非扩张映象引入具误差的隐式迭代序列,然后,在对参数 α_n 更宽松的限制条件下研究此迭代序列的收敛性。

* 收稿日期:2005-12-13
资助项目:国家自然科学基金(No. 10471159)
作者简介:向长合(1963-),男,四川岳池人,副教授,研究方向为非线性泛函分析。

1 预备知识

定义1[5] 设C是Hilbert空间H中的一个非空子集,T是从C到C的映象,称T是半紧的,如果对于C中任一满足$\|x_n - Tx_n\| \to 0$的有界点列$\{x_n\}$,都存在强收敛的子列。

定义2 设C是Hilbert空间H的非空闭凸集,$T_1, T_2, \cdots, T_N: C \to C$是$N$个非扩张映象,$\{x_n\}$是由下式归纳定义的迭代序列

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + \beta_n T_n x_n + \gamma_n u_n (n \geqslant 1) \quad (2)$$

其中x_0是C中给定的一点,$T_n = T_{n\bmod N}$,即$T_{kN+i} = T_i(\forall i = 1, 2, \cdots, N, \forall k = 0, 1, 2, \cdots)$,$\{u_n\}$是$C$中有界点列,$\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$、$\{\gamma_n\}$是$[0,1]$中的3个数列且满足

$$\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1, \beta_n < 1 (\forall n \geqslant 1)$$

则称$\{x_n\}$为具误差的隐式迭代序列。

由于$0 \leqslant \beta_n < 1$且T_n是非扩张映象,所以,映象$x \to \alpha_n x_{n-1} + \beta_n T_n x + \gamma_n u_n$是从Hilbert空间$H$的非空闭凸子集$C$到$C$的压缩映象,存在唯一不动点$x_n \in C$,因而,本文定义2给出的具误差的隐式迭代序列的定义是适当的。本文的目的就是研究这一具误差的隐式迭代序列的弱收敛性及强收敛性,为此需如下一些引理。

引理1 设H是Hilbert空间,$u, v, w \in H$,若α, β, γ是实数且$\alpha + \beta + \gamma = 1$,则有如下Hilbert空间恒等式成立

$$\|\alpha u + \beta v + \gamma w\|^2 = \alpha\|u\|^2 + \beta\|v\|^2 + \gamma\|w\|^2 - \alpha\beta\|u - v\|^2 - \alpha\gamma\|u - w\|^2 - \beta\gamma\|v - w\|^2$$

证明
$$\alpha\|u\|^2 + \beta\|v\|^2 + \gamma\|w\|^2 - \alpha\beta\|u - v\|^2 - \alpha\gamma\|u - w\|^2 - \beta\gamma\|v - w\|^2 = \alpha\|u\|^2 + \beta\|v\|^2 + \gamma\|w\|^2 - \alpha\beta(\|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle u, v\rangle) - \alpha\gamma(\|u\|^2 + \|w\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle u, w\rangle) - \beta\gamma(\|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle v, w\rangle) = \alpha(1 - \beta - \gamma)\|u\|^2 + \beta(1 - \alpha - \gamma)\|v\|^2 + \gamma(1 - \alpha - \beta)\|w\|^2 + 2\alpha\beta\mathrm{Re}\langle u, v\rangle + 2\alpha\gamma\mathrm{Re}\langle u, w\rangle + 2\beta\gamma\mathrm{Re}\langle v, w\rangle = \alpha^2\|u\|^2 + \beta^2\|v\|^2 + \gamma^2\|w\|^2 + 2\alpha\beta\mathrm{Re}\langle u, v\rangle + 2\alpha\gamma\mathrm{Re}\langle u, w\rangle + 2\beta\gamma\mathrm{Re}\langle v, w\rangle = \|\alpha u + \beta v + \gamma w\|^2$$
证毕

引理2[4] 设$\{a_n\}$、$\{b_n\}$是两个非负数列,满足:$a_{n+1} \leqslant a_n + b_n (n \geqslant n_0)$,且$\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n < \infty$,其中$n_0$是某非负整数,则极限$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在。

引理3[6] 设C是Hilbert空间H的非空闭集,$T: C \to C$是非扩张映象,则$I - T$在C上半闭,即对C中任一点列$\{x_n\}$,如果$\{x_n\}$弱收敛于x^*且$\{(I - T)x_n\}$强收敛于y,则$(I - T)x^* = y$。

引理4[6] Hilbert空间H具有Opial性质,即对H中任一点列$\{x_n\}$,当x_n弱收敛于x时,有$\limsup\limits_{n\to\infty}\|x_n - x\| < \limsup\limits_{n\to\infty}\|x_n - y\|$,$\forall y \in H$,$y \neq x$。

2 主要结论

定理2 设C是Hilbert空间H中的非空闭凸子集,$T_1, T_2, \cdots, T_N: C \to C$是公共不动点集$F = \cap_{i=1}^N F(T_i)$非空的$N$个非扩张映象,$\{u_n\}$是$C$中有界点列,$\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$、$\{\gamma_n\}$是$(0,1)$中的3个数列且满足如下条件

1) $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1, 0 < \alpha_n \leqslant a < 1 (\forall n \geqslant 1)$,其中$a$是一个常数;

2) $\gamma_n = \alpha_n \delta_n$且$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$。

则由(2)式定义的具误差的隐式迭代序列$\{x_n\}$弱收敛于$T_1, T_2, \cdots, T_N$的某一公共不动点。

证明 因公共不动点集$F = \cap_{i=1}^N F(T_i)$非空,任取$p \in F$。由于$\{u_n\}$是C中有界点列,令

$$M = \sup\{\|u_n - p\| : n \geqslant 1\} \quad (3)$$

记$T_{kN+i} = T_i(\forall i = 1, 2, \cdots, N, \forall k = 0, 1, 2, \cdots)$,由(2)式、条件1)及引理1,得

$$\|x_n - p\|^2 = \|\alpha_n(x_{n-1} - p) + \beta_n(T_n x_n - p) + \gamma_n(u_n - p)\|^2 = \alpha_n\|x_{n-1} - p\|^2 + \beta_n\|T_n x_n - p\|^2 + \gamma_n\|u_n - p\|^2 - \alpha_n\beta_n\|x_{n-1} - T_n x_n\|^2 - \alpha_n\gamma_n\|x_{n-1} - u_n\|^2 - \beta_n\gamma_n\|T_n x_n - u_n\|^2 \quad (4)$$

由于T_n是非扩张映象,由(3)式、(4)式及定理的条件,得

$$\|x_n - p\|^2 \leqslant \alpha_n\|x_{n-1} - p\|^2 + \beta_n\|x_n - p\|^2 + M^2\gamma_n - \alpha_n\beta_n\|x_{n-1} - T_n x_n\|^2 \leqslant \alpha_n\|x_{n-1} - p\|^2 + (1 - \alpha_n)\|x_n - p\|^2 + M^2\alpha_n\delta_n - \alpha_n\beta_n\|x_{n-1} - T_n x_n\|^2 \quad (5)$$

注意到$\alpha_n > 0$,由(5)式得到

$$\|x_n - p\|^2 \leqslant \|x_{n-1} - p\|^2 + M^2\delta_n - \beta_n\|x_{n-1} - T_n x_n\|^2 \leqslant \quad (6)$$

$$\| x_{n-1} - p \|^2 + M^2\delta_n (\forall n \geqslant 1) \tag{7}$$

由(7)式和条件2)，根据引理2，极限$\lim_{n\to\infty}\| x_n - p \|^2$存在，从而，极限$\lim_{n\to\infty}\| x_n - p \|$ 存在，设

$$\lim_{n\to\infty}\| x_n - p \| = d \tag{8}$$

由(6)式，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n \| x_{n-1} - T_n x_n \|^2 \leqslant \| x_0 - p \|^2 + M^2 \sum_{n=1}^{\infty}\delta_n < +\infty$$

于是有

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n \| x_{n-1} - T_n x_n \|^2 = 0 \tag{9}$$

注意到$\lim_{n\to\infty}\gamma_n = 0$，由条件1)，得

$$\liminf_{n\to\infty}\beta_n = \liminf_{n\to\infty}(1 - \alpha_n - \gamma_n) \geqslant 1 - a > 0$$

从而，由(9)式，有$\lim_{n\to\infty}\| x_{n-1} - T_n x_n \|^2 = 0$，即

$$\lim_{n\to\infty}\| x_{n-1} - T_n x_n \| = 0 \tag{10}$$

由(8)式，$\{x_n\}$ 是 C 中有界点列，根据(2)式、(10)式和定理中的条件，得

$$\lim_{n\to\infty}\| x_n - x_{n-1} \| = \lim_{n\to\infty}\| \beta_n (T_n x_n - x_{n-1}) + \gamma_n (u_n - x_{n-1}) \| = 0 \tag{11}$$

由(10)式及(11)式，得

$$\lim_{n\to\infty}\| x_n - T_n x_n \| = \lim_{n\to\infty}\| (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - T_n x_n) \| = 0 \tag{12}$$

任取$j \in \{1,2,\cdots,N\}$，由(11)式，得

$$\lim_{n\to\infty}\| x_n - x_{n+j} \| = 0 \tag{13}$$

注意到

$$\| x_n - T_{n+j} x_n \| \leqslant \| x_n - x_{n+j} \| + \| x_{n+j} - T_{n+j} x_{n+j} \| + \| T_{n+j} x_{n+j} - T_{n+j} x_n \| \leqslant 2 \| x_n - x_{n+j} \| + \| x_{n+j} - T_{n+j} x_{n+j} \|$$

由此及(12)式和(13)式，得

$$\lim_{n\to\infty}\| x_n - T_{n+j} x_n \| = 0 (\forall j = 1,2,\cdots,N),$$

即$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant j\leqslant N}\| x_n - T_{n+j} x_n \| = 0$。

因此，得到

$$\lim_{n\to\infty}\| x_n - T_i x_n \| = 0 (\forall i = 1,2,\cdots,N) \tag{14}$$

由于 Hilbert 空间 H 是自反的，C 中有界点列 $\{x_n\}$ 必有子列 $\{x_{n_k}\}$ 弱收敛于H中某一个点x^*，而C是 H 的闭子集，所以，C 弱闭，从而 $x^* \in C$。

另一方面，由(14)式，有

$$\lim_{k\to\infty}\| x_{n_k} - T_i x_{n_k} \| = 0 (i = 1,2,\cdots,N)$$

根据引理3，得$(I - T_i)x^* = 0 (i = 1,2,\cdots,N)$，即 $x^* \in F$。

最后证明整个序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x^*。如若不然，设 $\{x_n\}$ 不弱收敛于 x^*，由于 H 是自反的，序列 $\{x_n\}$ 中必有子列 $\{x_{m_k}\}$ 弱收敛于 C 中异于 x^* 的点 y^*，同样根据引理3，$y^* \in F$。由于任给$p \in F$，极限$\lim_{n\to\infty}\| x_n - P \|$ 存在，特别地，$\lim_{n\to\infty}\| x_n - x^* \|$ 和 $\lim_{n\to\infty}\| x_n - y^* \|$ 都存在。由引理4，Hilbert 空间 H 具有 Opial 性质，有

$$\lim_{n\to\infty}\| x_n - x^* \| = \lim_{k\to\infty}\| x_{n_k} - x^* \| < \lim_{k\to\infty}\| x_{n_k} - y^* \| = \lim_{n\to\infty}\| x_n - y^* \| = \lim_{k\to\infty}\| x_{m_k} - y^* \| < \lim_{k\to\infty}\| x_{m_k} - x^* \| = \lim_{n\to\infty}\| x_n - x^* \|$$

矛盾。因此 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $x^* \in F$。　证毕

定理3　设C是Hilbert 空间H中的非空闭凸子集，$T_1,T_2,\cdots,T_N: C \to C$ 是 N 个具有公共不动点的非扩张映象且至少有一个是半紧的，$\{u_n\}$ 是 C 中有界点列，$\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$、$\{\gamma_n\}$ 是$(0,1)$中的3个数列且满足定理2中的条件1)、2)，则由(2)式定义的具误差的隐式迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 $T_1,T_2,\cdots,T_N$ 的某一公共不动点。

证明　由定理2，由(2)式定义的具误差的隐式迭代序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $T_1,T_2,\cdots,T_N$ 在 C 中的某一公共不动点 x^* 且极限$\lim_{n\to\infty}\| x_n - x^* \|$ 存在，同时 $\lim_{n\to\infty}\| x_n - T_i x_n \| = 0 (i = 1,2,\cdots,N)$。

因为 $T_1,T_2,\cdots,T_N$ 中至少有一个是半紧的，序列 $\{x_n\}$ 中必存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 强收敛于 x^*。由于极限 $\lim_{n\to\infty}\| x_n - x^* \|$ 存在，从而

$$\lim_{n\to\infty}\| x_n - x^* \| = \lim_{k\to\infty}\| x_{n_k} - x^* \| = 0$$

即迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 x^*。　证毕

在隐式迭代过程(2)式中，取$\gamma_n = 0$，则隐式迭代过程(2)式退化为隐式迭代过程(1)式，根据定理2和定理3，有如下两个推论。

推论1　设 C 是 Hilbert 空间 H 的非空闭凸子集，$T_1,T_2,\cdots,T_N: C \to C$ 是 N 个具有公共不动点的非扩张映象，若 $x_0 \in C$，$\{\alpha_n\}$ 是$(0,a]$中的序列，其中 $a < 1$ 是一个常数，则由隐式迭代过程(1)式定义的序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $T_1,T_2,\cdots,T_N$ 的某一公共不动点。

推论2　设 C 是 Hilbert 空间 H 的非空闭凸子集，$T_1,T_2,\cdots,T_N: C \to C$ 是 N 个具有公共不动点的

(下转15页)

(上接12页)

非扩张映象且至少有一个是半紧的,若 $x_0 \in C$,$\{\alpha_n\}$ 是 $(0,a]$ 中的序列,其中 $a < 1$ 是一个常数,则由隐式迭代过程(1)式定义的序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 $T_1, T_2, \cdots, T_N$ 的某一公共不动点。

2 结论

本文主要在如下3个方面对文献[1]的结果进行了推广和改进。

1)将没有考虑误差的隐式迭代过程(1)式推广到了具误差的隐式迭代过程(2)式;

2)将文献[1]中对参数 α_n 的限制条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$ 放宽到了 $0 < \alpha_n \leqslant a < 1$,其中 a 是常数,定理1实际上是本文推论1的一个特殊情形;

3)讨论了迭代序列的强收敛性,本文推论2的结果在目前也是新的。

参考文献:

[1] XU H K, ORI R G. An Implicit Iteration Process for Nonexpansive Mappings[J]. Numer Funct Anal and Optimiz, 2001(22):767-773.

[2] ZHOU Y Y, CHANG S S. Convergence of Implicit Iterative Process for a Finite Family of Asymptotically Nonexpansive Mappings in Banach Spaces[J]. Numer Funct Anal and Optimiz, 2002(23):911-921.

[3] CHANG S S, CHO Y J. The Implicit Iterative Processes for Asymptotically Nonexpansive Mappings[J]. Nonlinear Anal and Appl, 2003(1):369-382.

[4] LIU L S. Ishikawa and Mann Iterative Process with Errors for Nonlinear Strongly Accretive Mappings in Banach Spaces[J]. J Math Anal Appl, 1995,194:114-125.

[5] CHANG S S, CHO Y J, ZHOU H Y. Demi-closed Principle and Weak Convergence Problems for Asymptotically Nonexpansive Mappings[J]. J Korean Math Soc, 2001, 38:1245-1260.

[6] OPIAL Z. Weak Convergence of the Sequence of Successive Approximations for Nonexpansive Mappings[J]. Bull Amer Math Soc, 1967, 73:595-597.

(责任编辑 黄 颖)